Elementargeometrie
MSG – Mathematische Schülergesellschaft
Daniel Platt

Das vorliegende Skript beschäftigt sich mit dem Thema *Elementargeometrie*. Das Skript entsteht entlang einer Unterrichtsreihe in der Mathematischen Schülergesellschaft (MSG) im Schuljahr 2012/2013. Die vorliegende Version ist noch nicht endgültig und wird noch ergänzt. (Stand: 07.07.2016)

Die Kapitel 1 und 2.1 haben wir im Jahr 2012 behandelt. Im Zirkel am 13.02.2013 haben wir mit Kapitel 2.2 begonnen.

Für Rückmeldungen jeder Art und insbesondere Hinweise auf Fehler bin ich sehr dankbar – am liebsten per E-Mail an plattd@math.hu-berlin.de.

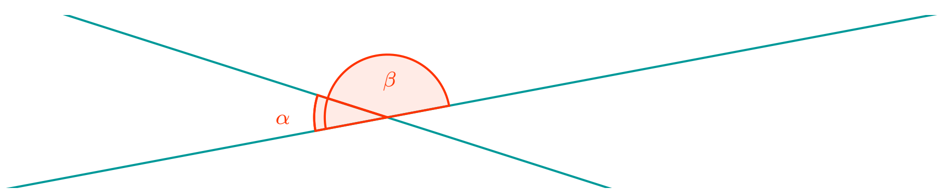
1 Winkelsätze

In diesem Kapitel werden die absolut wichtigsten Grundlagen der Elementargeometrie bereitgestellt. Die Aussagen in diesem Kapitel sind dramatisch wichtig, um den Rest des Skripts zu verstehen. Außerdem werden diese Aussagen extrem (!) häufig in Mathematik-Wettbewerben zum Lösen der Aufgaben benötigt.

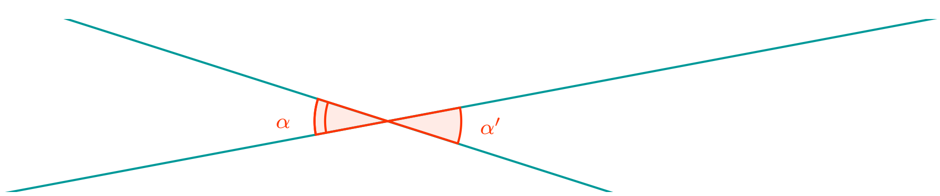
1.1 Winkel an Geraden

Die folgenden Aussagen sollten aus dem Mathematikunterricht bekannt sein. Für uns fallen diese Aussagen vom Himmel und wir werden keinen Beweis für sie liefern.

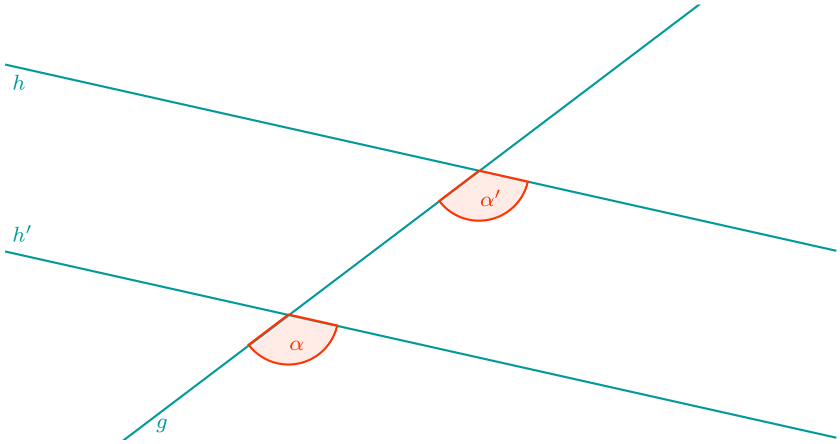
Satz 1. *(i) Schneiden sich zwei Geraden, so heißt ein Paar benachbarter Winkel Nebenwinkel. Es gilt: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt* $180°$. *(Im Bild also* $\alpha + \beta = 180°$*)*



(ii) Schneiden sich zwei Geraden, so heißt ein Paar gegenüberliegender Winkel Scheitelwinkel. Es gilt: Scheitelwinkel haben dieselbe Größe. (Im Bild also $\alpha = \alpha'$*)*

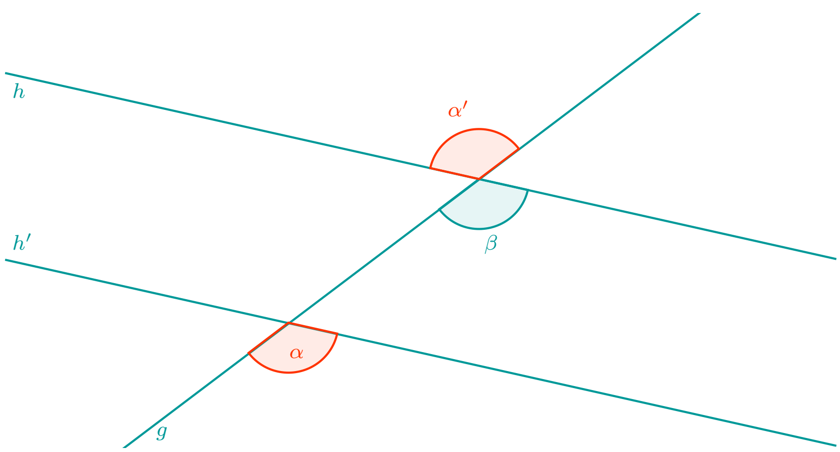


(iii) Es seien h und h' zwei Parallele Geraden. Es sei g eine dritte Gerade, die beide Geraden schneidet. Zwei Winkel auf derselben Seite von g und auf entsprechenden Seiten von h und h' heißen Stufenwinkel. Es gilt: Stufenwinkel haben dieselbe Größe. (Im Bild also: $\alpha = \alpha'$)



Man kann mit sehr formaler, komplizierter Mathematik diese Aussagen auf noch einfachere Aussagen zurückführen. Wir tun dies allerdings nicht, sondern nehmen diese Aussagen einfach ohne Beweis an. Wir werden dies noch an einer weiteren Stelle tun, ansonsten aber alle Aussagen aus unserem Wissen beweisen.

Satz 2. *(iv) Es seien h und h' zwei Parallele Geraden. Es sei g eine dritte Gerade, die beide Geraden schneidet. Zwei Winkel auf derselben Seite von g und auf verschiedenen Seiten von h und h' heißen Wechselwinkel. Es gilt: Wechselwinkel haben dieselbe Größe. (Im Bild also: $\alpha = \alpha'$)*



Beweis. Es seien alle Bezeichnungen wie in der Skizze. Wir wissen:

$$\alpha = \beta \qquad \text{(Stufenwinkel)}$$
$$\beta = \alpha' \qquad \text{(Scheitelwinkel)}$$

Und wenn wir beide Gleichungen zusammennehmen, so erhalten wir: $\alpha = \beta = \alpha'$. Also:

$$\alpha = \alpha'$$

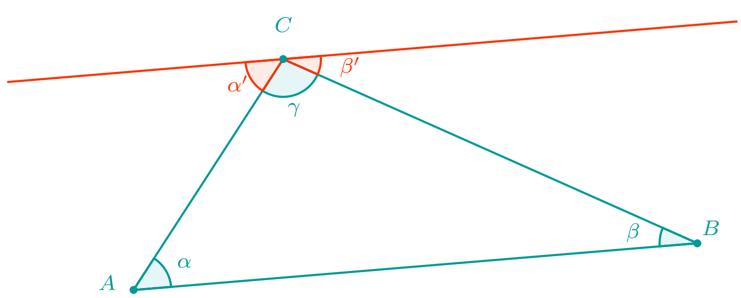
Das beweist die Behauptung. □

1.2 Winkel im Dreieck

Wenn man in einem Dreieck auf geschickte Art Hilfslinien einfügt, kann man die obigen Aussagen benutzen, um Winkelsätze am Dreieck zu beweisen. Das werden wir im Folgenden tun:

Satz 3. *(Innenwinkelsumme im Dreieck) In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme* $180°$.

