Berichte der Gruppen

Die isoperimetrische Ungleichung und das isoperimetische Problem

Teilnehmer:

Björn Daase	Herder-Oberschule, Berlin
Johanna Ettingshausen	Herder-Oberschule, Berlin
Alexander Freyer	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Tobias Karkuschke	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Taha-Emre Terzi	Andreas-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Helga Baum	Humboldt-Universität zu Berlin
Catalina Filler	Humboldt-Universität zu Berlin/Andreas-Oberschule, Berlin

Möglicherweise wurde im Unterricht bereits früher einmal gezeigt, dass bei gegebenem Umfang das Quadrat jenes Rechteck ist, welches bei gleichem Umfang den größten Flächeninhalt besitzt. Es sollte also auch möglich sein, eine solche Aussage für sämtliche ebene Flächen zu treffen. Jedoch ist der Rand vieler Flächen in verschiedener Weise gekrümmt und ihre Flächeninhalte und der Umfang somit schwieriger zu berechnen. Einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen stellt die isoperimetrische Ungleichung her:

$$U^2 \geq 4\pi A.$$

Das isoperimetrische Problem ist nun das folgende:

Welche von allen einfachen, geschlossenen Kurven gegebener Länge berandet den größten Flächeninhalt?

Dies ist eine der ältesten Fragestellungen der globalen Differentialgeometrie und wurde bereits von dem griechischen Mathematiker Zenodurus (200-140 v. Chr.) am Beispiel von Polygonen untersucht. Karl Weierstrass (1815-1897) gab 1870 den ersten strengen Beweis für die Lösung des isoperimetrischen Problems an. Er zeigte, dass der Kreis die einzige Lösung ist. Schließlich lieferte Erhard Schmidt (1876-1959) im Jahre 1939 erstmals einen direkten und elementaren Beweis. Dieser ist am Ende unseres Berichts zu finden.

Aufgabe. Um uns dem isoperimetrischen Problem anzunähern, haben wir uns zunächst damit beschäftigt, wie man Kurven in der Ebene darstellen und deren Länge berechnen kann. Des weiteren stellt sich die Frage, wie man den Flächeninhalt des von der Kurve eingeschlossenen Gebietes bestimmt.

Kurven und ihre Länge

In der realen Welt treten Kurven in verschiedener Weise auf, z.B. als Profilkurve technischer Objekte oder als Spur, die ein Bleistift beim Zeichnen auf Papier hinterlässt. In der Physik benutzt man Kurven, wenn man z.B. die Bewegung eines Massepunktes in der Ebene oder im Raum beschreiben will.

Definition 1. Eine ebene Kurve ist eine Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^2$, die man als Bild einer differenzierbaren Abbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ beschreiben kann, wobei I ein Intervall bezeichnet. Die Abbildung γ heißt Parametrisierung von K. Die Elemente des Intervalls I heißen die Parameter von γ.

Man gibt eine Kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ oft sogar durch eine Parametrisierung γ an. Die Abbildung γ beschreibt die Kurve K dann durch ihr Bild: $K = \gamma(I)$. Man nennt dieses Bild auch die Spur von γ und die Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *parametrisierte Kurve*. Den Vektor

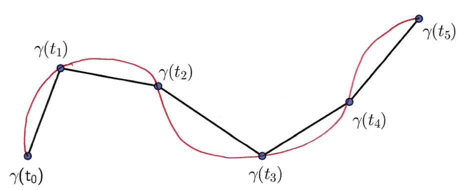
$$\gamma'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \in \mathbb{R}^2$$

nennt man *Tangentialvektor*. Er ist der Richtungsvektor der Tangente, die an die Kurve K im Punkt $\gamma(t)$ anliegt.

Um die Länge einer Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ zu definieren, benutzen wir die geometrische Intuition. Sei $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine endliche Menge von Teilungspunkten des Intervalls $I = [a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Dann beschreibt

$$L(\gamma, \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

die Länge des durch die Zerlegung $\mathcal{P}$ definierten Sehnenpolygons durch die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)$.



Definition 2. Das Supremum der Längen der γ einbeschriebenen Sehnenpolygone

$$L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ endliche Zerlegung von } I\}$$

heißt die Länge von γ.

