

Numerische Integrationsverfahren

Schwerpunkt:Quasi-Monte Carlo Methoden

Teilnehmer:

Simon Mathern	Andreas-Oberschule, Berlin
Kevin Song	Herder-Oberschule, Berlin
Konstantin Lion	Herder-Oberschule, Berlin
Juliane Ritter	Herder-Oberschule, Berlin
Viet-Thuong Tran	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Thanh Le Huu	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Jonas Peschel	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Frank Feudel	Humboldt-Universität zu Berlin
--------------	--------------------------------

Bereits in der Antike versuchten die Menschen den Flächeninhalt/das Volumen krummlinig begrenzter Flächen/Körper zu berechnen, jedoch blieben die Möglichkeiten auf sehr spezielle Objekte beschränkt. Mit der Integralrechnung wurde ein Kalkül entwickelt, mit welchem es theoretisch möglich ist, Inhalte/Volumina beliebiger Flächen/Körper zu berechnen. Oft sind die auftretenden Integrale jedoch nicht exakt berechenbar, sodass numerische Verfahren angewendet werden müssen.

Da die klassischen Verfahren (Approximation durch Rechtecke, Trapeze etc.) in höheren Dimensionen sehr rechenaufwendig sind, wurde mit Hilfe der Stochastik eine weitere Verfahrensklasse entwickelt, die sogenannten Monte Carlo Methoden. Die Ergebnisse sind jedoch zufällig. Aufbauend auf diesen Methoden entwickelten die Mathematiker mit dem Ziel, den Zufall zu eliminieren, schließlich die Quasi-Monte Carlo Methoden.

Ziel der Arbeit in der Gruppe soll ein erster Einblick in diese mathematisch sehr interessante Verfahrensklasse sein. Dabei werden wir sehen, dass hier viele mathematische Teilgebiete zusammenwirken, die zum Teil auf den ersten Blick wenig miteinander zu tun haben, wie z.B. Zahlentheorie und Stochastik. Wir werden sowohl theoretische Aspekte (Grundideen, Entwicklung konkreter Methoden, Fehlerabschätzungen) als auch praktische Aspekte, wie die Umsetzung auf dem Computer betrachten. Je nach Interesse der Teilnehmer können unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden. Am Ende des Kurses soll noch ein kurzer Einblick in die höher dimensionale numerische Integration mit Quasi-Monte Carlo Methoden und zugehörige, teilweise aktuelle, Fragestellungen erfolgen.

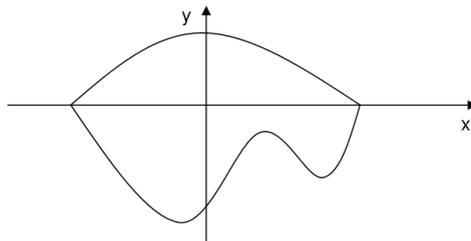
1 Problemstellung

Bei der Berechnung von Integralen können unter anderem folgende zwei Probleme auftreten. So lassen sich manche Integrale nicht berechnen, da sich keine elementare Stammfunktionen finden lässt. Ein Beispiel hierfür ist das folgende Integral:

$$\int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Diese Funktion ist integrierbar, da sie stetig ist. Es lässt sich jedoch keine Formel finden, mit der eine Stammfunktion beschrieben werden kann.

Ein weiteres Problem tritt bei der Flächenberechnung auf. Bei sehr unregelmäßigen Flächen lassen sich diese in ein Koordinatensystem legen und die Ränder lassen sich durch Funktionsgleichungen bestimmen. Jedoch kann es bei sehr komplizierten Flächen schwer sein eine passende Funktionsgleichung zu finden.



Beide Probleme lassen sich durch eine geeignete Approximation lösen. In dieser Arbeit werden wir verschiedene Approximationsverfahren vorstellen, deren Vor- und Nachteile erklären und diese schließlich am Computer umsetzen.

2 Approximation durch Trapeze

Eines der klassischen Verfahren zur Approximation von Integralen ist die Zerlegung der Fläche unter dem Funktionsgraphen in Trapeze.

