

## Aufgaben-Blatt 4

vom 8. bis 22. Januar 2015

### 1. Cauchy lässt grüßen

Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $a + b + c + d = 1$ . Zeige, dass gilt:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

### 2. Extremwert gesucht

Finde das Minimum der Funktion  $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$  für  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

### 3. In English please: Ink-blots

There are some ink-blots on a white paper square with side length  $a$ . The area of each blot is not greater than 1 and every line parallel to any one of the sides of the square intersects no more than one blot. Prove that the total area of the blots is not greater than  $a$ .

### 4. Mittelmäßige Geometrie

Gegeben sei ein Trapez, dessen zueinander parallele Seiten die Längen  $a$  und  $b$  besitzen. In das Trapez werden 4 Strecken parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes und mit Endpunkten auf den Schenkeln des Trapezes eingezeichnet. Die Längen dieser vier Strecken sind der Reihe nach das arithmetische Mittel, das harmonische Mittel, das geometrische Mittel und das quadratische Mittel von  $a$  und  $b$ .

Eine der Strecken verläuft durch den Diagonalschnittpunkt des Trapezes, eine zerlegt das Trapez in zwei ähnliche Trapeze, eine halbiert die Schenkel des Trapezes und eine zerlegt das Trapez in zwei flächengleiche Trapeze.

Finde die richtige Zuordnung, auf welche Strecke welche Eigenschaft zutrifft und beweise, dass sie diese Eigenschaft hat.

Unter welcher Bedingung gibt es eine Strecke, die mehrere der genannten Eigenschaften erfüllt?