Satz 1. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Dann gilt für ihre Länge*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

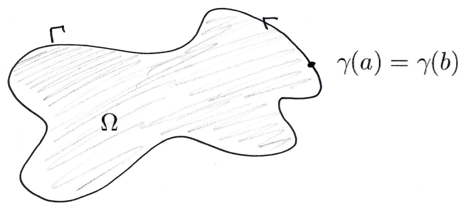
Der Flächeninhalt ebener Gebiete

Definition 3. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt

- geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- einfach, wenn $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist.

Eine einfache, geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt positiv-orientiert, wenn sie entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

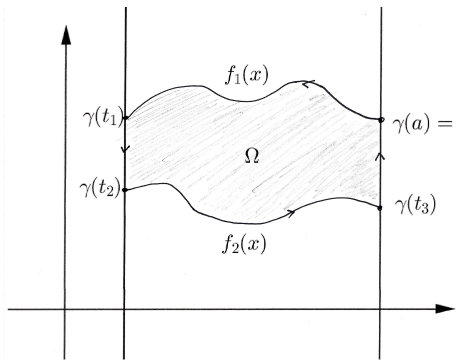
Satz 2. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfache, geschlossene, positiv-orientierte und stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, Γ die Spur von γ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das von Γ umschlossene beschränkte Gebiet. Dann gilt für den Flächeninhalt von Ω:*



$$Area(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

Beweis:

Den Beweis haben wir in zwei Schritten geführt. Im ersten Schritt betrachten wir zunächst Kurven γ, deren Spur aus zwei zur y-Achse parallelen Strecken und zwei Bögen, die Graphen von Funktionen f_1 und f_2 mit $0 < f_1 < f_2$ sind, besteht.



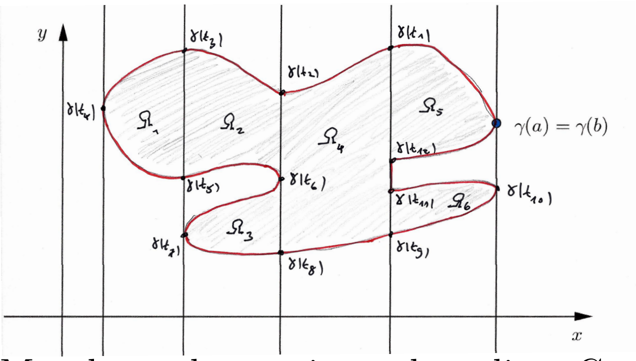
Für solche Gebiete können wir den Flächeninhalt durch ein Riemann-Integral angeben. Es gilt

$$Area(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx.$$

Für die Randkurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ gilt in diesem Spezialfall

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} (x(t), f_1(x(t))), & t \in [a, t_1] \\ (x_1, y(t)), & t \in [t_1, t_2] \\ (x(t), f_2(x(t))), & t \in [t_2, t_3] \\ (x_2, y(t)), & t \in [t_3, b]. \end{cases}$$

Setzt man dies in die rechte Seite von (1) ein, so erhält man nach einer geeigneten Parametertransformation die Formel (1) und somit die behauptete Berechnungsformel für den Flächeninhalt der speziellen Gebiete Ω.
Im zweiten Schritt ist Ω nun ein beliebiges Gebiet wie im Satz.



Wir legen das Koordinatensystem so, dass Ω im positiven Quadranten liegt. Dann ist $x(t)$ der Abstand des Randpunktes $\gamma(t)$ von der y-Achse. Wir zeichnen nun eine zur y-Achse parallele Gerade durch jeden Randpunkt $\gamma(t)$, für den $x'(t) = 0$ gilt.