Beweis. Es sei also ΔABC irgendein beliebiges Dreieck. Wir wollen nun zeigen, dass die Winkelsumme in ΔABC gerade $180°$ beträgt. Dazu betrachten wir eine Parallele zu Dreiecksseite $\overline{AB}$ durch den Punkt C (im Bild in orange eingefügt):



An dieser Stelle sehen wir:

$$\alpha = \alpha' \qquad \text{(Wechselwinkel)}$$
$$\beta = \beta' \qquad \text{(Wechselwinkel)}$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma = 180° \qquad \text{(Denn } (\alpha' + \gamma) \text{ und } \beta' \text{ sind Nebenwinkel)}$$

In der unteren Gleichung können wir also α' durch α und β' mit β ersetzen, weil die Winkel ja jeweils gleich groß sind. Also erhalten wir:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

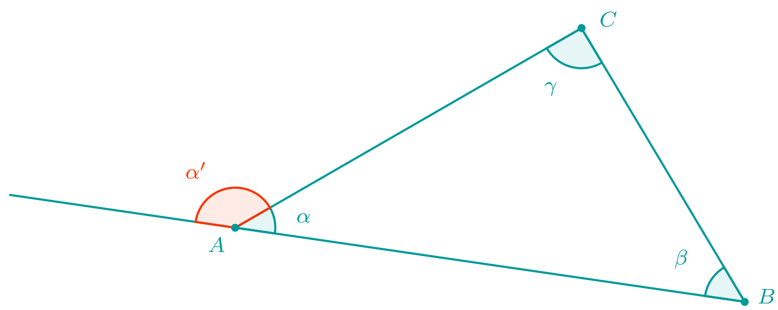
Dabei war das Ausgangsdreieck ΔABC beliebig. Also ist die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck 180°. $\square$

Dieser Satz ist der erste sehr wichtige Satz, den man in sehr vielen Aufgaben zur Winkelbestimmung verwenden kann. Davon abgesehen werden wir diesen Satz noch in sehr vielen späteren Beweisen verwenden. Als erste kleine Anwendung werden wir den Außenwinkelsatz beweisen:

Satz 4. *(Außenwinkelsatz)*

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln α, β und γ. Der Nebenwinkel von α heißt Außenwinkel von α. Es gilt: Der Außenwinkel von α ist gleich der Summe von β und γ.

Beweis. Es sei also ΔABC beliebiges Dreieck. Außerdem sei α' der Außenwinkel zu α, wie in der folgenden Zeichnung gezeigt:



Dann gilt:

$$\begin{aligned} 180° &= \alpha + \alpha' && \text{(Nebenwinkel)} \\ 180° &= \alpha + \beta + \gamma && \text{(wegen Innenwinkelsumme, Satz 3)} \end{aligned}$$

Nehmen wir beide Gleichungen zusammen, so erhalten wir:

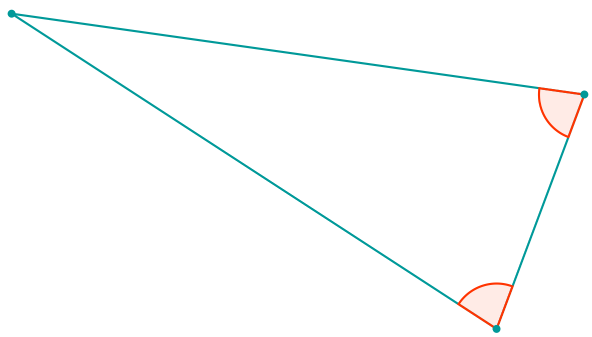
$$\alpha + \alpha' = \alpha + \beta + \gamma$$

Und daraus erhalten wir $\alpha' = \beta + \gamma$. Und dies war gerade die Behauptung. $\square$

An dieser Stelle wird für uns nun zum zweiten und letzten Mal eine Tatsache von Himmel fallen, die wir nicht beweisen werden. Alle zukünftigen Sätze werden wir dann aber aus unserem Wissen beweisen können.

Definition 1. *Ein Dreieck heißt* gleichschenklig*, wenn zwei seiner Seiten die gleiche Länge habe. Die beiden Winkel, die nicht durch die gleich langen Schenkel eingeschlossen werden, heißen* Basiswinkel.

Satz 5. *In einem gleichschenkligen Dreieck haben Basiswinkel die gleiche Größe.*



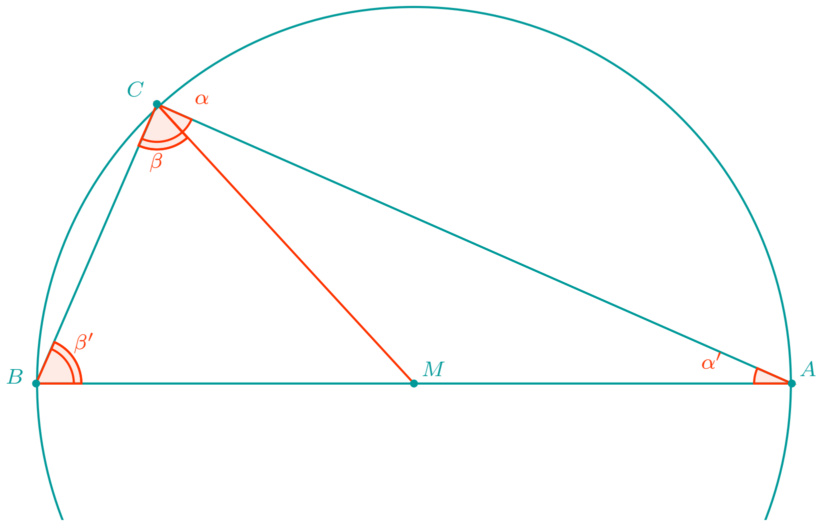
Im nächsten Kapitel werden wir diesen Satz an mehreren Stellen benutzen.

1.3 Winkel im Kreis

Das wichtige Ergebnis dieses Abschnitts wird der *Umfangswinkelsatz* sein. Zusammen mit dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck genügt er für fast alle Aufgaben zur Winkelbestimmung in Mathematikwettbewerben.

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der *Satz des Thales*. Und diesen werden wir nun zuerst beweisen, auch wenn wir ihn nachher durch den Umfangswinkelsatz geschenkt bekommen. Wir führen in diesem Abschnitt also zwei Beweise für den Satz des Thales.

Satz 6. *Gegeben sei ein Kreis k und ein Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises. (Also eine Strecke, deren Endpunkte auf der Kreislinie liegen und die durch den Mittelpunkt verläuft) Für einen beliebigen Punkt C auf k hat dann das Dreieck ΔABC einen rechten Winkel bei C.*



Beweis. Es sei (wie in der Skizze dargestellt) M der Mittelpunkt des Kreises. Weil alle drei Eckpunkte A, B und C auf dem Kreis liegen, haben die Strecken $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ die gleiche Länge. Also sind die Dreiecke ΔMAC und ΔMCB gleichschenklig.