Über die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes $A = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot h$ kann die Formel zur Annäherung des Integrals hergeleitet werden. Für den Flächeninhalt unter einem Integral im Intervall $[0;1]$ gilt:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \cdot \left(f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right)$$

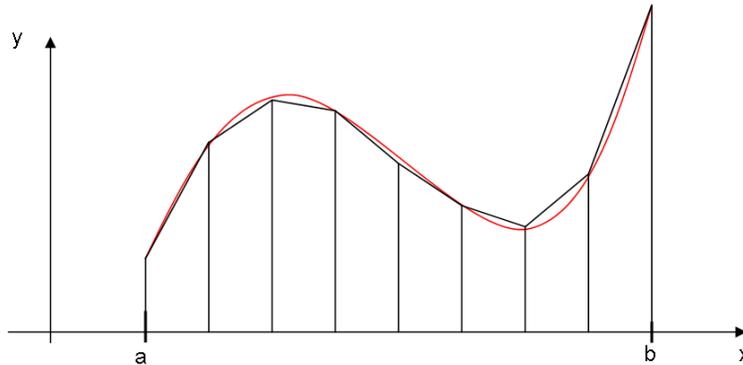


Abbildung 1: Approximation durch das Trapezverfahren

Für das allgemeine Intervall $[a; b]$ gilt folgende allgemeine Formel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f\left(a + (b-a) \cdot \frac{i}{n}\right) + f\left(a + (b-a) \cdot \frac{i+1}{n}\right) \right)$$

Dabei nähert sich die Approximation bei einer größeren Anzahl an Teiltrapezen für $n \rightarrow \infty$ immer stärker dem Riemann-Integral an. Dies kann über die Definition des Riemann-Integrals bewiesen werden.

2.1 Fehlerabschätzung

Bei den entstehenden Fehler ist es wichtig zu wissen, von welchen Parametern die Größe des Fehlers abhängt. Die Größe des Fehlers kann durch folgenden Satz abgeschätzt werden:

Satz: Sei $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf $[a; b]$. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{b-a}{12} \cdot \max_{x \in [a; b]} \{|f''(x)|\} h^2$$

wobei $T_n(f)$ die Trapezsumme bei der Verwendung von n Trapezen und h die Streifenbreite ist. (Hier: $h = \frac{b-a}{n}$)

Offensichtlich hängt der Fehler von zwei Größen ab. Einerseits wird er besonders klein, wenn die maximale Streifenbreite klein wird. Er ist aber auch von $f''(x)$ abhängig. Dies bedeutet, dass ein starkes Krümmungsverhalten der Funktion zu einem großen Fehler führen kann, da dann $\max_{x \in [a; b]} \{|f''(x)|\}$ sehr groß ist.

2.2 Vor- und Nachteile des Verfahrens

Wichtig bei Approximationsverfahren ist deren Rechenaufwand in einem Computerprogramm. Insbesondere kann im Gegensatz zur Approximation durch Rechtecke das Trapezverfahren sehr effizient implementiert werden, da man bereits berechnete Funktionswerte für eine genauere Zerteilung wiederverwenden kann, indem man aus einem Trapez zwei neue Trapeze generiert. Beim Rechteckverfahren müssten beide Funktionswerte neu berechnet werden. Zwar konvergiert das Rechteckverfahren bei gleicher Zerteilung etwas schneller als das Trapezverfahren, der Rechenaufwand ist jedoch deutlich höher.

Ein Nachteil am Trapezverfahren besteht in dessen Aufwand in höheren Dimensionen. Da bei n Trapezen und k Dimensionen sich der Aufwand mit n^k steigert, wird der Aufwand schon bei Dimension 4 recht groß. Schon bei einer Zerteilung in 10 Trapeze würde hier ein Aufwand von 10.000 zu berechnenden Trapezseiten entstehen. Hier benötigt man neue, effizientere Verfahren.

