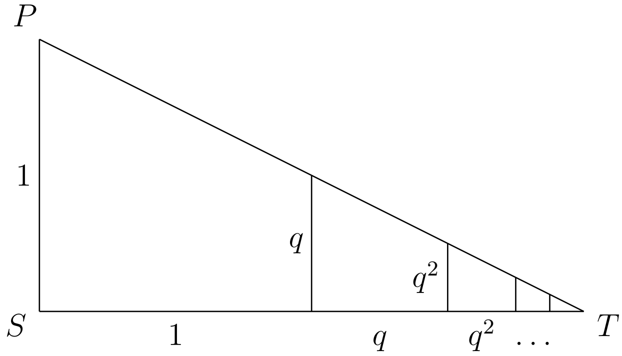
Aufgaben-Blatt 8

vom 21. bis 28. Mai 2015

1. **Geometrische Reihe geometrisch**

   Begründe, warum in der abgebildeten Figur wirklich alles so „zusammenpasst“, wie es erscheint.
   Verifiziere mit ihrer Hilfe die bekannte Formel für die geometrische Reihe mit rein geometrischen Argumenten ohne zu rechnen.



2. **Geometric Subsequences**

   Can you select from $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ an infinite geometric sequence with sum $\frac{1}{5}$? Or with sum $\frac{1}{7}$?

3. **Formel gesucht**

   Es sei $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n} a_n$ für $n \geq 1$.

   Finde eine explizite Bildungsvorschrift für (a_n) und berechne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. **Double-Series**

   Is there a sequence $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ such that both $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ are convergent?

5. **Quotientenkriterium**

   Ein einfaches Kriterium zur Beurteilung der Konvergenz oder Divergenz einer Reihe lautet wie folgt: Es sei (a_n) $(n \in \mathbb{N})$ eine Zahlenfolge.

   (a) Wenn eine reelle Zahl q existiert, für die $0 < q < 1$ gilt und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   (b) Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

   Beweise das Quotientenkriterium (*Tipp*: finde eine konvergente Majorante bzw. eine divergente Minorante) und zeige, dass das Kriterium hinreichend, aber nicht notwendig ist, d. h. finde eine konvergente Reihe, die die Voraussetzung in (a) nicht erfüllt, sowie eine divergente Reihe, die die Voraussetzung in (b) nicht erfüllt.

   (*Hinweis*: Ein ähnliches Kriterium ist das *Wurzelkriterium*. Wer mag, kann danach suchen oder versuchen, es ohne Hilfe selbst zu formulieren. Die Idee und der Beweis sind sehr ähnlich zum Quotientenkriterium.)