Für die eingezeichneten Winkel gilt also: $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck).

Außerdem gilt für Innenwinkelsumme im Dreieck ΔABC:

$$180° = \alpha' + \beta' + (\alpha + \beta)$$

Und wenn wir in dieser Gleichung $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ einsetzen, so erhalten wir:

$$180° = 2\alpha + 2\beta$$

Und wenn wir beide Seiten der Gleichung durch 2 teilen:

$$90° = \alpha + \beta$$

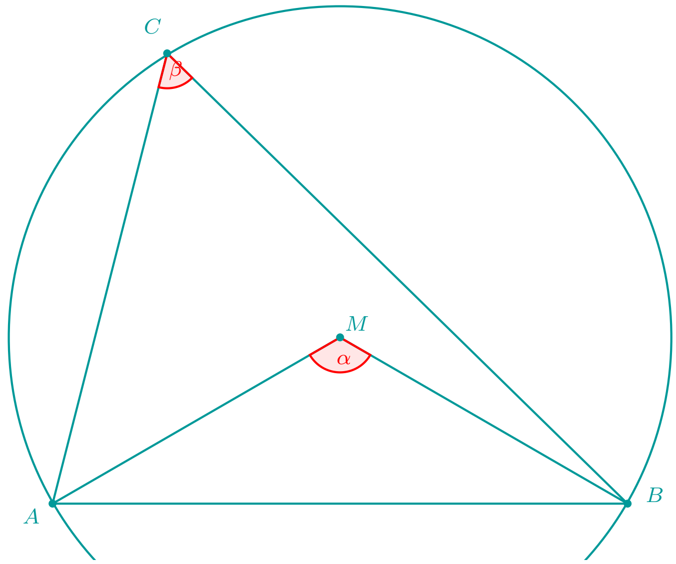
Also hat ΔABC bei C tatsächlich einen rechten Winkel. Dies war gerade die Behauptung. □

In diesem Beweis haben wir verwendet, dass die Strecke $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt M des Kreises k geht. In sehr vielen Fällen ist dies allerdings nicht der Fall. Der *Umfangswinkelsatz* liefert auch für diesen Fall eine sehr hilfreiche Aussage:

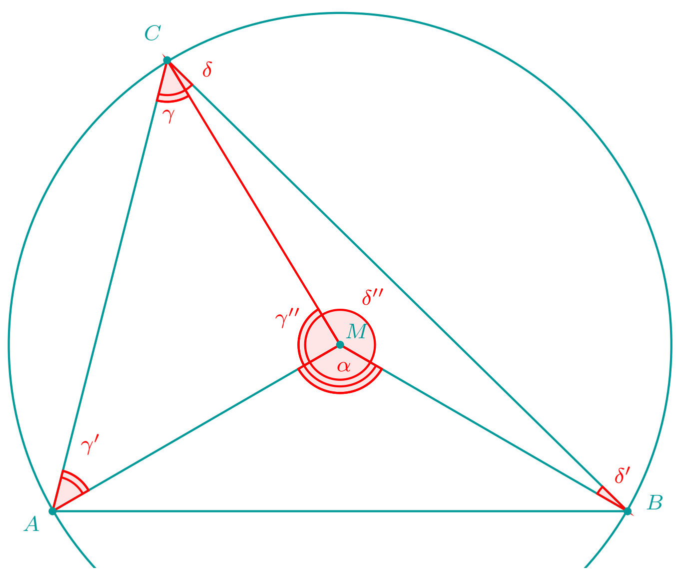
Satz 7. *Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und eine Kreissehne $\overline{AB}$. (Also eine Strecke, deren Endpunkte auf der Kreislinie liegen) Weiter sei C ein Punkt auf der Kreislinie, der auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegt wie M.*

Dann gilt: Der Mittelpunktswinkel über $\overline{AB}$ bei C ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel über $\overline{AB}$. Mit den Bezeichnungen aus der folgenden Skizze also:

$$\alpha = 2\beta$$



Beweis. Wir betrachten als Hilfslinie die Strecke $\overline{CM}$. Weiter bezeichnen γ, γ', γ'', δ, δ', δ'' die in der Skizze markierten Winkel:



Unser Ziel ist also, zu zeigen, dass $\alpha = 2 \cdot (\gamma + \delta)$.

Zunächst stellen wir fest: Die Dreiecke ΔAMC und ΔCMB sind gleichschenklig. Also gilt: $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \delta'$. Außerdem gilt für die Innenwinkelsumme in den beiden Dreiecken:

$$180^\circ = \gamma + \gamma' + \gamma''$$
$$180^\circ = \delta + \delta' + \delta''$$

Und wenn wir $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \delta'$ einsetzen:

$$180^\circ = 2\gamma + \gamma''$$
$$180^\circ = 2\delta + \delta''$$

Wir können nun in der ersten Gleichung auf beiden Seiten γ'' subtrahieren und in der zweiten Gleichung auf beiden Seiten Δ'' subtrahieren. Wir erhalten damit:

$$180^\circ - \gamma'' = 2\gamma$$
$$180^\circ - \delta'' = 2\delta$$

Wenn wir nun beide Gleichungen addieren, so erhalten wir:

$$360^\circ - \gamma'' - \delta'' = 2\gamma + 2\delta$$

Wir wissen: α, γ'' und δ'' ergänzen sich zu 360°. Also ist: $360^\circ - \gamma'' - \delta'' = \alpha$. Wenn wir dies in unsere letzte erhaltene Gleichung einsetzen, so bekommen wir:

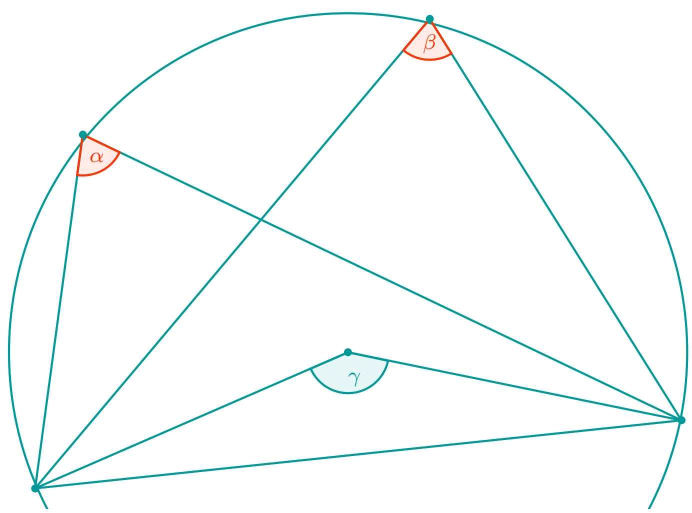
$$\alpha = 2\gamma + 2\delta$$

Und dies ist genau die Behauptung, die wir beweisen wollten. $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun sehr viele Aufgaben zur Winkelbestimmung lösen. Außerdem stellen wir fest: Wenn $\alpha = 180^\circ$, so erhalten wir gerade den Satz des Thales. Der Umfangswinkelsatz ist also eine Verallgemeinerung des Satzes des Thales.