3 Monte-Carlo Methode

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Fläche ist die Monte-Carlo Methode. Wir nehmen eine Fläche bekannter Größe, die unsere gesuchte Fläche vollständig einschließt. Wir nehmen in diesem Fall ein Rechteck mit den Eckpunkten:

$P_1(a; c)$; $P_2(b; c)$; $P_3(b; d)$; $P_4(a; d)$ mit $a < b$ und $c < d$

Nun lassen wir Zufallspunkte auf das Rechteck fallen und erhalten eine Anzahl an Treffern auf der gesuchten Fläche bei n Würfeln. Die relative Häufigkeit der Treffer, sollte bei großen n eine Näherung für das Verhältnis der beiden Flächen sein.

$$P(\text{Treffer}) \approx \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)(d-c)} \quad (3.1)$$

Mit längerer intuitiver Rechnung erhält man andererseits:

$$P(\text{Treffer}) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{d-c}, \quad (3.2)$$

mit x_i zufällig gleichverteilt.

Aus 1) und 2) kann man folgern:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

mit x_i gleichverteilt.

Anschaulich kann man sich das wie folgt vorstellen: $b-a$ ist hier die Intervallbreite. $f(x_i)$ hingegen ist der i -te Funktionswert, den wir durch den Zufall bekommen haben. Da wir alle Werte gleich gewichten wollen, bilden wir deren arithmetisches Mittel.

4 Grundidee der Quasi-Monte Carlo Methoden

Nun haben wir aber das Problem, dass das Ergebnis zufällig ist, da sich die Punkte auch häufen können.

Es kommt nun die Idee auf, deterministische Folgen zu wählen, die eine Gleichverteilung im Intervall bilden. Es genügt das Intervall $[0; 1]$ zu betrachten, da man mit der Substitutionsregel das Integral über einem beliebigen Intervall darauf zurückführen kann. Intuitiv sind Punkte auf $[0; 1[$ gut verteilt (man kann die 1 weglassen, da die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Punkt zu wählen gleich 0 ist), wenn das Verhältnis der Punkte eines Intervalls und der Gesamtanzahl der Punkte die Länge des Intervalls gut wiedergibt.

Diese Anschauung führt zu der folgenden Definition:

Definition.: Eine Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ in $[0; 1[$ heißt gleichverteilt modulo 1, wenn für alle $0 \leq a < b \leq 1$ gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in \mathbb{N}_0 : i < n; x_i \in [a; b]\}}{n} = b - a$$

Mit dieser Definition kann man die Konvergenz der Quasi-Monte-Carlo Methode für gleichverteilte Folgen beweisen, denn es gilt folgender Satz:

Satz. Eine Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ ist genau dann gleichverteilt modulo 1, wenn für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \int_0^1 f(x)dx$$

5 Fehlerabschätzung bei Quasi-Monte Carlo

Die Berechnung des Integrals ist nicht exakt. Um den entstehenden Fehler zu beschreiben, verwendet man die **Koksma-Hlawka Ungleichung**:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right| \leq D_n^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \cdot V_0^1(f)$$

Der eine Faktor ist die Totalvariation, welche abhängig von f ist und unabhängig von der Folge. Der andere Faktor ist die Sterndiskrepanz, die nur abhängig von der Folge ist.

5.1 Variation

Die Variation ist ein Maß für die Schwankung einer Funktion.

Sei f eine reellwertige Funktion, die auf dem kompakten Intervall $I = [a; b]$ definiert ist, und Z eine beliebige Zerlegung von I mit $Z = (t_0, \dots, t_n)$. Die Variation von f bezüglich Z ist wie folgt definiert:

$$\text{var}(Z; f) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

Die Totalvariation der Funktion f auf dem Intervall I ist definiert als das Supremum der Variationen für alle beliebigen Zerlegungen Z :

$$V_a^b(f) := \sup_Z (\text{var}(Z; f))$$

Bei Betrachtung der Koksma-Hlawka Ungleichung fällt auf, dass die Anwendung dieser zur Fehlerabschätzung nur sinnvoll ist, wenn eine Funktion f von beschränkter Variation vorliegt.

