Mathematische Modellbildung ohne und mit Computer – Elemente einer diskreten Modellbildung

Teilnehmer:

Bernd Lu	Herder-Gymnasium, Berlin
Tatjana Unruh	Georg-Friedrich-Händel-Oberschule, Berlin
Anton Vydrin	Hildegard-Wegscheider-Oberschule, Berlin
Dehua Duan	Herder-Gymnasium, Berlin
Friedrich Ginnold	John-Lennon-Gymnasium, Berlin
Manh Dat Hoang	Andreas-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jochen Ziegenbalg	Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Institut für Mathematik und Informatik

Mathematisches Wissen und mathematische Methoden sind schon immer (wenn auch nicht ausschließlich, so doch in einem nicht zu geringen Maß) auch im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit auf Sachverhalte der „realen“ Welt entstanden. Das Wechsel- und Spannungsverhältnis zwischen Mathematik und Welt stellt den Kern der mathematischen Modellbildung dar.

1 Wachstumsprozesse

Jeder von uns ist täglich von Wachstumsprozessen umgeben. Egal, ob wirtschaftswissenschaftliche, sozial-, oder naturwissenschaftliche Anwendungen, wie zum Beispiel biologische Prozesse oder die Analyse moderner Wirtschaftsdynamik – keines dieser Gebiete wäre ohne die mathematische Modellbildung mit und ohne Computer als Element einer diskreten Modellbildung, auf dem so hoch entwickelten Stand, auf dem es heute angelangt ist.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit vergleichsweise elementaren Methoden, die sich hervorragend zur Umsetzung (Simulation) mit Hilfe von Computerprogrammen bzw. sonstiger Computersoftware eignen. So sind bevorzugt Wachstumsprozesse und dynamische Modelle in Form rekursiver Gleichungen, Differenzengleichungen erster, genauso wie zweiter Ordnung „verpackt", sodass wir in diesem Sinne die Realisierung der mathematischen Modellbildung mit und ohne Computer in den Fokus unserer Projektarbeit stellen.

Wir beschäftigen uns mit folgenden Wachstumsprozessen:

(a) Freies Wachstum

(b) Logistisches Wachstum

(c) Sättigungswachstum

(d) Räuber-Beute Modell (Lotka-Volterra)

1.1 Grundbegriffe und Bezeichnungen:

B_k: Populationsbestand
G_k: Geburtenfälle
S_k: Sterbefälle
$b_k := \frac{\Delta B_k}{B_k} = \frac{B_{k+1}-B_k}{B_k}$ Zuwachsrate
$g_k := \frac{G_k}{B_k}$ Geburtenrate
$s_k := \frac{S_k}{B_k}$ Sterberate

1.2 Freies Wachstum

Beim freien Wachstum geht man davon aus, dass die Geburtenrate und Sterberate konstant ist:

$$B_{k+1} = B_k + G_k - S_k = B_k + g \cdot B_k - s \cdot B_k = (1 + g - s) \cdot B_k.$$

Mit $q := 1 + g - s$ ist dann

$$B_{k+1} = q \cdot B_k \quad (q \text{ konst.}).$$

Das freie Wachstum wird deshalb auch geometrisches Wachstum oder exponentielles Wachstum genannt.

1.3 Logistisches Wachstum

Beim logistischen Wachstum werden externe, dichteabhängige Faktoren wie Ressourcenknappheit, Raumnot, Stress, Gedränge, Kannibalismus und Konkurrenz berücksichtigt, die mit steigender Populationsdichte zunehmen. Diese Faktoren beeinflussen die Populationsdynamik. Ihnen wird in den unten stehenden Gleichung Rechnung getragen. Die Sterberate ist beim logistischen Wachstum nicht mehr, wie beim freien Wachstum, konstant. Sie ist proportional zum Populationsbestand:

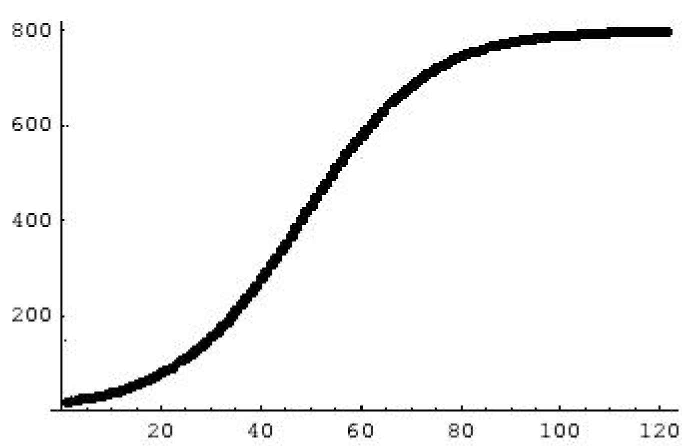
$$s_k = m \cdot B_k.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Rekursionsgleichung für den Populatuionsbestand:

$$B_{k+1} = B_k + g \cdot B_k - m \cdot B_k^2.$$

Die folgende Abbildung zeigt einen typischen Verlauf des logistischen Wachstums. Wie die Grafik suggeriert, nähert sich die Populationsgröße einer festen oberen Schranke, welche als Kapazität der Umwelt für die Population zu interpretieren ist. Die Kapazitätsgrenze der Population lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$B = \frac{g}{m}.$$



1.4 Sättigungswachstum

Beim Sättigungswachstum geht man davon aus, dass es von vornherein eine Schranke S gibt, die nicht überschritten wird. Die Größe $S - B_k$ beschreibt das sogenannte freie Marktpotential. Beim Sättigungswachstum wird angenommen, dass die Zuwachsrate proportional zum freien Marktpotential ist:

$$\frac{\Delta B_k}{B_k} = c \cdot (S - B_k).$$

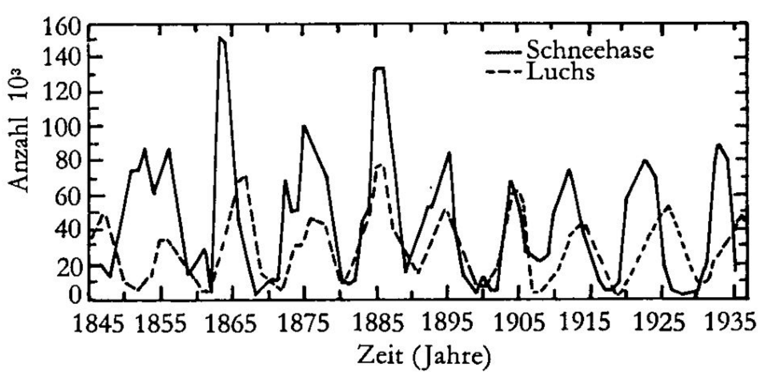
Eine naheliegende Umformung ergibt:

$$B_{k+1} = B_k + c \cdot S \cdot B_k - c \cdot B_k^2.$$

Man sieht, dass das Sättigungswachstum vom selben Typ wie das logistische Wachstum ist.

1.5 Räuber-Beute-Modell

Bei der Analyse von Populationsentwicklungen unterscheidet man zwischen isolierten und interagierenden Populationen. In der Realität interagieren verschiedene Populationen miteinander, sodass sie in gegenseitiger Wechselwirkung stehen (Symbiose, Konkurrenz, ...). Als Beispiel des interagierenden Populationsmodells soll die Räuber-Beute-Beziehung im Folgenden näher beleuchtet werden. Basierend auf der Datensammlung der Hudson Bay Company analysierten (etwa 1925) unabhgigig voneinander die Mathematiker A. Lotka und V. Volterra die beobachteten Populationszyklen und Häufigkeitskurven von Luchs und Schneehase in Kanada und formulierten ein entsprechendes Modell. Sie beobachteten periodische Bestandsschwankungen der Tierpopulation, welche durch ein regelmäßiges Auf und Ab der Populationsgrößen gekennzeichnet sind.



Die beobachtete Beeinträchtigung der Zuwachsraten der Beutetiere wird als proportional zur Anzahl der vorhandenen Konkurrenten angenommen. Die typische Räuber-Beute-Dynamik entwickelt sich aus der voneinander abhängigen Wechselwirkung der Luchs- und Hasenzyklen und kommt durch eine negative Rückkopplung zu Stande. Insgesamt führen diese Überlegungen zur folgenden rekursiven Beschreibung von Räuber- und Beutepopulation:

$$B_{k+1} = B_k + g \cdot B_k - m \cdot B_k^2 - u \cdot R_k \cdot B_k,$$

$$R_{k+1} = R_k + b_k \cdot R_k + v \cdot B_k \cdot R_k.$$

In dieser Darstellung kann man den Term $B_k \cdot R_k$ als ein Maß für die Begegnungsmöglichkeiten von Räuber- und Beutetieren ansehen.