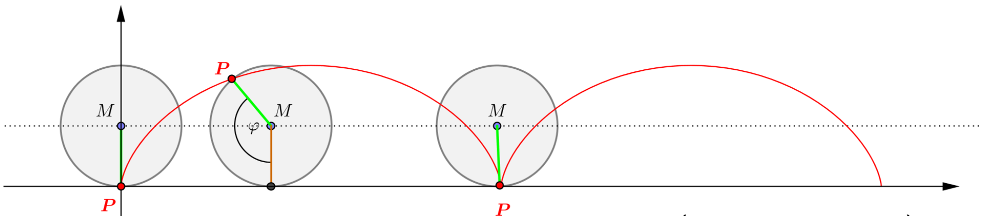
Man kann dann zeigen, dass diese Geraden das Gebiet Ω in endlich viele Teilgebiete $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ zerlegen, welche die Form aus dem ersten Schritt haben. Dann gilt

$$Area(\Omega) \;=\; \sum_{i=1}^{m} Area(\Omega_i)$$

und der erste Schritt liefert die gewünschte Formel für $Area(\Omega)$. $\square$

Beispiel 1. *Die Zykloide*

Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0, r)$ werde wie ein Rad auf der x-Achse nach rechts gerollt, bis derjenige Punkt P auf dem Kreisrand, der am Anfang auf der x-Achse lag, dies wieder tut. Wir beschreiben die Bewegungskurve von P.

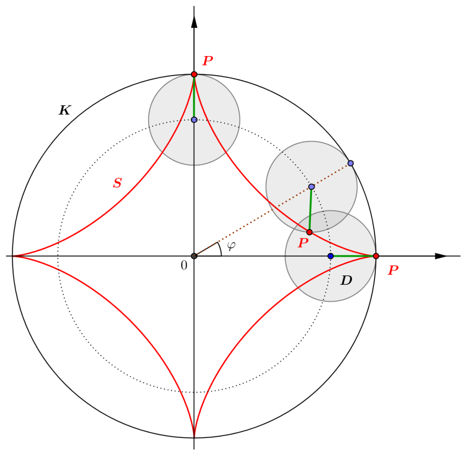


Parametrisierung: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi - \sin(\varphi)) \\ r(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$.

Länge eines Zykloidenbogens: $L(\gamma) = 8r$.
Flächeninhalt zwischen Zykloidenbogen und x-Achse: $Area(\Omega) = 3\pi r^2$.

Beispiel 2. *Die Astroide (Sternkurve)*

Wir betrachten einen Leitkreis K vom Radius R um den Punkt $(0, 0)$. Analog zur Zykloide wird ein Rollkreis vom Radius $r = \frac{R}{4}$ innen auf K entlang gerollt. Wir betrachten einen Punkt P, der am Rollkreis im Berührungspunkt $(R, 0)$ befestigt ist und beschreiben die Bewegungskurve, die P beim Abrollen vollführt.



Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

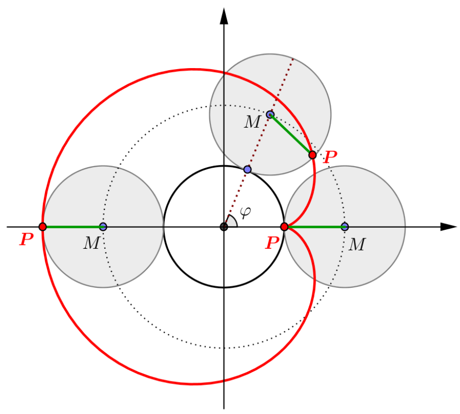
$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 4r\cos^3(\varphi) \\ 4r\sin^3(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Länge: $L(\gamma) = 24r$.

Flächeninhalt des eingeschlossenen Gebietes: $Area(\Omega) = 6\pi r^2$.

Beispiel 3. *Die Kardioide (Herzkurve)*

Nun rollt der Rollkreis außen auf dem Leitkreis K. Es sei $r = R$. Es wird ein Punkt P am Rollkreis im Berührungspunkt $(R, 0)$ befestigt. Wir beschreiben die Bewegungskurve von P beim Abrollen.



Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos(2\varphi) - r\cos(2\varphi) \\ 2r\sin(2\varphi) - r\sin(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Länge: $L(\gamma) = 16r$.

Flächeninhalt des eingeschlossenen Gebietes: $Area(\Omega) = 6\pi r^2$.