Alle stetig differenzierbaren Funktionen sind von beschränkter Variation, da gilt:

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$$

Montone, sowie lipschitzstetige Funktionen sind ebenfalls von beschränkter Variation. Ein anschauliches Beispiel für eine Funktion unbeschränkter Variation ist:

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

5.2 Diskrepanz

Die Diskrepanz bezeichnet ein quantitatives Maß für die Abweichung einer endlichen Punktmenge von der Gleichverteilung. Die Diskrepanz einer endlichen Punktmenge $P = (x_0, \dots, x_{n-1})$ in $[0; 1[$ ist definiert als:

$$D_n(P) := \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{A([a; b[, n)}{n} - (b - a) \right|$$

Analog zum Punktwurfexperiment, jedoch auf die erste Dimension übertragen, lässt sich die obige Definition als Differenz aus der relativen Häufigkeit der Treffer und der Wahrscheinlichkeit in einem beliebigen Teilintervall $[a; b[$ aus dem Intervall $[0; 1[$ zu landen, auffassen.

Berücksichtigt man nur Intervalle mit 0 als linker Grenze, erhält man die Stern-Diskrepanz.

$$D_n^*(P) := \sup_{0 < a < 1} \left| \frac{A([0; a[, n)}{n} - a \right|$$

Offensichtlich ist die Stern-Diskrepanz D_n^* kleiner oder gleich der Diskrepanz, da weniger Intervalle berücksichtigt werden. Daher wird der Fehler in der Koksma-Hlawka Ungleichung schärfer eingegrenzt. Allgemein gilt die Beziehung:

$$D_n^*(P) \leq D_n(P) \leq 2D_n^*(P)$$

Die Diskrepanz einer endlichen Punktmenge P in $[0; 1[$ ist folgendermaßen beschränkt:

$$\frac{1}{n} \leq D_n(P) \leq 1$$

Offenbar wird die Diskrepanz von n Punkten nicht beliebig klein.

Mit Hilfe der Definitionen von (Stern-)Diskrepanz und Gleichverteilung gelangt man zum **Hauptsatz der Gleichverteilung**.

Hauptsatz der Gleichverteilung. Sei (x_n) eine Folge in $[0; 1[$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. (x_n) ist gleichverteilt
2. $D_n^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
3. $D_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ziel ist es nun, Folgen mit möglichst kleiner Diskrepanz zu finden.

Definition: Eine Folge (\vec{x}_n) aus $[0; 1]^s$ heißt **Folge geringer Diskrepanz** falls für alle n ab einem n_0 gilt:

$$D_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq C \cdot \frac{(\ln(n))^s}{n}$$

Dies ist dann offensichtlich auch die Konvergenzrate der Quasi-Monte Carlo Methode.

6 Die Van-der-Corput-Folge

Anders als die Intuition vermuten lassen würde, ist das gleichmäßige Gitter keine Folge geringer Diskrepanz. Es weist keine guten Gleichverteilungseigenschaften auf. Es gilt genauer gesagt folgender Satz:

Satz: (Diskrepanz des gleichmäßigen Gitters). Sei $s \geq 1$ und sei m eine natürliche Zahl. Dann gilt für das gleichmäßige Gitter der Dimension s mit $n = m^s$ Punkten:

$$\left\{ \left(\frac{2n_1 + 1}{m}, \frac{2n_2 + 1}{m}, \dots, \frac{2n_s + 1}{m} \right) : 0 \leq n_i < m, 1 \leq i \leq s \right\}$$

folgende Diskrepanzabschätzung:

$$\frac{1}{2^s \sqrt{s} n} \leq D_n^* \leq 2^{s+1} \frac{1}{\sqrt{s} n}$$

Eine weitaus geeignetere Folge ist die Halton-Folge, die für die Dimension auch Van-der-Corput Folge heißt. Die Grundidee der Van-der-Corput Folge ist die fortlaufende Halbierung des Intervalls $[0; 1[$ und das Auffüllen der Lücken, wobei jeweils so zwischen oberer und unterer Hälfte gewechselt wird, dass eine möglichst gleichmäßige Verteilung entsteht. Die ersten Folgenglieder sind:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{11}{16}, \frac{5}{16}, \frac{13}{16}, \frac{7}{16}, \frac{11}{16}, \dots$$

