Aufgaben-Blatt 6

vom 26. Februar bis 12. März 2015

1. **Aus der Landesrunde der 54. Mathematikolypmiade: MO540934**

   Gegeben sind drei positive Zahlen g, b und f, für die $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ gilt.

   Zeige, dass dann stets $g + b \geq 4f$ erfüllt ist.

   Die Gleichung ist eine Gleichung aus der Optik. Was besagt sie? Und was bedeutet dann die Ungleichung?

2. **Geometrische Ungleichungen**

   Zeige, dass in jedem Dreieck für die Innenwinkel α, β, γ gilt:

   (a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (einfach)

   (b) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$ (schwierig)

3. **Jensen in Aktion**

   Beweise die Nesbitt-Ungleichung aus Aufgabe 3, Aufgabenblatt 5, mit Hilfe der Jensen'schen Ungleichung:

   Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

   (*Tipp:* Um eine Funktion in nur einer Variablen benutzen zu können, bietet sich im Nenner die Verwendung von $s := a + b + c$ als Parameter an.)

4. **Noch eine Ungleichung**

   Beweise für $0 \leq x, y \leq 1$ die Ungleichung

   $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

5. **Aus der Landesrunde der 54. Mathematikolypmiade: MO541036**

   Die Ecken eines Würfels sollen mit verschiedenen natürlichen Zahlen derart beschriftet werden, dass zwei dieser Zahlen genau dann teilerfremd sind, wenn die zugehörigen Ecken Eckpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind.

   (a) Finde eine derartige Beschriftung und weise nach, dass sie die geforderte Eigenschaft hat.

   (b) Welches ist der kleinstmögliche Wert für die größte dieser Zahlen?

   Begründe deine Antwort, d. h. weise nach, dass bei jeder beliebigen solchen Beschriftung, die größte der verwendeten Zahlen nie kleiner als die gefundene Zahl sein kann.