

Parkettierungen

Teilnehmer:

Tim Opitz	Andreas-Oberschule, Berlin
Fabian Balke	Immanuel-Kant-Schule, Berlin
Phillip Michalski	Immanuel-Kant-Schule, Berlin
Finn Koepke	Käthe-Kollwitz-Gymnasium, Berlin
Laurenz Mädje	Käthe Kollwitz-Gymnasium, Berlin
Niklas Schlüter	Käthe-Kollwitz-Gymnasium, Berlin

Gruppenleiter:

Stefan Felsner	Technische Universität Berlin
Veit Wiechert	Technische Universität Berlin



Parkettierungen begegnen uns überall, sei es als Pflasterung des Gehwegs oder als Fliesenmuster in der Küche. In der Mathematik sind Parkettierungen als *lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung der euklidischen Ebene mit gleichförmigen Teilflächen* definiert. Allerdings ist das Thema nicht so trocken wie man denkt, denn auch wir haben das anfangs gedacht, bis uns *Nichtexistenz von Pflasterungen*, *Domino-Parkettierungen*, *die aztekischen Diamanten* und das *Rechtecks-Theorem* gefesselt haben. Jedes der drei Teilthemen wurde von einer Zweiergruppe bearbeitet, welche für ihren Teil der Präsentation und des Berichtes verantwortlich waren.

Das Thema *Nichtexistenz von Pflasterungen* haben Finn und Laurenz bearbeitet.

Das Thema *Aztekische Diamanten* haben Tim und Niklas bearbeitet.

Das Thema *Rechtecks-Theorem* haben Fabian und Phillip bearbeitet.

Nichtexistenz von Pflasterungen

Wir haben uns vorrangig mit verschiedenen Beweisen zur Nichtexistenz von Pflasterungen beschäftigt. Dabei sind wir insbesondere auf Färbungsbeweise eingegangen. Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel:

Das demolierte Schachfeld

Auf Abbildung 1 erkennt man ein Schachfeld dem zwei Ecken fehlen: A1 und H8. Das Problem lautet wie folgt: Kann man das entstandene Schachbrett mit Dominosteinen parkettieren?

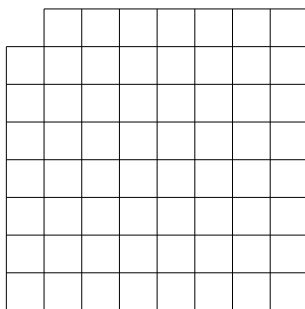


Abbildung 1: demoliertes Schachfeld

Beginnen wir erst einmal mit dem Begriff des Parkettierens: Parkettieren bedeutet, bestimmte Objekte in eine Umgebung zu legen, ohne dass Lücken oder Überschneidungen entstehen.

Ansatz. Wir färben das Brett wie ein Schachbrett. Dann fällt schnell auf, dass wir mit den Feldern A1 und H8 zwei weiße Felder entfernen. Da ein Dominostein immer ein weißes und ein schwarzes Feld belegt, erfordert eine Parkettierung gleich viele schwarze wie weiße Felder. Diese Voraussetzung erfüllt unser Schachbrett nicht.

Das $k \times k$ Brett

Beschäftigen wir uns im Folgenden mit etwas Komplexerem, der Domino-Parkettierung eines $k \times k$ Bretts mit k nichtschlagenden Türmen. „Nichtschießend“ bedeutet, dass kein Turm fähig ist, einen anderen zu schlagen. Das hat bei k Türmen zur Folge, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte ein Turm stehen muss. Die Frage ist nun: Bei welchen k können wir die Türme so stellen, dass das übrig bleibende Brett mit Dominos pflasterbar ist?

Behauptung. Ein quadratisches Brett der Seitenlänge k mit k nichtschlagenden Türmen ist genau bei $k = 4n$ und $k = 4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) pflasterbar.

Um diese Behauptung für $k = 4n$ zu zeigen, nutzen wir Induktion. Im kleinsten Fall $n = 1$ sieht ein gepflastertes Brett aus wie in Abbildung 2.

