

# Nichteuklidische Geometrie

## *Teilnehmer:*

Phuong Anh Le	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Viet Son Pham	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Tillman Ritschl	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Marian Stengl	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Max Streese	Andreas-Oberschule, Berlin
Chi Trung Vo	Andreas-Oberschule, Berlin

## *Gruppenleiter:*

Andreas Filler	Humboldt-Universität zu Berlin
----------------	--------------------------------

Die Geometrie, wie wir sie in der Schule kennengelernt haben, entspricht im Wesentlichen unserem anschaulichen Verständnis. Sie beruht auf fünf grundlegenden Axiomen, welche von uns meist intuitiv vorausgesetzt werden. Besondere Bedeutung kommt hierbei dem sogenannten Parallelenaxiom zu, welches lautet:

*Zu jeder Geraden  $g$  und jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $A$  gibt es höchstens eine Gerade, die durch  $A$  verläuft und zu  $g$  parallel ist.*

Über 2000 Jahre lang versuchten unzählige Mathematiker, dieses Axiom aus den anderen zu beweisen, womit es überflüssig wäre. Erst im 19. Jahrhundert kamen drei von ihnen unabhängig voneinander zu der Erkenntnis, dass das Parallelenaxiom eine eigenständige Bedeutung hat. Daraus folgt, dass ohne dieses Axiom noch weitere Modelle der Geometrie existieren müssen. Wir haben uns während der Sommerschule mit der nichteuklidischen Geometrie beschäftigt und befassten uns dabei vor allem mit der Poincaré-Halbebene. Im Folgenden werden Sie in den Genuss unserer vielfältigen Ergebnisse kommen. Wir wünschen viel Spaß bei der Lektüre.

# 1 Axiomatik und euklidische Geometrie

Die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie erstreckt sich über mehr als 2000 Jahre. Sie beginnt mit der Diskussion um die „Elemente“ Euklids, welcher ca. 325 v. Chr. fünf Definitionen zu den Grundbegriffen Punkt, Linie und Ebene, fünf Axiome zu deren Zusammenhängen und fünf Postulate aufstellte.

Unter Axiomen versteht man unbewiesene Grundaussagen, die als Anfang einer Theorie festgelegt werden. Sie sind das Fundament der Geometrie und haben viele Resultate zur Folge. Um Fehlschlüsse auszuschließen, musste man möglichst alle Aussagen der Geometrie beweisen, aber ohne festgelegte Grundaussagen können keine Beweise geführt werden. Diese festgelegten Grundaussagen sind bei Euklid die Axiome und die Postulate, später fasste man alle Grundaussagen als Axiome zusammen. Beispielfhaft sind im Folgenden die Postulate von Euklid genannt.

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.
4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien.
5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Das fünfte und längste Postulat war 2000 Jahre lang umstritten, weil viele Mathematiker der Auffassung waren, dass es sich aus den anderen Axiomen und Postulaten schlussfolgern lassen müsste.

Über diesen langen Zeitraum hinweg wurden die Postulate des Euklid mehrfach umformuliert und es kamen neue Axiome hinzu. Das erste Postulat von Euklid wurde beispielsweise zu einem Inzidenaxiom:

- Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

Eines der Axiome, welche hinzu kamen, ist ein Anordnungsaxiom, welches lautet:

- Zu zwei beliebigen Punkten  $A$  und  $B$  gibt es eine nichtnegative Zahl  $d$  mit  $d = 0 \Leftrightarrow A = B$ . (Diese Zahl wird als Abstand  $|AB|$  der Punkte  $A$  und  $B$  bezeichnet.)

Zudem wurde das wichtige fünfte Postulat zum Parallelenaxiom, welches auf den ersten Blick vielleicht anders erscheint, jedoch hundertprozentig mit dem fünften Postulat übereinstimmt und lautet:

- Zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $A$  gibt es höchstens eine Gerade, die durch  $A$  verläuft und zu  $g$  parallel ist.

