Kuriositäten der Unendlichkeit – Zetafunktionen und ihre Werte

Teilnehmer:

Nico Dietzsch	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Helena Jotkute	Andreas-Oberschule, Berlin
Denis Kunz	Andreas-Oberschule, Berlin
Theodor Morawetz	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Erik Probst	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Amin Thainat	Herder-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jürg Kramer	Humboldt-Universität zu Berlin, MATHEON
Barbara Jung	Humboldt-Universität zu Berlin

Ausgangspunkt der nachfolgenden Untersuchungen ist die kuriose, auf Leonhard Euler zurückgehende Identität

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12},$$

welche auf den ersten Blick absurd erscheint. Um dieses Geheimnis zu lüften, wird als zentrales Hilfsmittel die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \quad (s > 1)$$

studiert. Für reelles $s > 1$ ist dies eine „schöne“, d.h. unendlich oft differenzierbare, Funktion. Man erkennt auch, dass $\zeta(s)$ wichtige Erkenntnisse der elementaren Zahlentheorie kodiert, wie beispielsweise die Unendlichkeit der Primzahlen oder den Fundamentalsatz der Arithmetik. Außerdem werden wir mit Hilfe der Bernoulli-Zahlen die Werte $\zeta(2k)$ der Riemannschen Zetafunktion an den positiv geradzahligen Stellen $s = 2k$ explizit berechnen. Dabei zeigt sich insbesondere, dass

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt. Dies wird uns überraschenderweise einen Einblick in die eingangs erwähnte mysteriöse Formel von Euler geben.

Bernoulli-Zahlen

Definition 1. Die *Bernoulli-Zahlen* sind gegeben durch eine Folge rationaler Zahlen B_j ($j \in \mathbb{N}$), die durch die rekursive Vorschrift

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1$$

festgelegt sind. Diese Zahlenfolge tritt in der Mathematik in verschiedenen Zusammenhängen auf, wie zum Beispiel als Entwicklungskoeffizienten von verschiedenen Funktionen und im Zusammenhang mit der Riemannschen Zetafunktion.

Zunächst berechnen wir die beiden ersten Bernoulli-Zahlen rekursiv:

$k = 0:$ $\quad B_0 = 1.$

$k = 1:$ $\quad B_0 + 2B_1 = 2 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}.$

Hier ist nun eine Tabelle für die ersten elf Bernoulli-Zahlen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Potenzsummen

Die Bernoulli-Zahlen spielen bei der Berechnung der Potenzsummen

$$S_k(n) := \sum_{j=1}^{n} j^k \qquad (k, n \in \mathbb{N},\ n > 0)$$

eine wesentliche Rolle. Beispielsweise berechnen wir für die ersten beiden Potenzsummen

$$S_0(n) = \sum_{j=1}^{n} j^0 = n \quad \text{und} \quad S_1(n) = \sum_{j=1}^{n} j^1 = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Ganz allgemein gilt der

Satz 1. *Für die Potenzsumme $S_k(n)$ gilt die Formel*

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j \, n^{k+1-j}$$

mit den Bernoulli-Zahlen $B_0, \ldots, B_k$.

Beweis: Um die behauptete Formel zu finden, stellt man die binomische Formel um und erhält zunächst

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} m^j.$$

Dann summiert man für alle $m = 1, 2, 3, \ldots, n$ die linke und rechte Seite obiger Formel. Für die linke Seite erhält man

$$\begin{aligned} &2^{k+1} - 1^{k+1} + 3^{k+1} - 2^{k+1} + \ldots + n^{k+1} - (n-1)^{k+1} + (n+1)^{k+1} - n^{k+1} \\ =&(n+1)^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich

$$\begin{aligned} &1^0 + \ldots + (k+1)\cdot 1^k + 2^0 + \ldots + (k+1)\cdot 2^k + \ldots + n^0 + \ldots + (k+1)\cdot n^k \\ =&S_0(n) + \ldots + (k+1) \cdot S_k(n). \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man damit

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n).$$

Indem man diese Formel nach $S_k(n)$ umstellt, erhält man die Rekursionsgleichung

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right).$$

Diese Formel gilt zunächst nur für natürliche Zahlen n. Allerdings können wir die Gültigkeit obiger Formel auf den Bereich der reellen Zahlen erweitern, indem wir die natürliche Zahl n durch die reelle Variable x ersetzen.