Zuletzt ergibt sich noch ein Satz aus dem Umfangswinkelsatz. Diese Folgerung allein wird manchmal auch Umfangswinkelsatz genannt:

Satz 8. *Gegeben sei ein Kreis k und eine Kreissehne $\overline{AB}$. Dann haben alle Umfangswinkel über $\overline{AB}$ die gleiche Größe. Mit den Bezeichnungen aus der folgenden Skizze also: $\alpha = \beta$.*



Beweis. Nach dem Umfangswinkelsatz gilt:

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma$$
$$\beta = \frac{1}{2}\gamma$$

Wenn wir beide Gleichungen zusammennehmen, so erhalten wir $\alpha = \beta$. Und dies war gerade die Behauptung. □

1.4 Aufgaben

(Wird noch ergänzt)

2 Geometrie im Dreieck

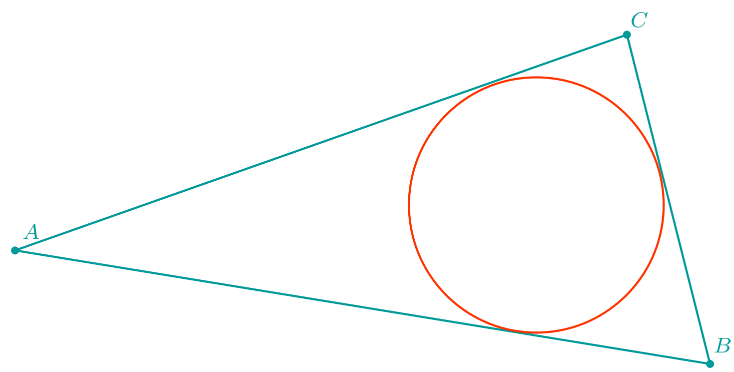
2.1 Ausgezeichnete Punkte

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit ausgezeichneten Punkten im Dreieck. So ist es zum Beispiel interessant, den *Mittelpunkt* eines Dreiecks zu betrachten. Dabei ist natürlich die Frage, was dieser Mittelpunkt nun genau sein soll. Es gibt mehrere sehr wichtige Punkte, die in der Mitte des Dreiecks liegen und allesamt den Namen Mittelpunkt verdient hätten. Diese Punkte werden wir nun kennenlernen.

2.1.1 Der Inkreis eines Dreiecks

Definition 2. *Es sei ΔABC ein Dreieck. Ein Kreis, der jede Seite von ΔABC einmal berührt, heißt* Inkreis *von ΔABC.*

So ist zum Beispiel im Folgenden ein Dreieck mit Inkreis dargestellt:



Man muss sich nun also fragen: Hat jedes Dreieck einen Inkreis? Und wenn ja: Wie konstruiert man ihn? Und gibt es möglicherweise zu einigen Dreiecken mehr als einen Inkreis?

Satz 9. *Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Dann gilt:*

(i) *ΔABC hat einen Inkreis.*

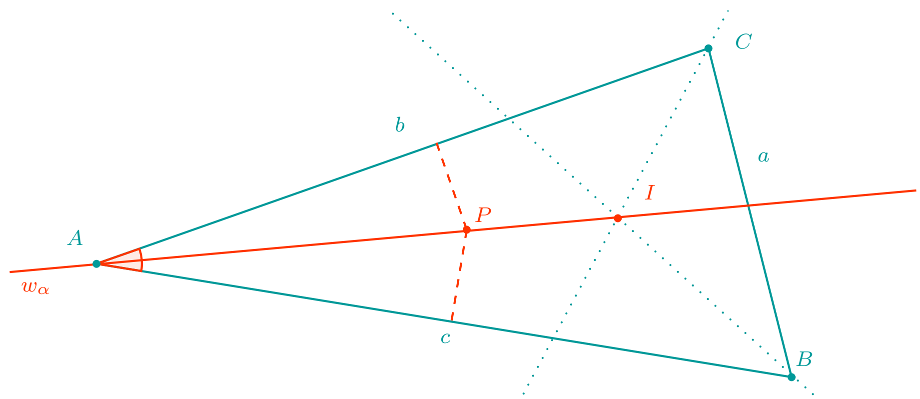
(ii) *Der Inkreis von ΔABC ist eindeutig.*

(iii) *Alle Winkelhalbierenden schneiden sich in genau einem Punkt.*

(iv) *Der Mittelpunkt des Inkreises von ΔABC ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.*

Beweis. Wir führen für ein beliebiges Dreieck eine Konstruktion durch und werden als eindeutiges Ergebnis den Inkreismittelpunkt erhalten. Wir zeigen damit alle vier Behauptungen auf einmal.

Sei also ΔABC ein beliebiges Dreieck. Wie üblich seien $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$. Weiter seien α, β und γ die Innenwinkel bei den Eckpunkten A, B und C. Es seien w_α, w_β, w_γ die Winkelhalbierenden der entsprechenden Winkel.



Wir bemerken nun folgendes: Jeder Punkt, der auf w_α liegt, hat von den Seiten b und c den gleichen Abstand. Im Bild ist das für einen zufälligen Punkt P, der auf w_α liegt, verdeutlicht. Außerdem: Jeder Punkt, der auf w_β liegt, hat von den Seiten a und c den gleichen Abstand.

- Es sei nun I der Schnittpunkt von w_α und w_β. Wir zeigen nun: I liegt auch auf w_γ. I hat denselben Stand zu den Dreiecksseiten a, b und c (wie oben gesagt). Also hat insbesondere I den gleichen Abstand zu a und b. Allerdings: w_γ ist genau die Gerade, die alle Punkte entält, die von a und b den gleichen Abstand haben. Also enthält w_γ auch den Punkt I. Also liegt schneiden sich w_α, w_β und w_γ in einem Punkt I. Das zeigt die Behauptung (iii).

- I ist gleich weit von allen Dreiecksseiten entfernt. Der Kreis, der diese Entfernung als Radius hat, ist Inkreis in ΔABC. Also hat ΔABC einen Inkreis. Das zeigt die Behauptungen (i) und (iv).

- I ist der einzige Punkt, der zu allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat. Kein anderer Punkt kann auf allen Winkelhalbierenden gleichzeitig liegen. Und ein Punkt, der beispielsweise nicht auf w_α liegt, hat zu den Seiten b und c verschiedenen Abstand. Also kann dieser Punkt nicht Inkreismittelpunkt sein. Also ist I der einzig mögliche Inkreismittelpunkt. Weiterhin sehen wir, dass der Inkreisradius eindeutig ist. Also ist für ΔABC der Inkreis eindeutig. Das zeigt die Behauptung (ii).

$\square$

Ist nun also ΔABC ein beliebiges Dreieck, so konstruieren wir den Inkreis folgenderma-ßen:

(i) Konstruiere die Winkelhalbierenden w_α und w_β. Ihr Schnittpunkt sei I.

(ii) Konstruiere die Höhe durch I auf a. Der Höhenfußpunkt sei F_a.

(iii) Schlage einen Kreis mit Mittelpunkt I durch F_a. Dies ist der gesuchte Inkreis.

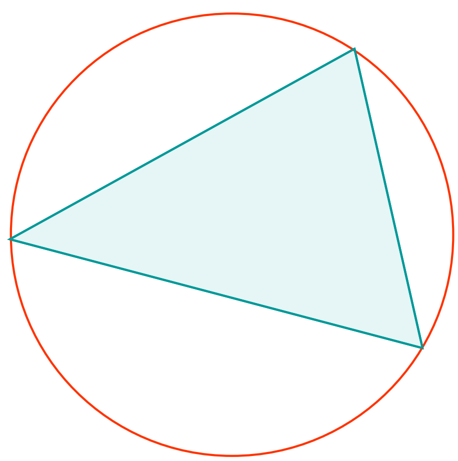
Dabei kann man natürlich in Schritt (i) auch die Winkelhalbierende w_γ benutzen. Und in Schritt (ii) kann man auch die Höhe auf b oder c konstruieren. Diese haben alle dieselbe Länge.