2 Differenzengleichungen

2.1 Definitionen

Differenzengleichungen treten im Zusammenhang mit Folgen und Reihen auf. Jede Gleichung, die eine Beziehung zwischen jeweils n aufeinanderfolgenden Gliedern einer Folge angibt, bezeichnet man als Differenzengleichung der Ordnung n (die jeweilige Ordnung ergibt sich jeweils aus der Differenz des größten Index und des kleinsten Index). Im Folgenden konzentrieren wir uns auf Differenzgleichungen erster und zweiter Ordnung. Unterschieden werden auch lineare und nicht lineare Gleichungen. Erkennbar sind lineare Gleichungen dadurch, dass die Exponenten der Folgenglieder stets gleich 1 sind. Ist das Absolutglied (siehe Beispiele unten) gleich 0, so wird die Differenzengleichung als homogen bezeichnet.

Beispiele. Mögliche Formen von Differenzengleichungen

$y_{k+1} = 0.5y_k + 1$	lineare Differenzengl. erster Ordnung, inhomogen
$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$	lineare Differenzengl. zweiter Ordnung, homogen
$y_{k+1} = 3y_k - y_k^2 + 42$	nichtlineare Differenzengl. erster Ordnung, inhomogen

2.2 Arithmetische Folgen

Arithmetische Folgen gehören zu den einfachsten Typen von Differenzengleichungen. Eine Folge y_k heißt arithmetische Folge, wenn für jede natürliche Zahl k die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets dieselbe reelle Zahl d ergibt. Wir können dies auch folgendermaßen schreiben:

$$y_{k+1} = y_k + d \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Beispiel: Ein Veranstalter von Klassenreisen macht einer Schulklasse für eine Italienreise ein Angebot. Dabei gibt es einen festen Preis für die Hin- und Rückfahrt und es gibt einen Preis pro Tag für Unterkunft und Verpflegung. Somit wäre der feste Preis der Ausgangswert y_0 und der Preis pro Tag jeweils die Konstante d.

2.3 Geometrische Folgen

Weiterhin gehören auch die geometrischen Folgen zu speziellen Differenzengleichungen. Eine Folge y_k heißt geometrische Folge, wenn für jede natürliche Zahl k der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder stets gleich derselben reellen Zahl q ist :

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = q \quad (y_k \neq 0)$$

Etwas allgemeiner gesprochen, ist eine geometrische Folge vom Typ:

$$y_{k+1} = y_0 \cdot q^{k+1} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Die Glieder einer geometrischen Folge entstehen aus dem Ausgangsglied y_0 durch fortlaufende Multiplikation mit der Konstanten q.

Beispiel: In Banken und Sparkassen spielen die geometrischen Folgen im Zusammenhang mit dem Thema „Zinsenzinsen“ eine wichtige Rolle.

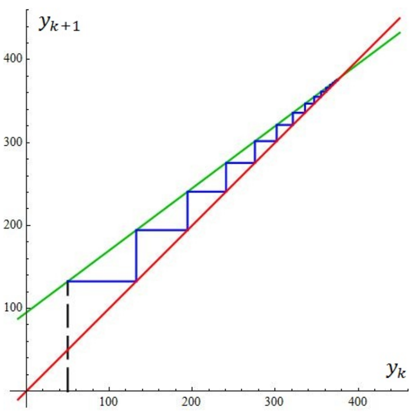
2.4 Lineare Differenzengleichung erster Ordnung

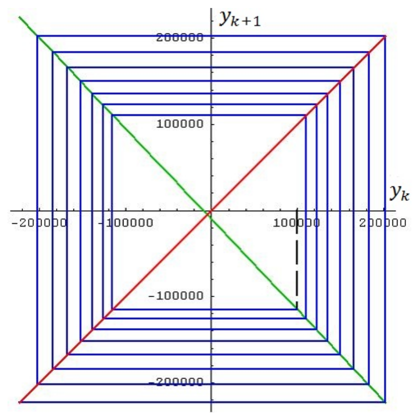
Durch die Kombination von arithmetischen und geometrischen Folgen enstehen sog. lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Inhomogenität: $y_{k+1} = y_k \cdot q + d$