## 1.1 Scheinbeweise für das Parallelenaxiom

Viele Mathematiker wie Legendre und Wallis versuchten das Parallelenaxiom zu beweisen. Adrien Marie Legendre (1752-1833) beschäftigte sich Ende des 18. Jahrhunderts mit dem Zusammenhang zwischen Parallelenaxiom und der Innenwinkelsumme in Dreiecken und zeigte, dass es keine Dreiecke mit einer Innenwinkelsumme von mehr als  $180^\circ$  gibt. Zudem bewies er den folgenden Satz:

*Wenn die Innenwinkelsumme eines jeden Dreiecks gleich zwei Rechten ist, so gilt das euklidische Parallelenaxiom.*

Es gelang Legendre sogar, zu zeigen, dass bereits die Existenz *eines einzigen* Dreiecks mit einer Innenwinkelsumme von zwei Rechten ausreichen würde, um zu beweisen, dass die Innenwinkelsumme eines *jeden* Dreiecks gleich zwei Rechten ist und damit das euklidische Parallelenaxiom gilt.

John Wallis (1610-1703) versuchte ebenfalls, das Parallelenaxiom zu beweisen. Wenn er ein Dreieck finden könnte, das eine Innenwinkelsumme von  $180^\circ$  hat, so wäre das Parallelenaxiom bewiesen.

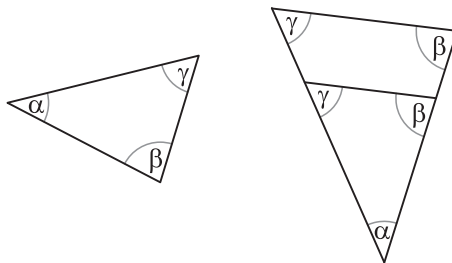


Abbildung 1: Beweisversuch von John Wallis

Wallis ging von zwei ähnlichen, nicht kongruenten Dreiecken aus, d. h. von zwei Dreiecken  $\overline{ABC}$  und  $\overline{DEF}$  mit den Innenwinkeln  $\alpha$  (bei  $A$  und  $D$ ),  $\beta$  (bei  $B$  und  $E$ ) sowie  $\gamma$  (bei  $C$  und  $F$ ). Er konstruierte dann Punkte  $E' \in AB^+$  und  $F' \in AC^+$  mit  $|DE| = |AE'|$  und  $|DF| = |AF'|$ . Damit entsteht ein Viereck (siehe Abb. 1) dessen Innenwinkelsumme vier Rechte ( $360^\circ$ ) beträgt. Zwei Teildreiecke in dem Viereck haben jeweils eine Innenwinkelsumme von zwei Rechten, denn größere Winkelsummen in Dreiecken sind durch Legendres Beweisführung ausgeschlossen. Der Trugschluss in Wallis Beweisführung besteht darin, dass er die Existenz zweier ähnlicher, nicht kongruenter Dreiecke voraussetzte. Diese ist jedoch gleichbedeutend mit dem euklidischen Parallelenaxiom.

## 1.2 Folgerungen für die nichteuklidische Geometrie

Gauß, Bolyai und Lobatschewski kamen zur gleichen Zeit unabhängig voneinander zu der Erkenntnis, dass es eine Geometrie ohne die Gültigkeit des Parallelenaxiom geben muss, weil es sich nicht beweisen lässt. Diese Geometrie beruht auf der Negation des Parallelenaxiom:

- Es existiert eine Gerade  $g$  und ein nicht auf  $g$  liegender Punkt  $P$ , durch den mindestens zwei Geraden verlaufen, die  $g$  nicht schneiden.

Aus diesem Axiom kann man zunächst folgende Aussage beweisen:

- Zu jeder Geraden  $g$  und zu jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $P$  existieren unendlich viele Geraden, die durch  $P$  verlaufen und  $g$  nicht schneiden.

Aus den Ergebnissen der vorgestellten Beweisversuche ergeben sich sofort zwei Folgerungen für die nichteuklidische Geometrie:

- Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen.
- Die Innenwinkelsumme eines jeden Dreiecks ist kleiner  $180^\circ$ .