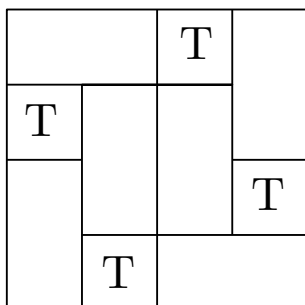
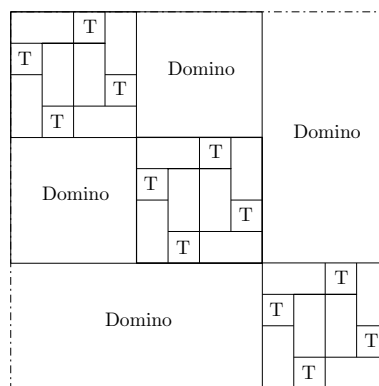


Abbildung 2: gepflastertes Brett

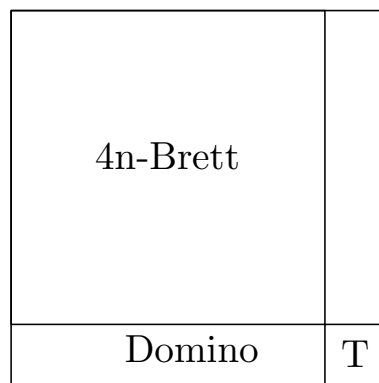
Fall I: $k = 4n$

Um ein beliebiges $4n$ -Brett zu pflastern, können wir mehrere 4×4 -Bretter diagonal aneinanderlegen (siehe Abbildung). Den Rest des großen Brettes zerlegen wir in 4×4 Felder, die jeweils ohne Türme mit Dominos parkettiert werden.



Fall II: $k = 4n + 1$

Um ein beliebiges $4n+1$ Brett zu pflastern, nehmen wir ein $4n$ Brett und fügen unten eine Zeile und rechts eine Spalte hinzu. Einen Turm platzieren wir in der unteren rechten Ecke, sodass die Türme weiterhin nichtschlagend sind. Da 4 gerade ist lassen sich die Randstreifen mit Dominos parkettieren. (siehe Abbildung)



Fall III: $k = 4n + 2$

Um ein beliebiges $4n + 2$ Brett pflastern zu können, bedarf es gleich vieler schwarzer und weißer Felder nach Positionierung der Türme (ein Domino belegt ein schwarzes und ein weißes Feld). Weil k gerade ist, hatten wir zu Beginn gleich viele schwarze wie weiße Felder. Deshalb müssen wir eine ungerade Anzahl von Türmen jeder Farbe positionieren. Wir bezeichnen weiße Türme als gerade (Summe aus Zeile und Spalte) und schwarze als ungerade.

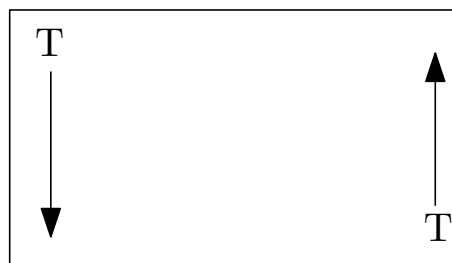
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Abbildung 3: Fall III

Behauptung: „Unabhängig von n ist bei jeder nichtschlagenden Turmkonfiguration die Anzahl der ungerade Türme gerade.“

Beweis: In der Diagonalposition stehen alle Türme auf der Diagonale von oben links nach unten rechts. Alle diese Felder sind gerade Felder, deshalb gibt es hier eine gerade Anzahl ungerader Türme – nämlich keinen.

Jetzt legen wir eine Transposition fest, bei der es auf 2 Eigenschaften ankommt. Erstens muss die Turmkonfiguration nach jeder Transposition immer noch nichtschlagend sein. Und zweitens muss die Parität der Anzahl der Türme auf den jeweiligen Feldfarben gleich bleiben.