2.1.2 Der Umkreis eines Dreiecks

Der Inkreis hat große mathematische Bedeutung und wird für den Beweis der Heronschen Dreiecksformel später wichtig werden. Aus praktischen Gründen ist man häufig auch am *Umkreis* eines Dreiecks interessiert.

Definition 3. *Es sei ΔABC ein Dreieck. Ein Kreis, auf dem alle Eckpunkte von ΔABC liegen, heißt* Umkreis *von ΔABC.*

So ist zum Beispiel im Folgenden ein Dreieck mit seinem Umkreis dargestellt:



Wir stellen uns nun die gleichen Fragen wir für den Inkreis: Hat jedes Dreieck einen Umkreis? Und: Wie können wir den Umkreis konstruieren? Wie beim Inkreis muss man auch hier nur den Schnittpunkt der richtigen Geraden betrachten:

Satz 10. *Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Dann gilt:*

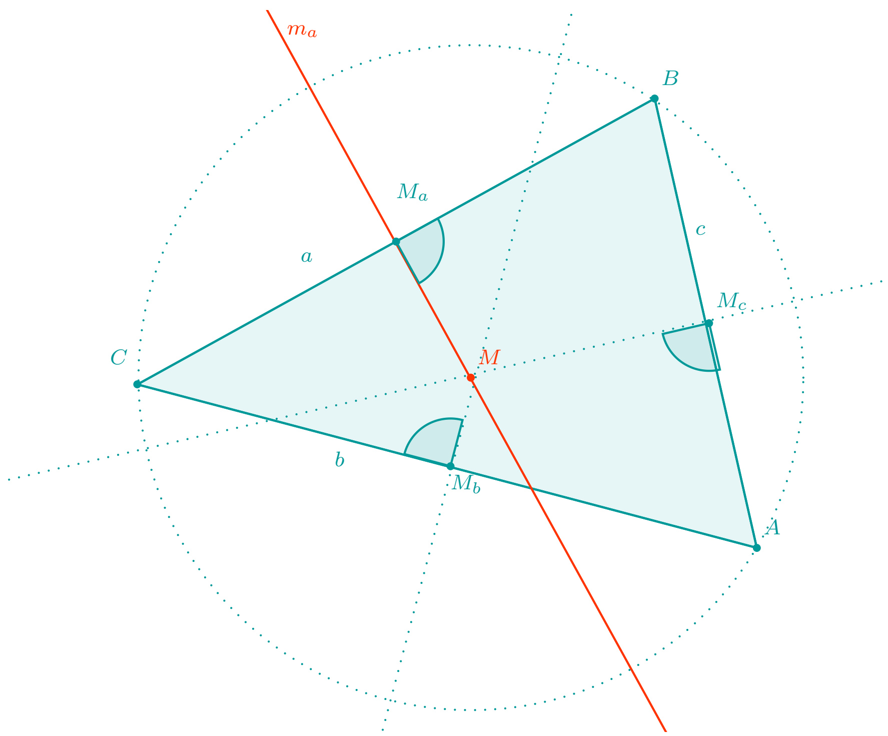
(i) ΔABC hat einen Umkreis.

(ii) Der Umkreis von ΔABC ist eindeutig.

(iii) Alle Mittelsenkrechten von ΔABC schneiden sich in einem Punkt.

(iv) Der Mittelpunkt des Umkreises von ΔABC ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Beweis. Wir gehen sehr ähnlich wie im Beweis des vorigen Satzes vor. Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Es seien M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten a, b und c. Es seien m_a, m_b, m_c die Mittelsenkrechten der Seiten a, b und c. (Das heißt: m_a steht senkrecht auf a und geht durch den Punkt M_a)



Dann sehen wir: Jeder Punkt auf m_a hat von den Eckpunkten B und C den gleichen Abstand. Genauso hat jeder Punkt auf m_b den gleichen Abstand von A und C. Es sei nun M der Mittelpunkt von m_a und m_b. Dann gilt:

- M hat von allen Eckpunkten den gleichen Abstand. Insbesondere hat M also den gleichen Abstand von A und B. Alle Punkte, für die das zutrifft, liegen auf m_c. Also muss auch M auf m_c liegen. Das heißt: m_a, m_b und m_c schneiden sich in einem Punkt M. Das beweist Behauptung (iii).

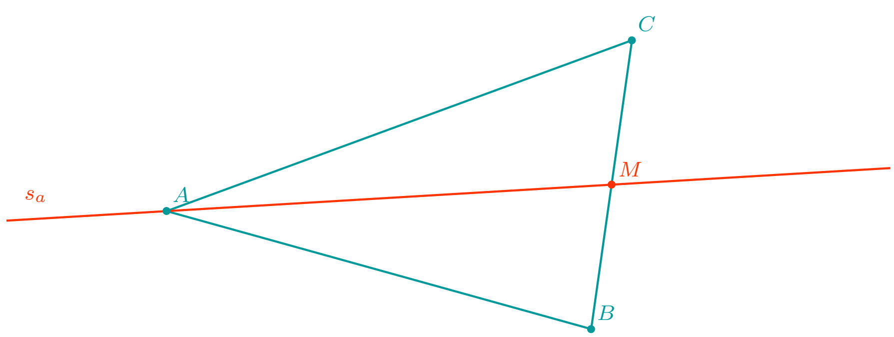
- M hat von allen Eckpunkten den gleichen Abstand. Ein Kreis mit diesem Abstand als Radius geht also durch alle Eckpunkte. Dieser Kreis ist also der gesuchte Umkreis. Also hat ΔABC einen Umkreis. Dies beweist die Behauptungen (i) und (iv).

- Es sei nun $\tilde{M}$ irgendein beliebiger anderer Punkt, der nicht M ist. Das heißt: $\tilde{M}$ liegt auf mindestens einer der Mittelsenkrechten *nicht*. Angenommen nun, $\tilde{M}$ liegt nicht auf m_a. Das heißt: $\tilde{M}$ hat zu B und C unterschiedlichen Abstand. Also kann $\tilde{M}$ nicht Umkreismittelpunkt sein. (Falls $\tilde{M}$ zwar auf m_a, aber dafür nicht auf m_b oder m_c liegt, erhalten wir den gleichen Widerspruch) Nun war aber $\tilde{M}$ beliebig. Das heißt: Nur M kann Umkreismittelpunkt sein, also ist der Umkreismittelpunkt eindeutig. Zusätzlich ist auch der Umkreisradius eindeutig. Also ist der Umkreis von ΔABC eindeutig. Das beweist Behauptung (ii).

