

Aufgaben-Blatt 7

vom 12. März bis 16. April 2015

1. Nochmal Sinus und Cosinus

Im Zirkel hatten wir nach Funktionen gesucht, die einige oder alle der folgenden Eigenschaften der Sinusfunktion besitzen (aus: Ilse/Lehmann/Schulz: *Gruppoiden und Funktionalgleichungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984):

6.1. Aus den Theorien einiger elementarer Funktionen

Im Mathematik-Lehrbuch der Klasse 12 ([114], S. 94ff.) werden zur Wiederholung folgende Eigenschaften der Sinusfunktion zusammengestellt:

- a) Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$.
- b) Wertevorrat: $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- c) Die Funktion ist periodisch mit der kleinsten Periode 2π .
- d) Monotonieintervalle sind: $\left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]$ (monoton wachsend) und $\left[\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$ (monoton fallend) für alle $k \in \mathbb{Z}$.
- e) Die Funktion ist ungerade.
- f) Die Funktion hat die Nullstellen $k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
- g) Die Funktion hat keine Pole.

Finde zwei von Sinus und Cosinus verschiedene Funktionen $s(x)$ und $c(x)$, sodass $s(x)$ die genannten Eigenschaften der Sinusfunktion hat, $c(x)$ die entsprechenden Eigenschaften der Cosinusfunktion und zudem für $s(x)$ und $c(x)$ der trigonometrische Pythagoras gilt, d. h. $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wer findet sogar zwei solche Funktionen $s(x)$ und $c(x)$ so, dass beide in jedem Punkt unendlich oft differenzierbar sind?

2. Funktionalgleichung I

Finde alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$.

3. Funktionalgleichung II

Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.

4. Funktionalgleichung III

Gesucht sind alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.

- (a) Zeige, dass jede solche Funktion $f(x^2) = x^2 f(x)$ erfüllt.
- (b) Finde alle gesuchten Funktionen und begründe, dass es die einzigen sind.