Beispiel: Bei der Fortschreibung von sogenannten Annuitätendarlehen spielen die linearen Differenzengleichungen erster Ordnung eine wichtige Rolle. Nehmen wir an, dass ein Bankkunde ein Darlehen von einer Bank aufnimmt und jährlich 5 Prozent Zins (auf die jeweilige Restschuld) bezahlen muss. Durch regelmäßige Annuitätenzahlungen (in jeweils gleicher Höhe) werden die angefallenen Zinsen und ein Teil der Restschuld beglichen. Im Folgenden soll eine Gleichungen dieses Typs auch als „Tilgungsgleichung“ bezeichnet werden.

2.5 Cobweb–Diagramme

Differenzengleichungen können grafisch anhand von y_k/y_{k+1}-Diagrammen veranschaulicht werden. Auf der Abszissenachse werden entsprechend der untenstehenden Abbildungen die y_k-Werte, auf der Ordinatenachse die y_{k+1}-Werte abgetragen.





2.6 Geschlossene Darstellungen

Wir wollen uns im Folgenden mit der (nicht-rekursiven) Formeldarstellung der Tilgungsgleichung befassen. Die notwendigen Umwandlungen sind im Falle von arithmetischen und geometrischen Folgen leicht zu erkennnen.

Ist y_k eine arithmetische Folge, so gilt für alle natürlichen Zahlen k

$$y_k = y_0 + k \cdot d.$$

Ist y_k eine geometrische Folge, so gilt für alle natürlichen Zahlen k

$$y_k = y_0 \cdot q^k.$$

Mit Hilfe dieser Formeldarstellung kann man ein beliebiges Folgenglied sofort ausrechnen, ohne auf das vorherige Glied angewiesen zu sein. Dies ermöglicht eine etwas andere Rechenweise, als wir sie in der rekursiven Schreibweise hatten.

Die Ermittlung der nicht-rekursiven Bildungsvorschrift ist bei linearen Differenzengleichungen erster Ordnung etwas schwieriger. Dazu werden zunächst die ersten Folgenglieder aufgeschrieben, angefangen mit dem Anfangsglied:

$y_0 = s,$

$y_1 = y_0 \cdot q + d = s \cdot q + d,$

$y_2 = y_1 \cdot q + d = q(q \cdot s + d) + d = q^2 \cdot s + q \cdot d + d = q^2 \cdot s + d(q+1),$

$y_3 = y_2 \cdot q + d = q(q^2 \cdot s + q \cdot d + d) + d = q^3 \cdot s + q^2 \cdot d + q \cdot d + d = q^3 \cdot s + d(q^2 + q + 1).$

Man erkennt die folgende Bildungsvorschrift:

$$y_k = q^k \cdot s + d \cdot (q^{k-1} + \cdots + q^2 + q + 1) = q^k \cdot s + d \sum_{n=0}^{k-1} q^n,$$

Mit vollständiger Induktion erhalten wir insgesamt das folgende Ergebnis: Die Differenzengleichung $y_{k+1} = y_k \cdot q + d$ hat im Falle von $q \neq 1$ die folgende nicht-rekursive Darstellung:

$$y_k = q^k \cdot s + d\left(\frac{1 - q^k}{1 - q}\right).$$

3 Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung

3.1 Die Fibonacci-Gleichung und geschlossene Darstellung

In seinem Werk *Liber abaci* beschrieb Leonardo von Pisa (genannt *Fibonacci*, ca. 1170 - 1250) im Zusammenhang mit der Kaninchenvermehrung ein Problem, das zu der Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$ führte.