Wir erhalten

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1}\left((x+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(x)\right).$$

Da die Funktion $S_k(x)$ aufgrund der rekursiven Definition und $S_0(x) = x$ ein Polynom vom Grad $k+1$ ist, können wir die Koeffizienten von $S_k(x)$ wie folgt durch Ableiten berechnen

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{S_k^{(j)}(0)}{j!}\, x^j.$$

Definiert man nun b_j durch die Formel

$$S_k^{(j)}(0) = k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-j+2) b_{k+1-j} \quad (j = 0, \ldots, k+1),$$

so erhält man nach einigen weiteren Umformungen das Endergebnis

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j\, x^{k+1-j}.$$

Setzt man in dieser Formel $x = 1$, so ergibt sich wegen $S_k(1) = 1$ die Rekursionsformel

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j = k+1.$$

Wenn man dies mit der definierenden Formel der Bernoulli-Zahlen vergleicht, sieht man, dass die b_j mit den Bernoulli-Zahlen B_j übereinstimmen. Damit ist der Satz bewiesen. □

Berechnung von $\zeta(2)$

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Bernoulli-Zahlen kennengelernt, um endliche Summen von Potenzen natürlicher Zahlen zu berechnen. In diesem Abschnitt werden wir unendliche Summen (Reihen) von Reziproken von Potenzen natürlicher Zahlen betrachten. Dabei stellt sich heraus, dass auch in diesen Fällen die Bernoulli-Zahlen eine wesentliche Rolle spielen. Wir beginnen mit der folgenden

Definition 2. Für $s > 1$ definieren wir die Riemannsche Zetafunktion durch die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

Im Folgenden interessieren wir uns für die Berechnung der Werte $\zeta(2k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Dazu beweisen wir exemplarisch

Satz 2. *Es besteht die Formel*

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Hierbei stellen wir fest, dass die Formel auch in der Form $\zeta(2) = B_2\,\pi^2$ mit der Bernoulli-Zahl $B_2 = 1/6$ geschrieben werden kann.

Beweis: Wir beginnen mit der offensichtlich gültigen Relation

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} \cdot y^{n-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Von beiden Seiten der vorhergehenden Gleichung bilden wir jetzt die unendliche Summe über alle positiven natürlichen Zahlen und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Nun verwenden wir für die Reihe im Doppelintegral die Formel für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1)$$

mit $q = xy$ und erhalten

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}\,.$$

Mit der Transformation $x = u - v$ und $y = u + v$, also $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u - \mathrm{d}v$ und $\mathrm{d}y = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$, ergibt sich $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ und somit die Gleichung

$$\zeta(2) = 2 \iint\limits_S \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1 - u^2 + v^2}\,;$$

hierbei ist S das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1/2,-1/2)$, $(1,0)$ und $(1/2,1/2)$ der u,v-Ebene. Dieses Quadrat kann man entlang seiner Diagonalen in vier Dreiecke aufteilen. Wegen der Symmetrie des Integranden bezüglich der u-Achse ergibt das Integral ber je zwei der vier Dreiecke denselben Wert. Somit lässt sich das Integral auf der rechten Seite umformen zu

$$\zeta(2) = 4 \int\limits_0^{1/2} \int\limits_0^{u} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1 - u^2 + v^2} + 4 \int\limits_{1/2}^{1} \int\limits_0^{1-u} \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1 - u^2 + v^2}\,.$$