## 2 Das Poincaré-Modell (Poincaré-Halbebene)

Man benutzt das Poincaré-Halbebene-Modell, um Objekte wie Punkte, Geraden oder Strahlen der neuen Theorie (der nichteuklidischen Geometrie) auf Bekanntes zurückzuführen. Um die Theorie von Lobatschewski zu überprüfen, können die Objekte der Lobatschewski Geometrie mit denen der euklidischen Geometrie modelliert werden. Dazu benötigen wir drei wichtige Objekte. Als erstes brauchen wir eine nichteuklidische Ebene. Wir bezeichnen diese als N-Ebene mit dem Buchstaben  $\mathbb{H}$ . Durch eine Randgerade  $u$  erhalten wir eine Halbebene. Allerdings ist  $u$  nur eine Hilfsgerade und gehört nicht zu der Halbebene, ebenso wie die Hilfspunkte  $U$ ,  $V$  und  $W$  (siehe Abbildung 2).

- Nichteuklidische Punkte (N-Punkte) sind alle euklidischen Punkte der offenen Halbebene  $\mathbb{H}$ .

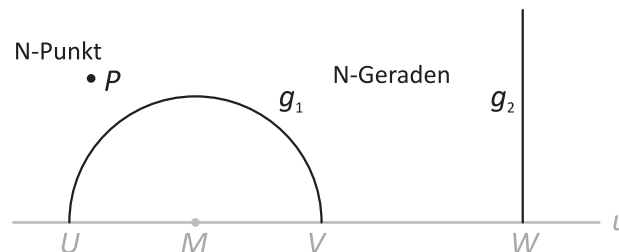


Abbildung 2: Poincaré-Halbebene

- Nichteuklidische Geraden (N-Geraden) vom Typ 1 sind offene Halbkreise, die vollständig in  $\mathbb{H}$  liegen und deren Mittelpunkte sich auf der euklidischen Geraden  $u$  befinden.
- Nichteuklidische Geraden (N-Geraden) vom Typ 2 sind euklidische Halbgeraden  $\subset \mathbb{H}$ , die senkrecht zu  $u$  sind.

## 2.1 Existenz und Eindeutigkeit von Geraden im Poincaré-Modell

Es seien zwei beliebige Punkte  $A$  und  $B$  in der Poincaré-Halbebene gegeben, deren Mittelsenkrechte die Randgerade  $u$  schneidet. So entsteht ein Scheinmittelpunkt  $M$ , an dem man ein gleichschenkeliges Dreieck erkennen kann. Daraus folgt, dass die Strecken  $MA$  und  $MB$  gleich lang sind. Nun kann man einen Halbkreis durch  $A$  und  $B$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $MA$  bzw.  $MB$  konstruieren. Somit existiert durch  $A$  und  $B$  eine N-Gerade vom Typ 1 und ist eindeutig bestimmt.

Um eine N-Gerade Typ 2 zu konstruieren, darf die Mittelsenkrechte zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  die Randgerade  $u$  nicht schneiden. Eine N-Gerade vom Typ 1 existiert dann nicht, stattdessen entsteht eine N-Gerade vom Typ 2, die senkrecht zur Randgeraden  $u$  ist.

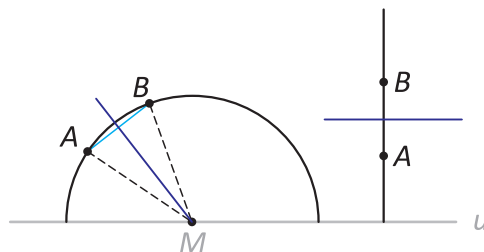


Abbildung 3: Konstruktion von Geraden durch zwei Punkte im Poincaré-Modell

Damit ist die Gültigkeit des folgenden Inzidenzaxioms bestätigt: *Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.*

## 2.2 Abstände von Punkten im Poincaré-Modell

Der Abstandsbegriff der euklidischen Geometrie ist nicht auf die Poincaré-Halbebene übertragbar. Bei N-Geraden des Typs 2 läge diese Methode recht nahe, ebenso bei N-Geraden des Typs 1 die Berechnung der Längen von Kreisbögen. Allerdings ist dies durch ein Axiom der absoluten Geometrie nicht möglich, denn dieses erfordert, dass auf jedem Strahl Punkte beliebig großen Abstands existieren. Daraus ergibt sich, dass ein neuer Begriff definiert werden muss, den wir als Doppelverhältnis bezeichnen:

**Definition:** Es seien  $A', B', U$  und  $V$  vier Punkte auf der Randgeraden  $u$  und es sei auf  $u$  eine Richtung ausgezeichnet. Als *Doppelverhältnis* der oben genannten Punkte bezeichnen wir den Quotienten

$$(A', B'; U; V) := \frac{|A'U|}{|B'U|} : \frac{|A'V|}{|B'V|}.$$

Dieser Quotient besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Es gilt  $(A', B', U, V) > 0$  für alle uneigentlichen Punkte  $A', B', U, V$ .
- $(A', B', U, V) = \frac{1}{(B', A', U, V)}$
- $(A', X, U, V) = (A', B', U, V) \cdot (B', X, U, V)$

Mithilfe dieser Eigenschaften können wir den nichteuklidischen Abstand definieren:

**Definition:** Es seien  $A$  und  $B$  zwei N-Punkte auf einer N-Geraden des Typs 1 mit den uneigentlichen Punkten  $U$  und  $V$ . Die Lotfußpunkte von  $A$  und  $B$  auf  $u$  seien  $A'$  und  $B'$ .  $C$  und  $D$  seien Punkte der N-Geraden des Typs 2 mit dem uneigentlichen Punkt  $W$ . Als Abstände der Punkte  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  definiert man:

$$|AB|_N := \frac{1}{2} \cdot |\ln (A', B', U, V)| \quad \text{sowie} \quad |CD|_N := \left| \ln \frac{|DW|}{|CW|} \right|.$$

Die Einführung des Logarithmus ist notwendig, damit die Additivität des Abstandes zweier Punkte auf einer N-Geraden gewährleistet ist. Das heißt, dass für drei Punkte  $A, B$  und  $C$  auf der beschriebenen N-Geraden die Gleichung  $|AB|_N + |BC|_N = |AC|_N$  erfüllt wird. (Wir verzichten aus Platzgründen auf den Beweis.) Der Faktor  $\frac{1}{2}$  gewährleistet die Abstandstreue bestimmter Abbildungen (der hinten beschriebenen Inversionen, die N-Geraden unterschiedlicher Typen aufeinander abbilden).

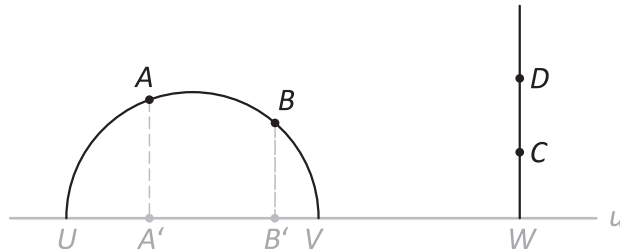


Abbildung 4: Abstände im Poincaré-Modell

### 3 Nichteuklidische Kongruenzabbildungen im Halbebenenmodell

Genauso wie in der euklidischen Geometrie gibt es in der nichteuklidischen Geometrie Kongruenzabbildungen, also Abbildungen, die die Halbebene  $\mathbb{H}$  in sich selbst abbilden und dabei nichteuklidische Abstände konstant lassen.

Zu den Kongruenzabbildungen im Poincaré-Halbebenenmodell zählen unter anderem folgende Abbildungen:

- euklidische Verschiebungen entlang der Randgeraden,
- euklidische Spiegelungen an N-Geraden vom Typ 2,
- zentrische Streckungen mit einem positiven Streckungsfaktor und einem Streckungszentrum auf der Randgeraden.

#### 3.1 Inversion am Kreis

Betrachtet man die soeben aufgezählten Kongruenzabbildungen, so fällt auf, dass bei diesen nur N-Geraden gleichen Typs aufeinander abgebildet werden. Um aber die Axiome der Lobatschewski-Geometrie zu erfüllen, muss es auch möglich sein, beliebige N-Geraden aufeinander abzubilden. Um dies zu ermöglichen, wird die Inversion am Kreis verwendet.