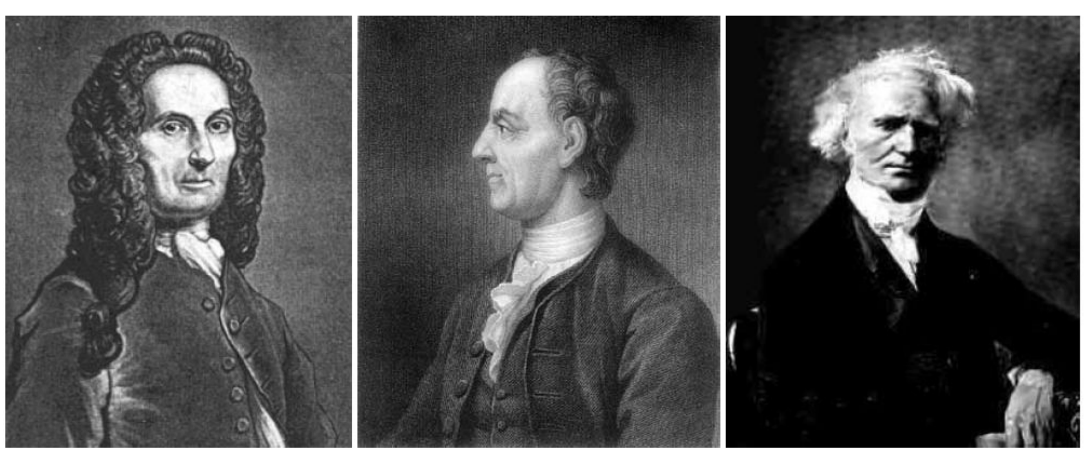
Diese Folge genügt (abgesehen von den Anfangswerten) folgender Rekursionsgleichung:

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k.$$

Die Überführung in eine geschlossene Darstellung gelang allerdings erst etwa 600 Jahre später dem Mathematiker J. P. M. Binet, der die folgende explizite Formel in Anknüpfung an die Arbeiten von de Moivre und Euler entwickelte:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$$

A. de Moivre (1667–1754) L. Euler (1707–1783) J. P. M. Binet (1786–1856)



3.2 Die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung

Wir werden das Problem der geschlossenen Darstellung für die folgende verallgemeinerte Form der Fibonacci-Gleichung behandeln:

$$y_{k+2} + a \cdot y_{k+1} + b \cdot y_k = 0 \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und Konstanten } a \text{ und } b$$

Dazu wird eine zusätzliche Variable t (für „tuning“) folgendermaßen definiert.

$$y_{k+2} + (a_1 + t) \cdot y_{k+1} = 0,$$

$$- t \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = 0.$$

Das Problem der geschlossenen Darstellung für Differenzengleichung zweiter Ordnung wird durch diesen Schritt auf das schon gelöste Problem im Falle der ersten Ordnung zurückgeführt, denn die beiden Differenzengleichungen erster Ordnung ergeben als Summe die verallgemeinerte Fibonacci-Gleichung. Ziel ist es jetzt, die Lösungen der beiden Gleichungen so anzupassen, dass sie identisch sind. Dies ist offensichtlich dann der Fall, wenn die Gleichungen selbst identisch sind. Durch Kombination erhält man dann die Lösung (geschlossene Darstellung) der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung. Über einen Koeffizientenvergleich erhält man die notwendige Bedingung für die Gleichheit:

$$-(a_1 + t) = \frac{a_0}{t}.$$

Durch eine naheliegende Umformung erhält man die sogenannte *charakteristische Gleichung*:

$$t^2 + a_1 \cdot t + a_0 = 0.$$

Für diese quadratische Gleichung gibt es i.A. zwei Lösungen t_1 und t_2.

Als Lösung (explizite Darstellung) der verallgemeinerten Fibonacci-Gleichung ergibt sich (da es sich um geometrische Folgen handelt):

$$y_k = \left(\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \right)^k.$$

Diese Lösung berücksichtigt noch nicht bestimmte Anfangswerte. Für die Fibonacci-Zahlen sind diese allerdings von Bedeutung.

Wie man leicht sieht, sind auch Linearkombinationen von Lösungen der homogenen Gleichung wiederum Lösungen dieser Gleichung:

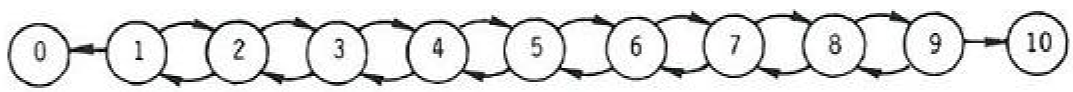
$$C_1 \cdot (t_1)^k + C_2 \cdot (t_2)^k.$$

Die Binetsche Formel als Lösung der Fibonacci-Gleichung in expliziter Form ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Gleichung mit $a_1 = a_0 = -1$ und den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$. Die Anpassung der Konstanten C_1 und C_2 an die Anfangswerte führt zu einem System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten und schließlich zu der folgenden expliziten Darstellung für die Fibonacci-Zahlen:

