Aufgaben-Blatt 2

vom 18. September bis 2. Oktober 2014

1. **Rechnen mit übernatürlichen Zahlen**

   (1) Berechne $\dfrac{14}{15}$.

   (2) Welcher rationalen entspricht $\overline{63}257$?

   (3) Wie in den natürlichen Zahlen endet jedes Vielfache von 5 auf 5 oder 0 und jedes Vielfache von 2 auf eine gerade Ziffer.
   Zeige, dass wie in den natürlichen Zahlen die Umkehrung gilt: Jede Zahl, die auf 5 oder 0 (bzw. auf eine gerade Ziffer) endet, ist durch 5 (bzw. 2) teilbar.

2. **In English please:**

3. **Ordnung unmöglich**

   Eine Relation „$\preceq$“ auf einer Menge M heißt Halbordnung, wenn gilt:

   (1) $\preceq$ ist reflexiv, d. h. für alle $x \in M$ gilt $x \preceq x$,

   (2) $\preceq$ ist antisymmetrisch, d. h. aus $x \preceq y$ und $y \preceq x$ folgt $x = y$,

   (3) $\preceq$ ist transitiv, d. h. aus $x \preceq y$ und $y \preceq z$ folgt $x \preceq z$.

   Eine Halbordnung heißt totale Ordnung, wenn gilt:

   (4) $\preceq$ ist total, d. h. für alle $x, y \in M$ ist $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ (einschließendes oder).

   Die „normale kleiner-gleich-Relation“ $\leq$ auf der Menge $M = \mathbb{N}$ oder $M = \mathbb{R}$ ist eine Halbordnung, sie ist total. In einer total geordneten Menge können alle Elemente der Reihe nach geordnet werden, zum Beispiel die reellen Zahlen bezüglich $\leq$. Dadurch ist zum Beispiel die Darstellung als Zahlengerade erst möglich!

   (a) Ist die kleiner-Relation „$<$“ auf $\mathbb{Q}$ eine Halbordnung?

   (b) Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von M (einschließlich $\emptyset$ und M). Zeige, dass die Enthaltenseins-Relation „$\subseteq$“ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(M)$ ist. Ist sie total?

   (c) Sei M die Menge aller Stichwörter in einem Inhaltsverzeichnis. Mit „$\preceq$“ sei die lexikographische Ordnung gemeint. Definiere diese Ordnung präzise, so dass die so definierte Ordnung total ist. (Daher ist die Anordnung in einem Inhaltsverzeichnis möglich!)

   (d) Zeige, dass die Teilbarkeitsrelation „$|$“ eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$ ist. Ist sie total?

   Ein Ring (oder ein Körper) R heißt angeordnet, wenn es eine totale Ordnung auf R gibt, die mit den Operationen $+$ und $\cdot$ verträglich ist, d. h.

   (5) für alle $x \preceq y$ und alle $z \in R$ gilt $x + z \preceq y + z$ und

   (6) für alle $x \preceq y$ und alle $0 \preceq z$ gilt $x \cdot z \preceq y \cdot z$.

   Auf $R = \mathbb{Z}$ oder $R = \mathbb{Q}$ gibt es eine Relation, die mit den beiden Operationen $+$ und $\cdot$ verträglich ist, nämlich $\leq$. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind also angeordnet.

(e) ??? Beispiel ???

(f) Zeige, dass der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen nicht angeordnet werden kann.

(g) Zeige, dass der Ring $\ddot{\mathbb{U}}$ der übernatürlichen Zahlen nicht angeordnet werden kann.

(h) (*) Zeige, dass der Ring $\ddot{\mathbb{U}}\mathbb{B}$ der übernatürlichen Binärzahlen nicht angeordnet werden kann.

(*Tipp*: Zeige, dass in einem angeordneten Ring stets $0 \preceq x^2$ gilt.)

In Vorbereitung der Mathe-Olympiade sind hier einige Aufgaben aus Olympiaden vergangener Jahre (Algebra und Zahlentheorie).

1.