Bei genauerem Hinschauen lässt sich hier folgender Zusammenhang erkennen:

$$n = n_0 + n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 2^2 + \dots + n_r \cdot 2^r \Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^r \frac{n_k}{2^{k+1}}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich als explizite Bildungsvorschrift verwenden. An Stelle der Halbierung kann man auch mit der Intervalldrittteilung starten und erhält nach obiger Konstruktion eine analoge Folge, bei der für die Bildung von a_n die Entwicklung von n in Dreierpotenzen herangezogen wird. Allgemein erhält man für eine Basis $b \geq 2$ folgende Vorschrift:

$$n = n_0 + n_1 \cdot b + n_2 \cdot b^2 + \dots + n_r \cdot b^r \Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^r \frac{n_k}{b^{k+1}}$$

Beim Übergang in mehrere Dimensionen geht man komponentenweise vor, indem man für verschiedene Komponenten verschiedene Van-der-Corput Folgen wählt. Hierbei muss man jedoch aufpassen. Eine gute Gleichverteilung wird nur erreicht, wenn die Basen der jeweiligen Komponenten prim zueinander sind.

Für die Diskrepanz dieser Folge gilt dann folgender Satz:

Satz: (Diskrepanz der Van-der-Corput Folge/Halton Folge). Sei $s \geq 1$ und seien b_1, b_2, \dots, b_s Basen, die paarweise teilerfremd sind. Dann gilt für die Stern-Diskrepanz D_n^* der ersten n Glieder der Halton Folge in den Basen b_1, \dots, b_s :

$$D_n^* \leq \left(\prod_i = 1^s \frac{b_i \ln(b_i n)}{\ln b_i} \right) \frac{1}{n} \leq c_s \frac{(\ln n)^s}{n} \quad \text{für } n \geq \max_{1 \leq i \leq s} b_i$$

Also ist die Halton Folge bzw. die Van-der-Corput Folge für Dimension 1 eine Folge geringer Diskrepanz.

7 Umsetzung der Verfahren auf dem Computer

7.1 Vergleich der einzelnen Verfahren

Rechteckverfahren: Im Folgenden ist n die Anzahl der Rechtecke deren Einteilung die Folge $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ liefert.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) \right)$$

Trapezverfahren: Im Folgenden ist n die Anzahl der Trapeze deren Einteilung die Folge x_k mit derselben Bildungsvorschrift aus dem Rechteckverfahren liefert.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \right)$$

Monte-Carlo-Methode: Im Folgenden werden n Zufallszahlen x_k aus dem Intervall $[a, b]$ gewählt.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Quasi-Monte-Carlo-Methode: Im Folgenden ist n die Anzahl der Folgenglieder der Van der Corput Folge x_k

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Für das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ wurde mit 50 gleichbreiten Streifen bzw. 50 Werten eine Näherung nach den jeweiligen Methoden errechnet.

	Rechteckverfahren	Trapezverfahren	Monte-Carlo-methode	Quasi-Monte-Carlo-methode
Werte	0.3333	0.3334	0.2796	0.3129

Wie man nun leicht erkennt, liefert das Rechteckverfahren die genaueste Annäherung an den tatsächlichen Wert $\frac{1}{3}$, während das Trapezverfahren eine etwas größere Abweichung liefert. Die Monte-Carlo-Methode ist mit Abstand die größte Annäherung, jedoch ist sie zufallsbedingt. Dahingegen liefert die Quasi-Monte-Carlo-Methode im Vergleich zum Rechteckverfahren einen ungenauen Wert. Dieser Nachteil wird allerdings durch eine bessere Konvergenzrate im Vergleich zum Trapezverfahren in höheren Dimensionen aufgehoben.