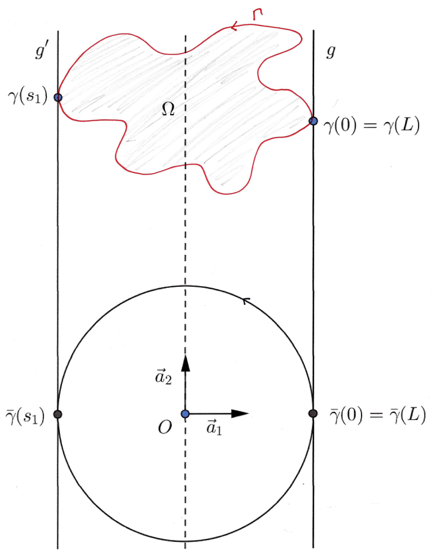
Die isoperimetrische Ungleichung und das isoperimetrische Problem

Wir betrachten jetzt Gebiete Ω, deren Rand Γ man durch eine einfache, geschlossene, stetig differenzierbare, reguläre Kurve γ parametrisieren kann. Wir nennen γ kurz einfache, geschlossene Kurve.

Satz 3. (Die isoperimetrische Ungleichung)
Sei γ eine einfache, geschlossene Kurve und Ω das von der Spur von γ umschlossene beschränkte Gebiet. Dann gilt:

$$L(\gamma)^2 \geq 4\pi \, Area(\Omega).$$

Beweis: Wir betrachten zwei parallele Geraden g und g', die das Gebiet Ω einschließen und berühren (siehe Bild).



Der Abstand von g und g' sei $2r$. Außerdem betrachten wir einen Kreis K_r vom Radius r mit den Tangente g und g', der außerhalb von Ω liegt. Wir fixieren in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem $(O, \vec{a}_1, \vec{a_2})$, dessen Ursprung O im Mittelpunkt des Kreises K_r liegt, die y-Achse sei parallel zu g und g', die x-Achse senkrecht dazu. In diesem Koordinatensystem beschreiben wir Γ durch eine Parametrisierung $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$, die Γ mit konstanter Geschwindigkeit 1 in positiver Richtung durchläuft. Die Komponenten von γ nennen wir $\gamma(s) = (x(s), y(s))$.

Den Startparameter $s = 0$ wählen wir so, dass γ die Gerade g im Parameter $s = 0$ das erste Mal berührt. $s = s_1$ sei derjenige Parameter, in dem γ die Gerade g' das erste Mal berührt. Da $\|\gamma'(s)\| = 1$, gilt für die Länge von Γ:

$$L(\gamma) = \int_0^L \|\gamma'(s)\| \, ds = \int_0^L 1 \, ds = L.$$

Den Kreis K_r parametrisieren wir in positiver Richtung durch eine Kurve $\bar{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ der Form $\bar{\gamma}(s) := (x(s), \bar{y}(s))$. Dann gilt $\bar{y}(s) \geq 0$ für alle

$s \in [0, s_1]$ und $\bar{y}(s) \leq 0$ für alle $s \in [s_1, L]$ sowie $\bar{y}^2(s) = r^2 - x^2(s)$.
Der Flächeninhalt der vom Kreis eingeschlossenen Kreisscheibe D_r ist

$$Area(D_r) = \pi r^2 \overset{Satz\,2}{=} -\int_0^L \bar{y}(s) x'(s)\, ds.$$

Der Flächeninhalt von Ω ist beschrieben durch

$$Area(\Omega) \overset{Satz\,2}{=} \int_0^L x(s) y'(s)\, ds.$$

Durch Addition beider Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
Area(\Omega) + \pi r^2 &= \int_0^L \big(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)\big)\, ds \\
&\leq \int_0^L \sqrt{\big(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)\big)^2}\, ds \\
&= \int_0^L \sqrt{x(s)^2 y'(s)^2 + \bar{y}(s)^2 x'(s)^2 - 2x(s)x'(s)\bar{y}(s)y'(s)}\, ds \\
&\leq \int_0^L \sqrt{\big(x(s)^2 + \bar{y}(s)^2\big)\big(x'(s)^2 + y'(s)^2\big)}\, ds. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Mit der Gleichheit $1 = \|\gamma'(s)\|^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2$ erhalten wir nun

$$Area(\Omega) + \pi r^2 \leq \int_0^L \sqrt{x(s)^2 + \bar{y}(s)^2}\, ds = \int_0^L \sqrt{\bar{x}(s)^2 + \bar{y}(s)^2}\, ds = \int_0^L r\, ds = rL.$$

Folglich gilt

$$Area(\Omega) + \pi r^2 \leq rL. \qquad (2)$$

Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$.