Transposition

Wenn die Türme vorher auf identisch-farbigen Feldern standen, stehen sie danach immer noch so. Stehen sie am Ende auf denselben Farben, gibt es keine Änderung der Anzahl der Türme beider Farben. Stehen sie auf den Feldern der anderen Farbe, ändern sich die Anzahlen der weißen und schwarzen Türme um $+2$ oder -2 . Standen die Türme vorher auf verschiedenfarbigen Feldern, ist es hinterher genauso. Somit bleibt die Anzahl ungerader Türme gerade.

Nun muss nur noch gezeigt werden, dass man jede beliebige nichtschlagende Turmkonfiguration durch diese Transpositionen aus der Diagonalstellung heraus erreichen kann. Um das zu zeigen, reicht es, zu zeigen, dass es immer mit einer Transposition möglich ist, einen Turm auf die Diagonale zu ziehen, ohne einen Turm von ihr zu entfernen.

Da jeder Turm eine Zeile und eine Spalte belegt, blockiert Turm A in Abbildung 4 zwei Felder der Diagonale. In Zeile C steht ein weiterer Turm. Die beiden Türme blockieren gemeinsam zwei Zeilen und zwei Spalten, daher können wir eine Transposition durchführen: A zieht auf die Diagonale und Turm B auf Zeile D. Indem wir diese Züge nacheinander durchführen, steht immer ein Turm mehr auf der Diagonalen. Am Ende ziehen wir zwei Türme gleichzeitig darauf.

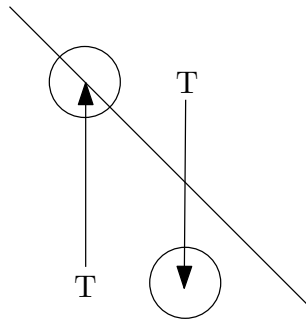


Abbildung 4: diagonale Transfiguration

Weil wir jede Konfiguration ohne Veränderung der Parität mittels Transpositionen in die Diagonalstellung bringen können, muss die Anzahl der ungerade Türme in jeder nichtschlagenden Konfiguration gerade sein. Unsere Aussage ist bewiesen und es wurde gezeigt, dass ein $4n + 2$ Brett nach Positionierung nichtschlagender Türme nicht mit Dominos parkettierbar ist.

Fall IV: $k = 4n + 3$

Da bei einem $4n + 3$ Brett ein Überschuss an geraden Feldern vorhanden ist, brauchen wir einen geraden Turm mehr als ungerade. Also $2n + 2$ gerade Türme und $2n + 1$ ungerade Türme. Da $2n + 1$ zwangsläufig eine ungerade Zahl ist, stoßen wir wieder auf eine ungerade Anzahl ungerader Türme. Und das geht nicht.

Domino-Pflasterungen des Aztekischen Diamants

Der Aztekische Diamant

Der aztekische Diamant A_n der Ordnung n besteht aus allen Einheitsquadraten mit ganzzahligen Ecken (x, y) , die die Gleichung $|x| + |y| \leq n$ erfüllen.

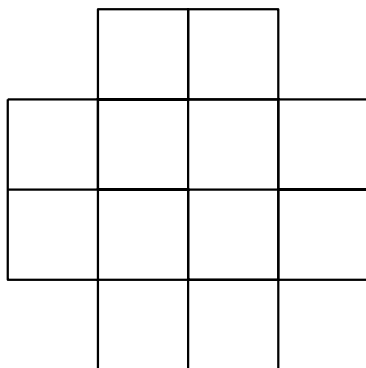
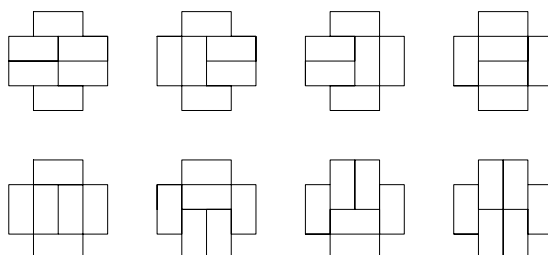