□

2.1.3 Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks

Definition 4. *Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC. Es sei s_a diejenige Gerade, die durch den Punkt A geht und durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ geht. Dann heißt s_a Seitenhalbierende der Seite $\overline{BC}$. Für die anderen beiden Dreiecksseiten erhalten wir s_b und s_c.*

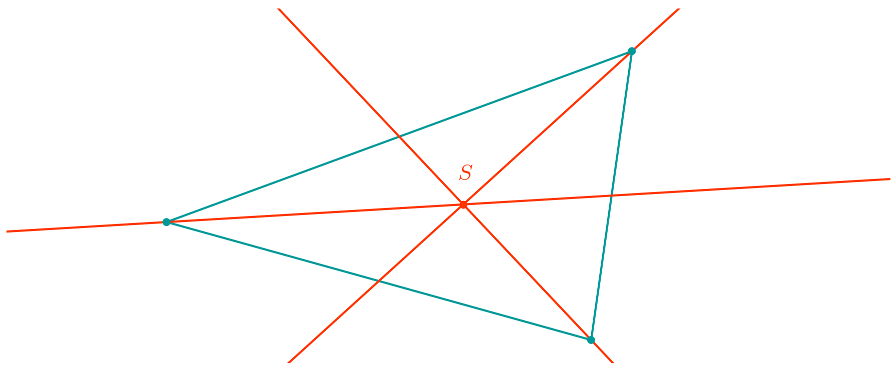


Für die Seitenhalbierenden in einem Dreieck gilt der folgende Satz:

Satz 11. *Sei ΔABC ein Dreieck. Dann schneiden sich s_a, s_b und s_c in einem gemeinsamen Punkt S.*

Der Beweis zu diesem Satz ist recht kompliziert und benötigt die *Ähnlichkeit* von Dreiecken. Dies ist ein Thema der Klassenstufe 8. Das Ergebnis ist allerdings sehr wichtig, denn dieser Schnittpunkt ist von großem Interesse auch für die Anwendungen der Mathematik.

Definition 5. *Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißt* Schwerpunkt*.*

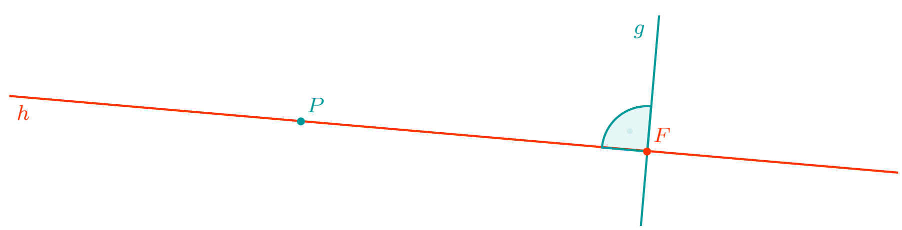


Dabei verrät der Name des Punktes schon, warum er so wichtig ist: Dieser Punkt ist nämlich gerade der Masseschwerpunkt des Dreiecks. Das heißt: Ist ein Dreieck aus gleichmäßig dicker Pappe gegeben, so kann man das Dreieck auf einer Nadelspitze balancieren, indem man eine Nadel in den Schwerpunkt des Dreiecks einsticht.

Auch diese Erkenntnis ist kompliziert zu beweisen. Man muss dafür zunächst das *Balancieren* mathematisch formulieren und dafür werden einige Kenntnisse aus der Physik benötigt. Eine der Übungsaufgaben beweist diese Aussage allerdings schon teilweise.

2.1.4 Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks

Wir haben im ersten Kapitel bereits Höhen von Punkten auf Geraden betrachtet. Eine Höhe auf eine Gerade g durch einen Punkt P ist diejenige Gerade, die senkrecht auf g steht und durch den Punkt P verläuft.



Sei nun ein beliebiges Dreieck ΔABC gegeben. Dann können wir die Höhe durch den Eckpunkt A auf die Dreiecksseite $\overline{BC}$ betrachten. Wir nennen diese Höhe h_a. Für die anderen beiden Eckpunkte erhalten wir h_b und h_c.

Und mittlerweile ist es nur noch eine kleine Überraschung: Wie Winkelhalbierende, Mittelsenkrechten und Seitenhalbierende schneiden sich auch die Höhen in einem Punkt.

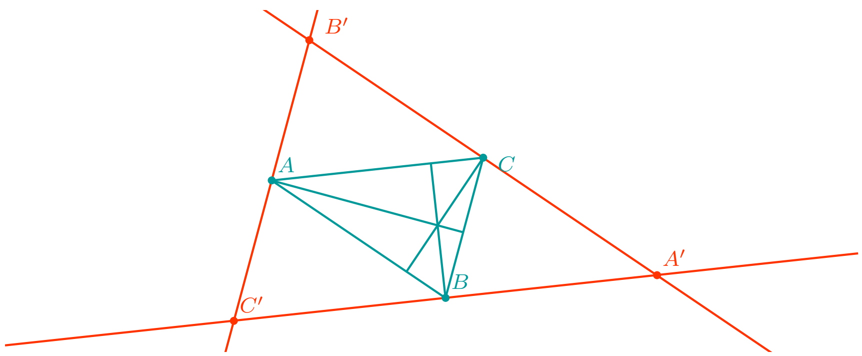
Für die Höhen können wir diese Tatsache auch beweisen. Wir müssen dafür aber etwas Wissen über Parallelogramme verwenden, das wir erst später beweisen werden.

Satz 12. *Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Dann schneiden sich h_a, h_b und h_c in einem gemeinsamen Punkt H.*

Beweis. Wie betrachten die folgenden Hilfslinien:

- Eine Parallele zu $\overline{AB}$ durch C
- Eine Parallele zu $\overline{BC}$ durch A
- Eine Parallele zu $\overline{AC}$ durch B

Diese drei Parallelen (im Bild orange) bilden dann ein neues Dreieck $\Delta A'B'C'$:



Wir wissen nun: h_a steht senkrecht auf $\overline{BC}$, weil so die Höhe definiert ist. Weil $\overline{B'C'}$ parallel ist zu $\overline{BC}$, so steht h_a auch senkrecht auf $\overline{B'C'}$.

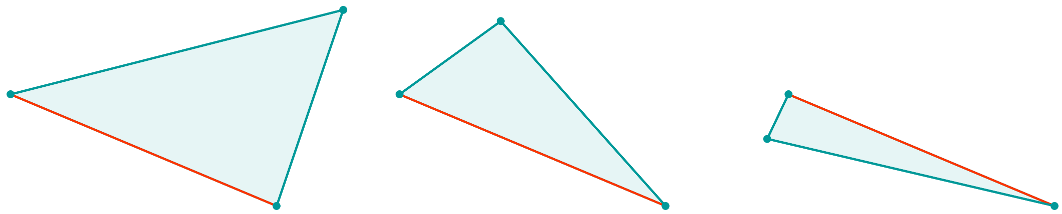
Außerdem: $ABCB'$ ist ein Parallelogramm. Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. Also haben $\overline{BC}$ und $\overline{AB'}$ dieselbe Länge. Im Parallelogramm $BCAC'$ sehen wir: Auch $\overline{BC}$ und $\overline{AC'}$ haben dieselbe Länge. Also haben auch $\overline{AB'}$ und $\overline{AC'}$ dieselbe Länge. Also ist A der Mittelpunkt von $\overline{B'C'}$.

Also ist die Höhe h_a des Ausgangsdreiecks ΔABC die Mittelsenkrechte des neuen Dreiecks $\Delta A'B'C'$.