Setzen wir $a = Area(\Omega)$ und $b = \pi r^2$, dann folgt

$$\sqrt{Area(\Omega) \cdot \pi r^2} \leq \frac{Area(\Omega) + \pi r^2}{2} \overset{(2)}{\leq} \frac{Lr}{2} = \frac{L(\gamma) \cdot r}{2}. \tag{3}$$

Nach Umstellen erhalten wir die isoperimetrische Ungleichung

$$L(\gamma)^2 \geq 4\pi \, Area(\Omega).$$

□

Wir benutzen die isoperimetrische Ungleichung nun, um das isoperimetrische Problem zu lösen. Sei Ω ein Gebiet, dessen Rand die Länge L hat. Die isoperimetrische Ungleichung besagt dann, dass der Flächeninhalt von Ω höchstens $\frac{L^2}{4\pi}$ sein kann. Man sieht sofort ein, dass für einen Kreis der maximal mögliche Flächeninhalt angenommen wird. Die Länge eines Kreises K_r vom Radius r ist $L(K_r) = 2\pi r$. Der Flächeninhalt der umschlossenen Kreisscheibe D_r ist $Area(D_r) = \pi r^2$. Also gilt

$$Area(D_r) = \pi r^2 = \frac{L(K_r)^2}{4\pi}.$$

Geben wir ein festes L vor, so ist die Kreisscheibe also ein Gebiet mit maximal möglichem Flächeninhalt bei fester Randlänge L. Wir zeigen jetzt, dass der Kreis auch die einzige Kurve ist, die diese Eigenschaft hat.

Satz 4. (Das isoperimetrische Problem)
Sei L eine vorgegebene positive reelle Zahl. Der Kreis vom Radius $r = \frac{L}{2\pi}$ ist unter allen einfach geschlossenen Kurven der Länge L die einzige Kurve, die ein Gebiet mit dem größtmöglichen Flächeninhalt $\frac{L^2}{4\pi}$ umschließt.

Beweis: Sei γ eine Kurve, für die in der isoperimetrischen Ungleichung die Gleichheit gilt. Wir zeigen, dass die Spur von γ ein Kreis ist.
Die Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung zeigt, dass der Gleichheitsfall genau dann eintritt, wenn in den Ungleichungen (1), (2) und (3) die Gleichheit gilt. Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned}
&\text{Gleichheit in (3)} &\iff& \; Area(\Omega) = \pi r^2. \\
&\text{Gleichheit in (2)} &\iff& \; Area(\Omega) + \pi r^2 = Lr.
\end{aligned}$$

Im Gleichheitsfall gilt also

$$L(\gamma) = 2\pi r. \tag{4}$$

Dies zeigt uns, dass der Abstand $2r$ zwischen den beiden das Gebiet Ω einschließenden parallelen Geraden g und g' nur von der Länge $L(\gamma)$ abhängt, aber nicht von der Wahl der Richtungen von g, g'.
Wir zeigen nun, dass aus der Gleichheit in (1) folgt, dass

$$x(s) = \pm r \cdot y'(s) \qquad \forall s \in [0, L].$$

In (1) tritt Gleichheit genau dann ein, wenn für die Komponentenfunktionen von γ und $\bar{\gamma}$ gilt

$$(xy' - x'\bar{y})^2 = \underbrace{(x^2 + \bar{y}^2)}_{=r^2} \cdot \underbrace{(x'^2 + y'^2)}_{=1} = r^2. \tag{5}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$\begin{aligned}
(5) \iff \; & x^2y'^2 + x'^2\bar{y}^2 - 2xx'y'\bar{y} = x^2x'^2 + x^2y'^2 + \bar{y}^2x'^2 + \bar{y}^2y'^2 \\
\iff \; & 0 = (xx' + y'\bar{y})^2 \\
\iff \; & 0 = xx' + y'\bar{y}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Aus (5) folgt außerdem