Wenn wir nun nach v integrieren, geht das innere Integral im Wesentlichen in die Arcustangens-Funktion über. Genauer erhalten wir

$$\begin{aligned}\zeta(2) =& 4 \int\limits_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u \\ &+ 4 \int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Um die beiden Integranden weiter zu vereinfachen, führen wir nun folgende Nebenrechnungen durch. Den ersten Integranden formen wir mit Hilfe der Relation

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$$

um. Für das zweite Integral setzen wir zunächst

$$\Theta = \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

und berechnen

$$\tan^2(\Theta) = \frac{1-u}{1+u}\,,\ \sec^2(\Theta) = \frac{2}{1+u},\ \text{also} \quad u = 2\cos^2(\Theta) - 1 = \cos(2\Theta).$$

Damit ergibt sich

$$\Theta = \frac{1}{2}\arccos(u) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(u).$$

Durch Einsetzen dieser beiden Ergebnisse erhält man die Gleichheit

$$\zeta(2) = 4\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u + 4\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

Integrieren wir schließlich und setzen die Grenzen der Integrale ein, ergibt sich das behauptete Ergebnis

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \Big[2\,\arcsin^2(u)\Big]_0^{1/2} + \Big[\pi\arcsin(u) - \arcsin^2(u)\Big]_{1/2}^{1} \\ &= \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 1. Betrachten wir die Werte der Zetafunktion für gerade natürliche Zahlen, dann gilt allgemein folgender Zusammenhang:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi)^{2k}.$$

Dies zu beweisen, würde den Rahmen dieses Berichtes sprengen. Den Fall $k = 1$ haben wir jedoch mit dem vorhergehenden Satz gezeigt, da die Gleichheit

$$\frac{(-1)^0}{2}\frac{B_2}{2!}(2\pi)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt.

Funktionalgleichung von $\zeta(s)$

Im Folgenden werden wir die eingangs erwähnte kuriose Identität von Euler, dass nämlich

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

gelten soll, untersuchen. Dabei besteht das Problem, dass die Zetafunktion $\zeta(s)$ über die Reihendarstellung nur für positive reelle Zahlen $s > 1$ definiert ist. Unser Ansatz für die Lösung dieses Problems ist, dass wir die Zetafunktion analytisch fortsetzen, so dass sie für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert werden kann. Dazu werden wir eine Funktionalgleichung beweisen.

Definition 3. Wir definieren eine Hilfsfunktion $c(s)$ durch

$$c(s) := \frac{\pi^{-(1-s)/2} \cdot \Gamma((1-s)/2)}{\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2)};$$

hierbei ist $\Gamma(s)$ die Gammafunktion, die für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ definiert ist durch

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x.$$

Satz 3. *Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ besitzt eine analytische Fortsetzung nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Darüber hinaus besteht mit der in Definition 3 gegebenen Hilfsfunktion $c(s)$ die Funktionalgleichung*

$$\zeta(s) = c(s) \cdot \zeta(1-s)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$.

Beweis: Mit Hilfe von Fourier-Reihen können wir folgende Formel beweisen, welche wir für die Herleitung der Funktionalgleichung benötigen werden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 t} = t^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2/t} \qquad (t > 0). \tag{1}$$

Indem wir die Funktion $\Theta(t)$ durch

$$\Theta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 t}$$

definieren, erhalten wir mit (1) die Identität

$$2\,\Theta(t) + 1 = t^{-1/2}\left(2\,\Theta\left(\frac{1}{t}\right) + 1\right),$$

also durch Umstellen

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\left(\Theta\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

Indem wir in der Definition der Gammafunktion s durch $s/2$ ersetzen und die Substitution $x \mapsto \pi n^2 x$ vornehmen, ergibt sich

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{s/2}\, n^s \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1} \mathrm{d}x.$$

Durch Umstellen dieser Gleichung nach $1/n^s$ und Summation über alle positiven natürlichen Zahlen erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1} \mathrm{d}x.$$

Aufgrund des exponentiellen Abfalls der Exponentialfunktion konvergiert das Integral rechter Hand gleichmäßig für $n \in \mathbb{N}$. Deshalb darf man die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen. Nach Definition der Funktion $\Theta(x)$ ergibt sich damit