Abbildung 5: Der aztekischer Diamant der Ordnung 2

Für diesen Diamanten gibt es die folgenden 8 Dominopflasterungen:



Für die Anzahl T_n der Dominopflasterungen von A_n gibt es eine erstaunlich einfache Formel:

$$T_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Diese Formel kann man mit unterschiedlichen Methoden beweisen. Dazu zählen *Graphical Condensation*, *Gitterpfade* und *Determinanten* und andere. Während der Sommerschule haben wir uns hauptsächlich mit der Arrow-Field-Methode beschäftigt, welche es mithilfe sogenannter Arrow-Fields schafft, die Formel zu beweisen.

Die Arrow-Field-Methode

Im Rahmen dieses Beweises, wird zuerst festgestellt, dass es genügt, die folgende Rekursionsformel zu beweisen:

$$T_{n+1} = 2^{n+1}T_n$$

denn:

$$T_n = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \dots \cdot 2^1 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Für unsere Beweisskizze, nehmen wir den aztekischen Diamanten der Ordnung 3. Als *Knotenpunkte* zeichnen wir die Punkte $(i, j) \in A_{n+1}$ mit $i + j \equiv n \pmod{2}$ aus und betrachten eine Dominopflasterung des aztekischen Diamanten.

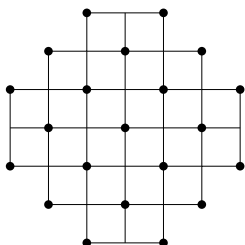


Abbildung 6: Diamant mit Knotenpunkten

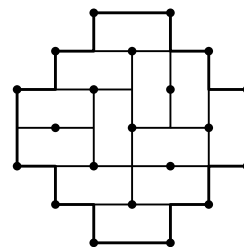


Abbildung 7: Domino-Pflasterung

Auf dieser Parkettierung können wir mithilfe der vorhin definierten Knotenpunkte ein Arrow-Field definieren. Dazu beobachten wir, dass jeder Dominostein drei Knotenpunkten beinhaltet, von denen zwei in Ecken liegen und der Dritte in der Mitte einer langen Seite. In den Stein zeichnen wir zwei Pfeile, deren Anfang der dritten Knotenpunkt ist und deren Spitzen in die Ecken zeigen, siehe Abbildung 8.



Abbildung 8: Domino-Stein

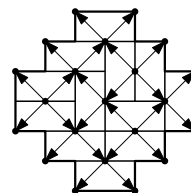


Abbildung 9: Arrow-Field

Ein so definiertes Arrow-Field nennt man *außengerichtet*, denn alle Knotenpunkte am Rand des aztekischen Diamanten haben nur eingehende Pfeile.

Drehen wir alle Pfeile um, so erhalten wir ein *innengerichtetes Arrow-Field*. Abbildung 11 zeigt, dass wir über das innengerichtete Arrow-Field Dominos legen können, sodass die Pfeile in den Dominos wieder wie in Abbildung 8 gerichtet sind.

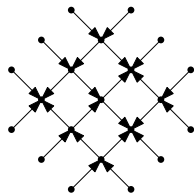


Abbildung 10: umgedrehte Pfeile

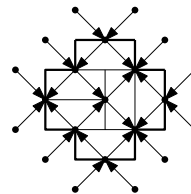


Abbildung 11: Innengerichtet

Um die Rekursion $T_n = 2^n T_{n-1}$ zu beweisen, betrachten wir nun ein Arrow-Field F und das umgedrehte Arrow-Field F' . Die Arrow-Fields bestimmen die Domino-Parkettierung nicht vollständig. Tatsächlich hat man bei jedem Knotenpunkt mit vier nach außen zeigenden Pfeilen die Wahl ob man die beiden Dominos waagrecht oder senkrecht platziert. In Abbildung 12 ist so eine Situation mit einem roten Rahmen markiert. Es zeigt sich, dass die Anzahl der roten Rahmen, die in F leben, die Anzahl der roten Rahmen in F' um genau n übersteigt. Aus dieser Tatsache folgt, indem man über alle Arrow-Fields F summiert, die Rekursion.

