

Aufgaben-Blatt 5

vom 29. Januar bis 19. Februar 2015

1. Gemittelte Mittel

Zeige, dass das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen a und b gleich dem geometrischen Mittel aus dem harmonischen und dem arithmetischen Mittel von a und b ist.

Wie lässt sich daraus leicht schlussfolgern, dass das geometrische Mittel von a und b stets zwischen dem harmonischen und dem arithmetischen Mittel von a und b liegt?

2. In English please

The numbers

$$\frac{1}{i+j-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

are written in an $n \times n$ table such that the number $\frac{1}{i+j-1}$ stands at the intersection of the i -th row and j -th column. Choose any n squares of the table so that no two of them are in the same row and no two of them are in the same column.

Prove that the sum of the numbers chosen is greater than or equal to 1.

3. Nesbitt-Ungleichung

Finde die größte reelle Zahl K , so dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq K$$

gilt und beweise die Ungleichung.

4. Mittelmäßige Geometrie II

Zeige, dass in einem regelmäßigen Siebeneck die Seitenlänge gleich dem halben harmonischen Mittel der beiden verschiedenen Diagonalenlängen ist.

5. Logarithmus ohne Taschenrechner

Finde ohne Taschenrechner nur mit Hilfe der Funktion $f(t) = \frac{\int_a^b x^{t+1} dx}{\int_a^b x^t dx}$ die ersten beiden Nachkommastellen von $\ln \frac{3}{2}$.

(Tipp: Bringe durch Wahl eines geeigneten Werts für t den natürlichen Logarithmus ins Spiel und benutze bekannte Werte von f sowie die Monotonie von f , um $\ln \frac{b}{a}$ geeignet einzuschachteln.)

Lässt sich diese Frage auf diese Weise für beliebige Zahlen der Form $\ln \frac{p}{q}$ beantworten? Für welche geht das, für welche nicht? Für welche geht das sogar noch genauer?