$$xy' - x'\bar{y} = \pm r. \tag{7}$$

Durch Auflösen von (6) und (7) nach x' erhält man

$$-y'\bar{y}^2 = \pm xr + x^2y'$$

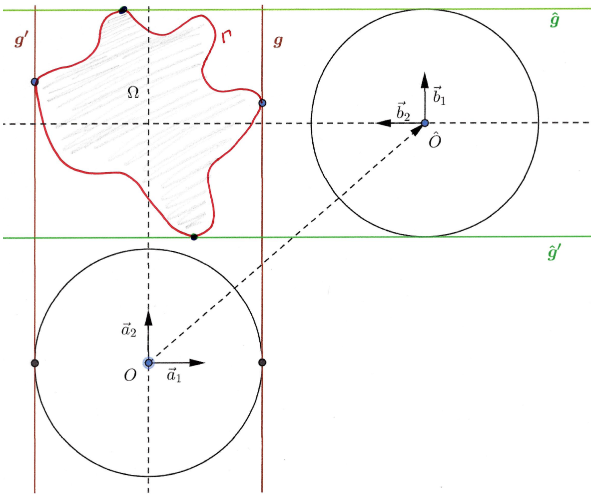
und daraus

$$0 = y'(\underbrace{x^2 + \bar{y}^2}_{=r^2}) \mp xr.$$

Dies ergibt nun

$$x(s) = \pm r \cdot y'(s) \qquad \forall\, s \in [0, L]. \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt die gleiche Situation für zwei Ω einschließende Geraden $\hat{g}$ und $\hat{g}'$, die senkrecht zu g und g' sind. $2\hat{r}$ sei ihr Abstand und $\hat{K}_{\hat{r}}$ ein Kreis zwischen $\hat{g}$ und $\hat{g}'$ außerhalb von Ω.



Im kartesischen Koordinatensystem $(\hat{O}, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ beschreiben wir γ durch

$$\gamma(s) = (\hat{x}(s), \hat{y}(s)).$$

Nach (4) hängt der Radius des Kreises nur von der Länge $L(\gamma)$ ab, d.h. es gilt $r = \hat{r}$. Für den Kreis $\hat{K}_r$ gilt wie für K_r

$$\hat{x}(s) = \pm r \cdot \hat{y}'(s) \ \forall\, s \in [0, L]. \qquad (9)$$

Wir rechnen jetzt die Koordinaten der beiden Koordinatensysteme ineinander um. Sei P ein Punkt der Ebene, der im Koordinatensystem $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ die Koordinaten (x, y) und im Koordinatensystem $(\hat{O}, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ die Koordinaten $(\hat{x}, \hat{y})$ hat. Dann gilt

$$P = O + x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \hat{O} + \hat{x}\vec{b}_1 + \hat{y}\vec{b}_2.$$

Die beiden Koordinatensysteme waren so gewählt, dass $\vec{b}_1 = \vec{a}_2$ und $\vec{b}_2 = -\vec{a}_1$. Sei $\vec{O\hat{O}} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$. Dann folgt

$$x = c_1 - \hat{y} \qquad \text{und} \qquad y = c_2 - \hat{x}.$$

Für die Koordinatenbeschreibung der Kurve γ erhalten wir damit

$$x(s) = c_1 - \hat{y}(s) \qquad \text{und} \qquad y(s) = c_2 + \hat{x}(s).$$

Aus (8) und (9) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \hat{x}(s) &= y(s) - c_2 = \pm r\hat{y}'(s) = \mp r x'(s), \\ x(s) &= \pm r y'(s). \end{aligned}$$

Quadrieren und Addieren liefert

$$(y(s) - c_2)^2 + x(s)^2 = r^2 \cdot (\underbrace{x'(s)^2 + y'(s)^2}_{=1}) = r^2.$$

D.h. die Kurvenpunkte $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ liegen auf einem Kreis um $(0, c_2)$ vom Radius r im Koordinatensystem $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Da γ die Randkurve Γ parametrisiert, ist Γ ein Kreis. $\square$