MSG 2011/2012 — Zirkel 9b
Alexander Unger

Aufgaben vom 16. bis 23. Februar 2012

1. **Formel frei!**

   Beweise eine Formel für die Summe der ersten n dritten Potenzen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \overset{\text{def}}{=} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

   Daraus folgt interessanterweise: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

2. **Mattes Autorennen (knifflig, zum Knobeln)**

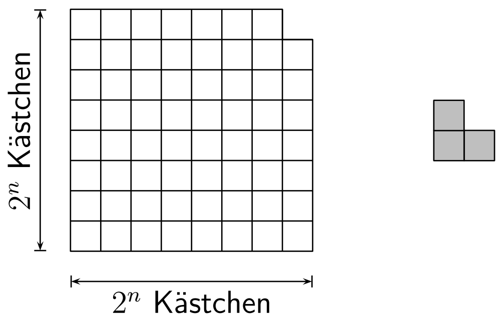
   Auf einer kreisförmigen Strecke fahren n identische Autos. Leider haben die Autos insgesamt so viel Benzin im Tank, dass es gerade einmal ausreicht, dass ein Auto eine vollständige Runde fahren könnte – aber das Benzin ist völlig ungleichmäßig verteilt!

   Zeige, dass eines der Autos eine komplette Runde fahren kann, indem es von einem Auto zum nächsten fährt und dessen Benzin in seinen Tank umfüllt.

   Kann man etwas darüber sagen, welches Auto das ist?

3. **Eckenlose Überdeckung**

   Zeige, dass jedes $2^n \times 2^n$-Quadrat ($n \in \mathbb{N}$), bei dem an einer Ecke ein Kästchen abgeschnitten wurde, durch Teile der abgebildeten Form vollständig ausgelegt werden kann, so dass sich keine Teile überlappen.



4. **Divisibility pattern**

   Prove that all numbers of the form 1007, 10017, 100117, 1001117, . . . are divisible by 53.