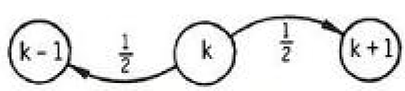
$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$$

3.3 Die symmetrische Irrfahrt

Es werde folgendes Spiel betrachtet: Zwei Spieler A und B werfen abwechselnd eine Laplace-Münze. Die Wahrscheinlichkeit für „Zahl" beträgt $\frac{1}{2}$, ebenso die Wahrscheinlichkeit für „Wappen". Beide Spieler setzen jeweils 5 Euro. Falls „Zahl" geworfen wird, bekommt Spieler A einen Euro von Spieler B, andernfalls bekommt Spieler B einen Euro von Spieler A. Das geht so lange, bis ein Spieler 10 Euro und der andere Spieler 0 Euro hat. In der folgenden Graphik wird die Spielsituation illustriert.



Der Plan (ein Beispiel für eine sog. Markov-Kette) besteht aus Kreisen (Zuständen) und Pfeilen (Übergängen). Die jeweilige Spielsituation wird durch den Kontostand des Spielers B gekennzeichnet, den wir in die Kreise gezeichnet haben. Die Nachbarzustände des Zustands k sind die Zustände $k+1$ und $k-1$. Die Übergangswahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit vom Zustand k aus zum Zustand $k+1$ bzw. $k-1$ zu gelangen, beträgt $\frac{1}{2}$.



Nun stellen wir uns die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, von einem beliebigen Zustand k zum Zustand 0 zu gelangen.

Im folgendem Schritt werden wir diese Frage mit Hilfe der *ersten Mittelwertsregel* der Wahrscheinlichkeitsrechnung klären.

Erste Mittelwertsregel

Die Wahrscheinlichkeit P_k, vom Zustand k aus zum Zustand 0 zu gelangen (d.h. die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A), ist gleich dem gewichteten arithmetischen Mittel der Wahrscheinlichkeiten, von den Nachbarzuständen $k+1$ und $k-1$ aus zum Zustand 0 zu gelangen:

$$P_k = a \cdot P_{k+1} + b \cdot P_{k-1}.$$

Die Variablen a und b sollen in der Gleichung die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand k zu den Nachbarzuständen darstellen, sodass $a = b = \frac{1}{2}$ gilt. Die obige Gleichung lässt sich leicht zu der folgenden homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung umformen:

$$P_{k+2} - 2 \cdot P_{k+1} + P_k = 0.$$

Die dazugehörige charakteristische Gleichung lautet:

$$m^2 - 2 \cdot m + 1 = 0.$$

Diese charakteristische Gleichung hat die folgende Doppelwurzel als Lösung:

$$m_1 = m_2 = 1.$$

Man kann zeigen, dass im Falle einer Doppelwurzel $m_1 = m_2$ die Folgen (m_1^k) und $(k \cdot m_2^{k-1})$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Differenzengleichung sind. Also ist auch

$$P_k = C_1 \cdot m_1^k + C_2 \cdot k \cdot m_2^{k-1}$$

eine solche Lösung.

Aus den Spielregeln für die Endzustände $k = 0$ und $k = 10$ ergibt sich:

$$P_0 = 1 \text{ und } P_{10} = 0.$$

Über die Anpassung an die Randwerte lassen sich die Koeffizienten C_1 und C_2 berechnen:

$$P_0 = C_1 + C_2 \cdot 0 = 1,$$
$$P_{10} = C_1 + C_2 \cdot 10 = 0.$$

Für die Koeffizienten gilt also:

$$C_1 = 1,$$
$$C_2 = -\frac{1}{10}.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit P_k bestimmt durch

$$P_k = 1 - \frac{1}{10} \cdot k.$$

Ein weiteres Problem besteht darin, die mittlere Spieldauer d_k zu ermitteln, um vom Zustand k in einen der Endzustände 0 oder 10 zu gelangen. Diese Aufgabe ist mit Hilfe der *zweiten Mittelwertsregel* lösbar. Als Mathematisierungsansatz ergibt sich die folgende inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$d_k = a \cdot d_{k+1} + b \cdot d_{k-1} + 1.$$