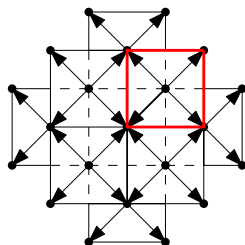


Abbildung 12: 2×2 Einschränkung

Das Rechtecks-Theorem

Satz 1. *Wenn ein Rechteck in kleine Rechtecke zerlegt wird, die alle mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge haben, so weist auch das große Rechteck mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge auf.*

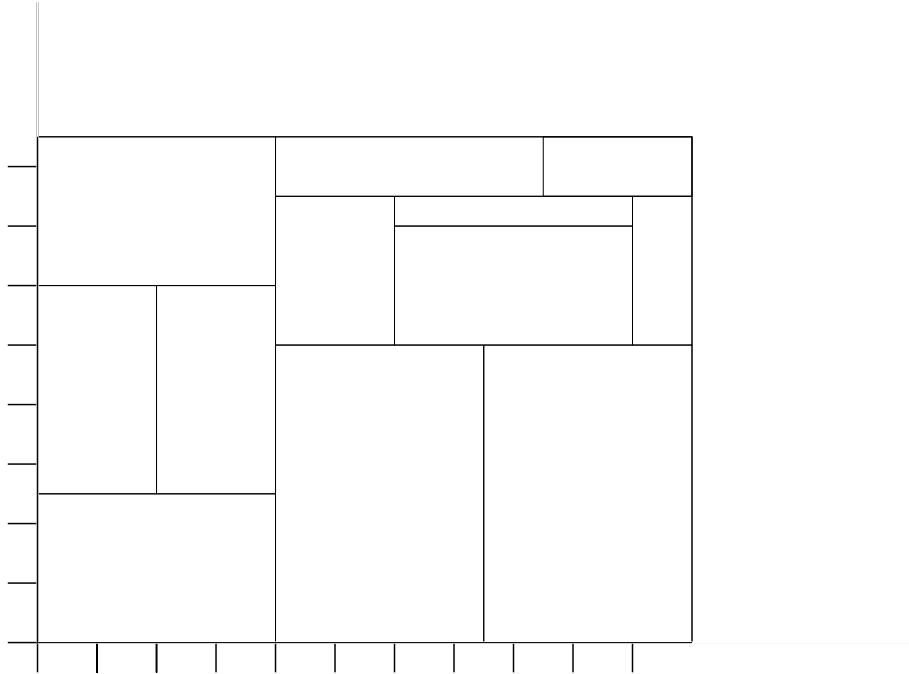


Abbildung 13: Großes Rechteck mit einer ganzzahligen Kante

Zum Beweis dieses Satzes haben wir uns mit 3 Beweisen mit unterschiedlichen Ansätzen beschäftigt. Den ersten Beweis, der von de Bruijn mit Hilfe eines Doppelintegrals durchgeführt wurde, vernachlässigen wir in diesem Bericht, da er komplexe Zahlen benutzt und diese teilweise noch nicht behandelt wurden.

Beweis von Richard Rochberg & Sherman Stein

Der Beweis wird mit der Methode der Einfärbung geführt. Ein Rechteck R wird wie in Abbildung 14 gezeigt mit einem Schachbrettmuster eingefärbt, das eine Kästchenlänge von $\frac{1}{2}$ hat. Betrachten wir ein Teilungsrechteck r . Dieses ist, aufgrund der Tatsache, dass es eine ganzzahlige Seite besitzt, zur Hälfte schwarz und zur anderen Hälfte weiß eingefärbt. Da das große Rechteck R aus der Menge der Teilungsrechtecke r besteht, muss auch R zur Hälfte schwarz und zur anderen Hälfte weiß eingefärbt sein.