**Definition:** Es sei in einer (euklidischen) Ebene ein Kreis  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$  gegeben. Die Abbildung, die jedem Punkt  $A$  der Ebene einen Bildpunkt  $A'$  mit  $A' \in AM$  und

$$|MA| \cdot |MA'| = r^2$$

zuordnet, wird als *Inversion am Kreis  $K$*  bezeichnet. Der Punkt  $M$  heißt *Inversionspol* und der Radius  $r$  *Inversionsradius* dieser Inversion.

Anhand dieser Definition kann man folgende interessante Eigenschaften ableiten:

Bei einer beliebigen Inversion mit einem Inversionspol  $M$  werden

1. Geraden, die durch  $M$  verlaufen, auf sich selbst abgebildet;
2. Geraden, die nicht durch  $M$  verlaufen auf Kreise, die durch  $M$  verlaufen abgebildet, siehe Abbildung 5 a;
3. Kreise, die durch  $M$  verlaufen auf Geraden, die nicht durch  $M$  verlaufen abgebildet;
4. Kreise die nicht durch  $M$  verlaufen auf Kreise die nicht durch  $M$  verlaufen abgebildet, siehe Abbildung 5 b.

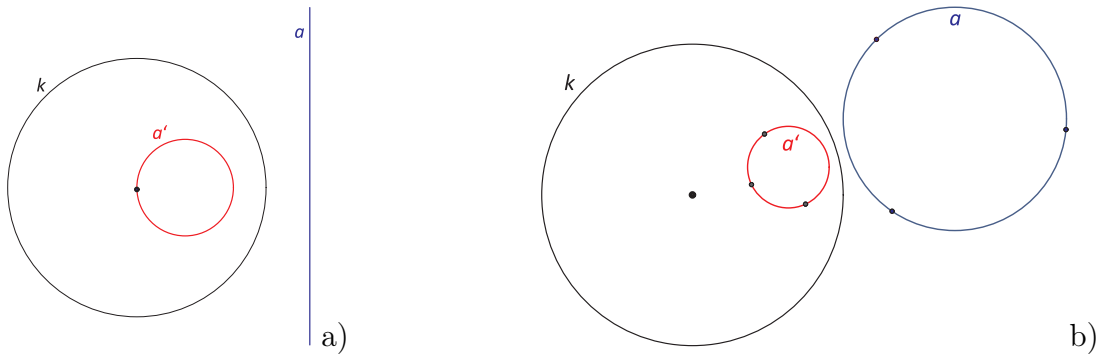


Abbildung 5: Abbildungen von Geraden und Kreisen bei Inversionen

Betrachtet man nun Inversionen mit Inversionspolen auf der Randgeraden, so kann man unmittelbar folgern, dass beim Invertieren  $N$ -Geraden auf  $N$ -Geraden abgebildet werden. Damit gelangt man zu folgendem

**Satz:** *Inversionen, deren Inversionspol auf der Randgeraden liegt, sind nichteuclidische Kongruenzabbildungen im Poincaré-Modell.*

Durch Hintereinanderausführungen aller genannten Abbildungen (Inversionen allein reichen auch, sind aber komplizierter) kann man jede beliebige Kongruenzabbildung der Poincaréschen Halbebene erzeugen.

## 4 Ein alternatives Modell der Lobatschewski-Geometrie

### 4.1 Die Möbiustransformation

Nachdem wir uns nun mit Kongruenzabbildungen beschäftigt haben, gehen wir noch auf die sogenannten Möbiustransformationen ein. Dazu betrachten wir die Punkte der Poincaréschen-Halbebene als komplexe Zahlen  $z$ , wobei  $\text{Im}(z) > 0$  gilt.

Eine Funktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

für alle  $z \in \mathbb{H}$  und  $a; b; c; d \in \mathbb{R}$  mit  $ad > bc$  heißt Möbiustransformation. Die Voraussetzung  $ad > bc$  garantiert dabei, dass  $\mathbb{H}$  in sich abgebildet wird.

Die Möbiustransformationen selbst beschreiben eine große Klasse von Kongruenzabbildungen (einzig Kreisspiegelungen/Inversionen sind nicht durchführbar) und bilden strukturerhaltend (isomorph) ab.