Analog sehen wir, dass auch h_b und h_c nun Mittelsenkrechten des neuen Dreiecks $\Delta A'B'C'$ sind. Von den Mittelsenkrechten in $\Delta A'B'C'$ wissen wir nach Satz 10: Sie schneiden sich in einem Punkt. Also schneiden sich die Höhen des Ausgangsdreiecks auch in gerade diesem Punkt. □

2.2 Konstruktion von Dreiecken, Kongruenzsätze

Im folgenden Abschnitt fragen wir uns, auf welche Arten man ein Dreieck festlegen kann. So ist zum Beispiel klar: Legt man nur eine Seitenlänge fest, so gibt es viele verschiedene Dreiecke, die diese Forderung erfüllen:

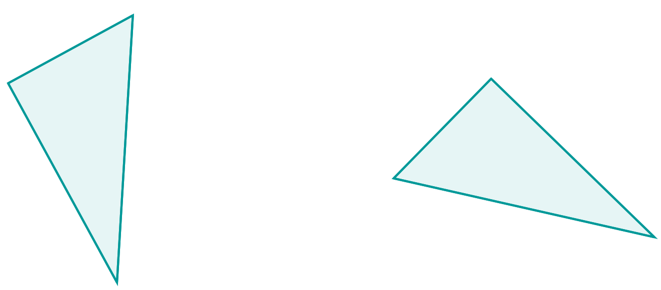


Legt man allerdings drei Winkel fest, so gibt es weniger verschiedene Dreiecke, die diese Forderung erfüllen. Allerdings können wir allein dadurch ein Dreieck noch nicht eindeutig festlegen.

Zunächst erklären wir, was *festlegen* genau heißen soll.

Definition 6. *Zwei Dreiecke ΔABC und ΔDEF heißen* kongruent*, wenn sie durch Drehung und/oder Spiegelung ineinander überführbar sind. Wir schreiben dafür auch $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$.*

So sind zum Beispiel die folgenden beiden Dreiecke zueinander kongruent:



Die Frage ist nun also: Welche Teile eines Dreiecks müssen wir festlegen, damit alle Dreiecke, die diese Teile enthalten, zueinander kongruent sind? Die wichtigsten Aussagen darüber sind im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 13. *(Kongruenzsätze)*

(1) (Seite–Seite–Seite) *Alle Dreiecke, die in drei Seitenlängen übereinstimmen, sind kongruent.*

(2) (Seite–Winkel–Seite) *Alle Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in der Größe des eingeschlossenen Innenwinkels übereinstimmen, sind kongruent.*

(3) (Winkel–Seite–Winkel) *Alle Dreiecke, die in einer Seitenlänge und in den Größen der dort anliegenden Innenwinkel übereinstimmen, sind kongruent.*

(4) (Seite–Seite–Winkel) *Alle Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, welcher der längeren der beiden Seiten gegenüberliegt, sind kongruent.*

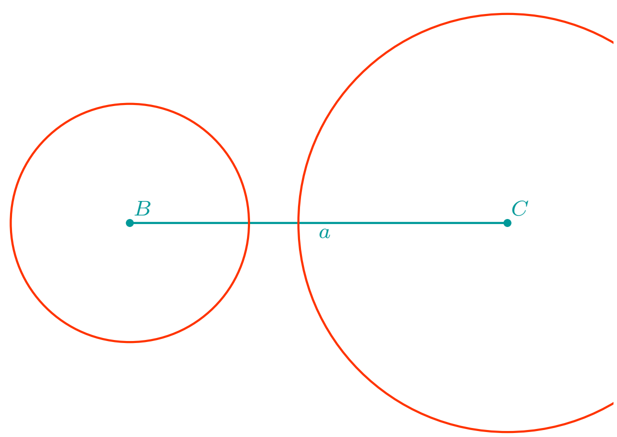
Beweis. Wir beweisen hier die Punkte (1) und (4). Die übrigen Punkte bleiben als Übungsaufgaben.

(1) Seien drei Längen (positive Zahlen) a, b, c gegeben. Wir zeigen: Alle Dreiecke, die wir mit solchen Seitenlängen konstruieren können, sind zueinander kongruent. Wir geben nun eine Konstruktionsbeschreibung an. Die einzelnen Schritte der Konstruktion sind mit (i), (ii), (iii) und so weiter nummeriert.

   (i) Zeichnen eine Strecke mit Länge a ein. Wir benennen die Endpunkte von a mit B und C.

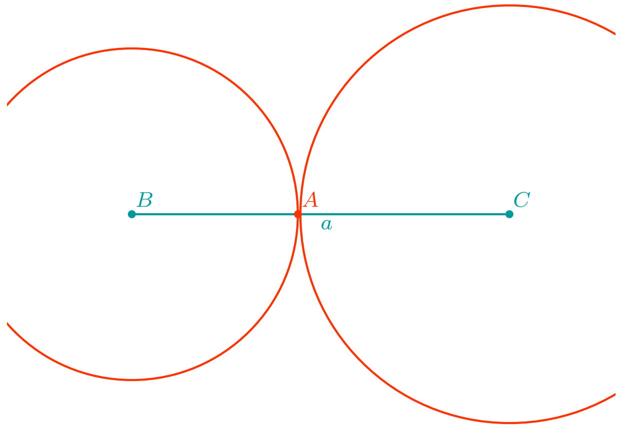
   (ii) Zeichnen Kreis um B mit Radius c, Kreis um C mit Radius b. Dann können drei mögliche Fälle eintreten:

      (Fall I) Die beiden Kreise haben keinen Schnittpunkt.



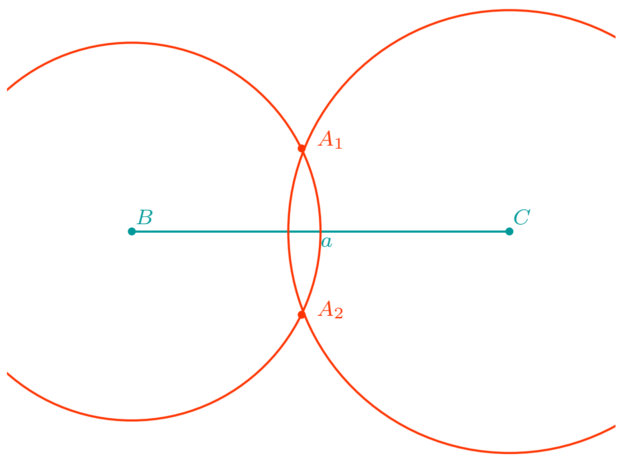
      Dann kann es kein Dreieck mit den geforderten Seitenlängen geben. Also gilt die Behauptung in diesem Fall.

      (Fall II) Die beiden Kreise haben genau einen Schnittpunkt.



Es sei A der Schnittpunkt der beiden Kreise. Dann ist das konstruierte Dreieck eindeutig.

(Fall III) Die beiden Kreise haben genau zwei Schnittpunkte.



Es seien A^1, A^2 die beiden Schnittpunkte. Dann ist ΔA^1BC gerade die Spiegelung von ΔA^2BC an der Strecke a. Also insbesondere $\Delta A^1BC \simeq \Delta A^2BC$.

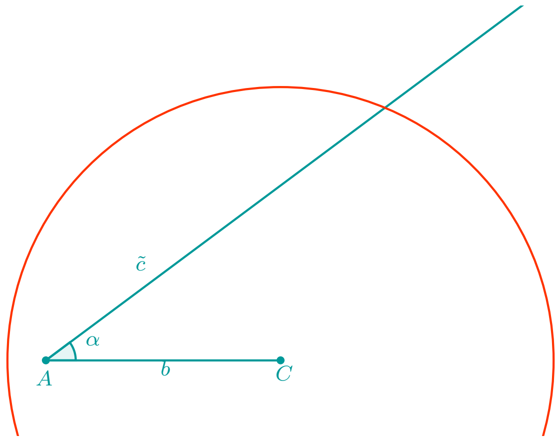
Also sind alle Dreiecke, die wir aus gegebenen Seitenlängen konstruieren können, zueinander kongruent.