Wenn beide Seiten eines Rechtecks R nicht ganzzahlig sind und wenn wir in der linken unteren Ecke, dem Punkt $(0/0)$, mit der Parketierung und einem schwarzem Feld beginnen, so entsteht in der rechten oberen Ecke ein Feld bei dem der schwarze Teil den weißen Teil überwiegt (s. Abbildung 14&15). Die beiden grau gefärbten Flächen in der Abbildung enthalten auf Grund der ganzzahligen Seiten, des karierten Rechtecks auch gleich viel schwarz und weiß. Insgesamt enthält R also mehr schwarz als weiß.

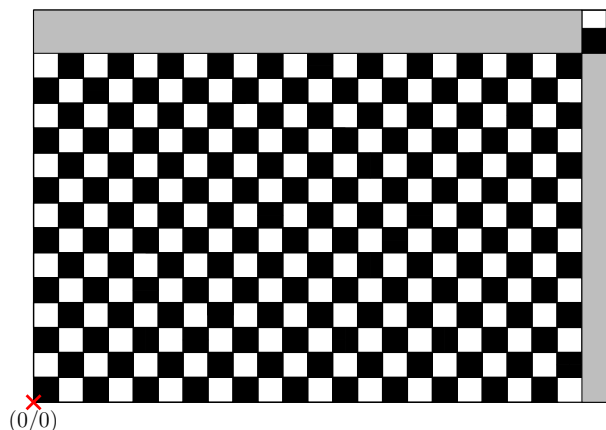


Abbildung 14: Eingefärbtes Rechteck

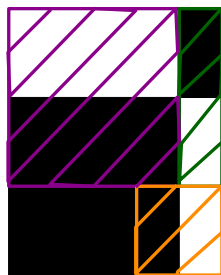


Abbildung 15: Kleines Rechteck

Beweis von Mike Paterson

Der Beweis verwendet einen Graphen. Als Knoten des Graphen nehmen wir die Menge T der Mittelpunkte der Teilrechtecke und die Menge C der ganzzahligen Ecken, also der Ecken (x/y) mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Die Kanten des Graphen sind jene Paare (t, c) mit $t \in T$ und $c \in C$, für die c eine Ecke des Teilrechtecks c ist. Wenn man die Kanten des Graphen betrachtet, erkennt man, dass jedes $t \in T$ entweder 0, 2 oder 4 Verbindungen zu Knoten in C hat. In C unterscheiden wir zwei Arten von Knoten, die ganzzahligen Ecken C_R des großen Rechtecks und die übrigen Knoten $C_I = C \setminus C_R$. Jeder Knoten in C_I ist die Ecke von 2 oder 4 Teilrechtecken und hat also eine gerade Anzahl von Kanten. Die Menge C_R ist nicht leer, denn sie enthält die Ecke $(0/0)$ und jeder Knoten in dieser Menge ist an genau einer Kante beteiligt.

Die Anzahl der Kanten eines Knotens ist sein Grad. Für die Mächtigkeit der Kantenmenge E gilt nun:

$$|E| = \sum_{t \in T} \text{grad}(t) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dies bedeutet, dass es eine gerade Anzahl von Kanten geben muss. Da jede Kante zwischen einem $t \in T$ und einem $c \in C$ verläuft, gilt auch:

$$|E| = \sum_{c \in C} \text{grad}(c).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung tragen nur die Knoten in C_R einen ungeraden Wert bei. Der Vergleich mit der ersten Gleichung zeigt also, dass $|C_R|$ gerade sein muss. Wenn zwei Ecken im Rechteck ganzzahlig sind, so ist mindestens auch eine Seite ganzzahlig. Damit ist das Theorem bewiesen.

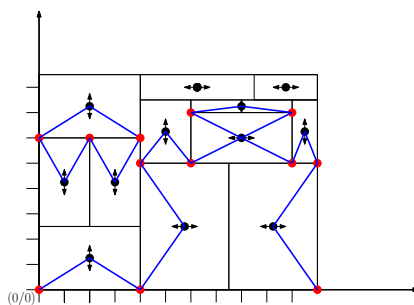


Abbildung 16: Beispiel mit blauen Kanten