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty \Theta(x)\, x^{s/2-1} \mathrm{d}x,$$

also

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{s/2-1}\, \Theta(x) \mathrm{d}x.$$

Die letzte Gleichung kann man nach der Intervalladditivität von Integralen umstellen zu

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 x^{s/2-1}\, \Theta(x) \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{s/2-1}\, \Theta(x) \mathrm{d}x.$$

Einsetzen von (2) ergibt jetzt

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^1 x^{s/2-1} \left(x^{-1/2}\Theta\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^{-1/2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{s/2-1}\, \Theta(x) \mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $x \mapsto 1/x$ erhält man nach kurzer Rechnung

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}\right)\Theta(x)\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert nun für alle $s \in \mathbb{C}$, da $\Theta(x)$ für $x \to \infty$ exponentiell abfällt, wogegen $x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}$ für $x \to \infty$ nur polynomial wächst. Der erste Summand auf der rechten Seite besitzt für $s = 0$ bzw. $s = 1$ einen Pol erster Ordnung. Aufgrund des Pols erster Ordnung von $\Gamma(s)$ bei $s = 0$ ist also $\zeta(0)$ wohldefiniert. Insgesamt erhalten wir damit die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Anhand von Gleichung (3) sieht man weiter, dass für die Zetafunktion eine Symmetrie bezüglich $s \mapsto 1 - s$ vorliegt, denn wir haben

$$\begin{aligned} & \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\tfrac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \\ = \; & \tfrac{1}{(1-s)((1-s)-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-(1-s)/2-1/2} + x^{(1-s)/2-1}\right)\Theta(x)\mathrm{d}x \\ = \; & \tfrac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}\right)\Theta(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit (3) ergibt sich jetzt die behauptete Funktionalgleichung

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

welche sich mit Hilfe von Definition 3 zu $\zeta(s) = c(s) \cdot \zeta(1-s)$ umschreiben lässt. □

Bemerkung 2. Da nun $\zeta(-1)$ über die (nicht zulässige) Reihendefinition formal der Summe der natürlichen Zahlen $1+2+3+4+5+\cdots$ entspricht, kann der Wert $\zeta(-1)$ als „Wert“ dieser Summe betrachtet werden. Mit der Funktionalgleichung aus Satz 3 ergibt sich für $s = -1$ die Formel

$$\zeta(-1) = c(-1) \cdot \zeta(2).$$

Mit den Berechnungen aus dem zweiten Abschnitt haben wir einerseits $\zeta(2) = \pi^2/6$. Andererseits finden wir mit Definition 3

$$c(-1) = \frac{\pi^{-1} \cdot \Gamma(1)}{\pi^{1/2} \cdot \Gamma(-1/2)} = -\frac{1}{2\,\pi^{3/2}\,\Gamma(1/2)}\,,$$

da sich aus der Definition der Gammafunktion sofort $\Gamma(1) = 1$ ergibt und die Funktionalgleichung $s\,\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ der Gammafunktion mit $s = -1/2$ die Identität $\Gamma(-1/2) = -2\,\Gamma(1/2)$ liefert; damit sind wir auf die Berechnung von $\Gamma(1/2)$ geführt. Definitionsgemäß haben wir zunächst

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $x \mapsto y^2$ erhält man

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2} y^{-1}\, 2\, y\, \mathrm{d}y = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} \mathrm{d}y = \sqrt{\pi},$$

wobei sich die letztere Gleichheit aufgrund des bekannten Werts des Gaußschen Fehlerintegrals ergibt. Damit haben wir

$$c(-1) = -\frac{1}{2\,\pi^2}\,,$$

woraus

$$\zeta(-1) = c(-1) \cdot \zeta(2) = -\frac{1}{2\,\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

folgt. Damit haben wir abschließend eine Erklärung für die eingangs erwähnte mysteriöse Eulersche Identität gefunden.