7.2 Vergleich der Basen

Die nachfolgende Tabelle stellt die Ergebnisse der Quasi-Monte-Carlo-Methode zur Approximation des Integrals $\int_0^1 x^2 dx$ für verschiedene Basen b und Anzahlen n von Folgengliedern dar.

b \ n	10	100	1000	10000	100000
2	0,2605	0,3248	0,3324	0,3332	0,3333
4	0,2833	0,3216	0,3321	0,3332	0,3333
8	0,2612	0,3124	0,3317	0,3330	0,3333
16	0,1837	0,3029	0,3300	0,3330	0,3333
32	0,0710	0,3071	0,3303	0,3323	0,3333
64	0,0427	0,2484	0,3199	0,3320	0,3331
128	0,0357	0,2069	0,3188	0,3313	0,3331
256	0,0339	0,0520	0,3185	0,3312	0,3327

Man erkennt nun, dass bei zu großer Basis die Folgenglieder zu dicht sind und das Intervall $[0, 1]$ mit der geringen Anzahl von Folgengliedern nicht ideal ausgefüllt wird. Jedoch wird der Fehler bei einer großen Anzahl von Folgengliedern geringer.

7.3 Pseudocode für Quasi-Monte Carlo mit der Van-der-Corput-Folge

Es folgt ein Pseudoquellcode für die Quasi-Monte-Carlo-Methode mit Hilfe der Van der Corput Folge zu einer vom Benutzer gewählten Basis:

```
//Folgendes berechnet die Summe von 1 bis von f(phi) mal (b-a)/n
//als Approximation zum Integral von f(x) über dem Intervall [a,b],
//wobei phi(b,n) das n-te Folgenglied der Van der Corput Folge
//zur Basis b liefert
int basis;
for (int i = 1; i < n + 1; i++){
    integral += funktion((phi(basis, i) ) * (b - a) + a);
}
integral = integral * (b - a) / n;

//Bildung des n-ten Folgengliedes der Van der Corput Folge zur Basis b
phi(int basis, int n){
    List koeffizienten;
    //Transformation von n in ein Zahlensystem zur Basis "basis"
    while (n!=0){ //Ermittlung der Koeffizienten
        int exponent = n % basis; //exponent = Rest von n/basis
        koeffizienten.Add(exponent); //fügt Exponent zur Liste hinzu
        n = Math.Floor(n / basis); //n = n/basis abgerundet
    }
    double phi_n = 0;
    for (int i = 0; i < koeffizienten.Count; i++){ // Berechnung von phi_n
        phi_n += koeffizienten[i] / Math.Pow(basis, i+1);
        //phi_n = phi_n+ i-te Koeffizient/basis^(i+1)
    }
    return phi_n;
}
```

Beispiel zur Ermittlung von $\phi_3(101)$:

$$101/3 = 33 + R_2$$

$$33/3 = 11 + R_0$$

$$11/3 = 3 + R_2$$

$$3/3 = 1 + R_0$$

$$1/3 = 0 + R_1$$

Also ist 2 der Koeffizient von 3^0

Also ist 0 der Koeffizient von 3^1

Also ist 2 der Koeffizient von 3^2

Also ist 0 der Koeffizient von 3^3

Also ist 1 der Koeffizient von 3^4

Literatur

- [1] Friedrich Pillichshammer, Zahlentheoretische Methoden in der Numerik, Vorlesungsskript, Johannes Kepler Universität Linz, 2010
- [2] Friedrich Pillichshammer, Eine Einführung in die Zahlentheorie, Vorlesungsskript, Johannes Kepler Universität Linz, 2010
- [3] Martin Hanke-Bourgeois, Grundlagen der numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Teubner-Verlag, 2.Auflage 2006
- [4] Wolfgang Walter, Analysis 2, Springer-Verlag, 5.Auflage 2002