Wir betrachten nun die Poincarésche Ebene  $\mathbb{H}$  unter der speziellen Transformation

$$f(z) := \frac{z-i}{z+i}.$$

Diese ist im Wesentlichen eine Möbiustransformation, nur  $ad > bc$  ist nicht mehr gegeben ( $c$  und  $d$  sind komplex), wodurch  $\mathbb{H}$  nicht in sich abgebildet wird. Außerdem ist  $\varphi$  bijektiv mit:

$$f^{-1}(z) = -i \cdot \frac{z+1}{z-1}.$$

Es gilt nämlich:

$$f^{-1}(f(z)) = -i \cdot \frac{\frac{z-i}{z+i} + 1}{\frac{z-i}{z+i} - 1} = -i \cdot \frac{z-i+z+i}{z-i-z-i} = -i \cdot \frac{2z}{-2i} = z.$$

**Satz:** Die Abbildung  $f$  mit  $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$  bildet die Poincaré-Halbebene  $\mathbb{H}$  auf die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{P}$  ab.

**Beweis:** Die Mengen sind wie folgt gegeben:

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$
- $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Wir setzen  $z := x + yi$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$  und  $y \in \mathbb{R}^+$ .

1. Teilbeweis:  $f(z) \in \mathbb{P}$  für  $z \in \mathbb{H}$ :

$$|f(x+yi)| = \left| \frac{x+yi-i}{x+yi+i} \right| = \frac{|x+(y-1)i|}{|x+(y+1)i|} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2-2y+1}{x^2+y^2+2y+1} < 1$$

2. Teilbeweis:  $f^{-1}(z) \in \mathbb{H}$  für  $z \in \mathbb{P}$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f^{-1}(x+yi)) &= \text{Im}\left(-i \cdot \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}\right) = \text{Im}\left(-i \cdot \frac{x+yi-1+2}{x+yi-1}\right) \\ &= \text{Im}\left(-i - \frac{2i}{x+yi-1}\right) = \text{Im}\left(-i - \frac{2i \cdot (x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2}\right) \\ &= \text{Im}\left(-i - \frac{2ix-2i+2y}{(x-1)^2+y^2}\right) = -1 - \frac{2x-2}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{2-2x}{x^2-2x+1+y^2} - 1 = \frac{2-2x-x^2+2x-1-y^2}{x^2-2x+1+y^2} \\ &= \frac{1-x^2-y^2}{x^2-2x+1+y^2} > 0. \end{aligned}$$

q.e.d.

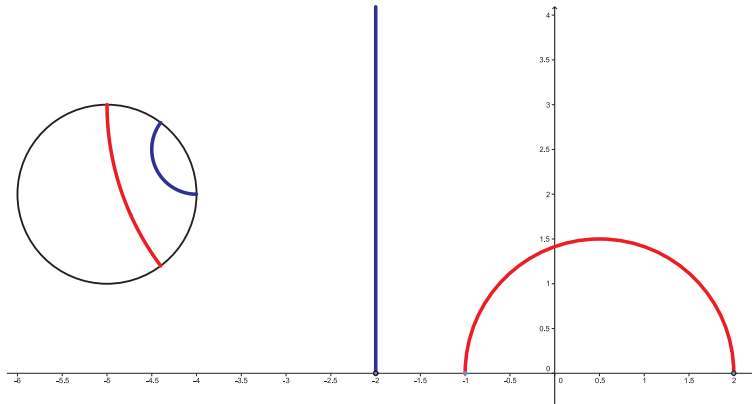


Abbildung 6: Abbildung der Poincaré-Halbebene auf die Poincaré-Kreisscheibe

## 4.2 Die Poincaré-Kreisscheibe

Da  $f$ , wie schon gesagt, isomorph ist, erhält man mit  $\mathbb{P}$  eine nichteuklidische Geometrie, wobei die N-Geraden in  $\mathbb{P}$  den Bildern der N-Geraden in  $\mathbb{H}$  entsprechen. Legt man die Bilder der N-Geraden von  $\mathbb{H}$  als N-Geraden von  $\mathbb{P}$  fest, so erhält man wieder eine nicht euklidische Geometrie. Diese nennt man Poincaré-Kreisscheibe.