(4) Wir gehen wie in Punkt (1) vor: Es seien zwei Längen a und b gegeben. Dabei sei $a \geq b$. Weiter sei α ein Winkel. Wir zeigen: Alle Dreiecke, die a und b als Seitenlängen und α als Winkel haben, der a gegenüberliegt, sind kongruent. Also: Alle Dreiecke, die wir diesen Forderungen entsprechend konstruieren können, sind kongruent.

(i) Zeichne eine Strecke mit Länge b ein. Es seien A und C die Endpunkte von b.

(ii) Trage den Winkel α an b in A an. Es sei $\tilde{c}$ der freie Schenkel an α.

(iii) Schlage einen Kreis um C mit Radius a. Dieser Kreis hat mit $\tilde{c}$ genau einen Schnittpunkt, weil ja $a \geq b$. Wir nennen diesen Schnittpunkt B.



(Falls $a = b$, so hat der kreis um C genau genommen zwei Schnittpunkte mit $\tilde{c}$. Der eine ist A, der andere ein weiterer Punkt. Würde man die Konstruktion mit A weiterführen, so würde man eine Figur erhalten, in dem zwei Eckpunkte aufeinander liegen, das wäre dann kein Dreieck. Wir betrachten in dem Fall also nur den anderen Punkt, der nicht A ist)

Das Dreieck ΔABC erfüllt alle Forderungen. Bei der Konstruktion hatten wir an keine Stelle eine Wahlfreiheit, also ist die Konstruktion eindeutig.

□

Dies sind die aus dem Schulunterricht bekannten Kongruenzsätze. Es gibt allerdings auch noch viele weitere Möglichkeiten, mit denen man ein Dreieck eindeutig festlegen kann. Der folgende Satz gibt ein Beispiel dafür.

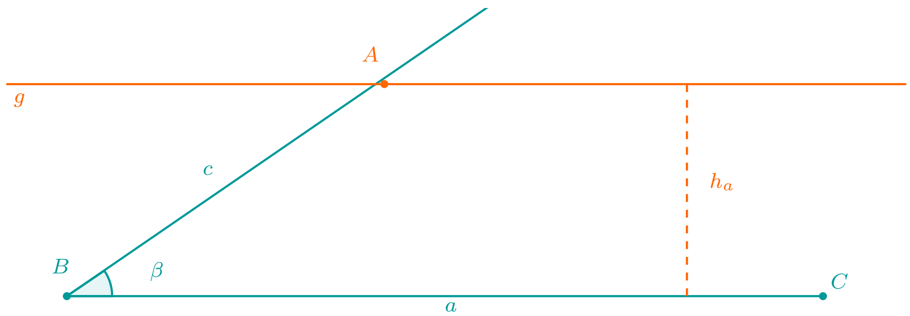
Satz 14. *Alle Dreiecke, die in einer Seitenlänge, der Länge der Höhe auf diese Seite und der Größe eines an die Seite anliegenden Winkels übereinstimmen, sind kongruent.*

Beweis. Wir gehen wie im Beweis zum vorigen Satz vor: Seien a, h_a zwei Längen und β ein Winkel. Wir möchten nun zeigen: Konstruieren wir ein Dreieck, das a als Seitenlänge, h_a als Länge der Höhe auf a hat und β als Größe eines an a anliegenden Winkels hat, so ist die Konstruktion eindeutig.

(i) Zeichne eine Strecke mit Länge a ein. Es seien B und C die Endpunkte von a.

(ii) Trage den Winkel β in B an a an. Es sei $\tilde{c}$ der freie Schenkel an β.

(iii) Zeichne eine Parallele zu a mit Abstand h_a auf die Seite von a, auf der β angetragen ist. Diese Parallele sei g.



(iv) Dann haben g und $\tilde{c}$ genau einen Schnittpunkt. Dieser sei A.

Dann erfüllt das Dreieck ΔABC alle Forderungen. Bei der Konstruktion hatten wir an keiner Stelle ein Wahlfreiheit. Also ist die Konstruktion eindeutig. $\square$

Beim Bearbeiten von Geometrieaufgaben sollte man die obigen Kongruenzsätze aus dem ersten Satz stets im Kopf haben (Satz 13). Weitere Kongruenzsätze (z.B. Satz 14) sind gute Übungsaufgaben für spätere Konstruktionsaufgaben, aber wenig wichtig für die weitere Geometrie der Vierecke und Kreise.

2.3 Aufgaben

2.1) Beweise die folgenden Aussagen:

(a) *(Kongruenzsatz Seite–Winkel–Seite)* Alle Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in der Größe des eingeschlossenen Innenwinkels übereinstimmen, sind kongruent.

(b) *(Kongruenzsatz Winkel–Seite–Winkel)* Alle Dreiecke, die in einer Seitenlänge und in den Größen der dort anliegenden Innenwinkel übereinstimmen, sind kongruent.

(c) Alle Dreiecke, die in einer Seitenlänge, der Länge der Höhe auf diese Seite und der Größe eines anliegenden Winkels übereinstimmen, sind kongruent.

2.2) Zeige: Zwei Dreiecke, die in Umkreisradius und zwei Seitenlängen übereinstimmen, sind nicht notwendigerweise kongruent.

2.3*) Von einem Dreieck sind zwei Innenwinkel α und β, sowie sein Inkreisradius r bekannt. Konstruiere aus diesen Angaben das Dreieck. Ist die Konstruktion eindeutig?

2.4) Gegeben sind drei Längen a, b und s_a. Konstruiere ein Dreieck, in dem eine Seite die Länge a hat, eine Seite die Länge b hat und die Seitenhalbierende vom Punkt A auf die Seite a die Länge s_a hat. Ist die Konstruktion eindeutig?

2.5*) Konstruiere ein Dreieck ΔABC, dessen Innenwinkel beim Eckpunkt B die Größe $\beta = 80°$ hat. Weiter soll die Höhe vom Punkt C auf die gegenüberliegende Seite die Länge $h_c = 4,8cm$ haben und der Radius des Inkreises soll $r = 1,6cm$ sein.

2.6) Aus der Mathematik-Olympiade, Aufgabe 510722:

Gegeben sind zwei Strecken mit den Streckenlängen $a = 13$cm und $b = 7$cm. Aus diesen beiden Strecken sollen unter Hinzunahme einer dritten Strecke Dreiecke gezeichnet werden. Alle Größen werden in Zentimeter angegeben.

(a) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl p der Länge dieser Strecke eine Primzahl ist.

(b) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl q der Länge dieser Strecke derart gewählt wird, dass die Maßzahl u des Umfangs des Dreiecks eine Primzahl ist.

2.7) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC. Zeige: Die Seitenhalbierende s_a teilt die gesamte Dreiecksfläche in zwei Teildreiecke, deren Flächeninhalt gleich groß ist.

(Damit weiß man dann: Zu beiden Seiten des Schwerpunkts liegt gleich viel Dreiecksmasse. Also können wir tatsächlich vermuten, dass das Dreieck im Schwerpunkt ausbalanciert ist.)

3 Vierecksgeometrie

3.1 Das Haus der Vierecke – Definitionen und elementare Eigenschaften

Im folgenden werden wir uns mit Vierecken beschäftigen. Dabei werden wir die Vierecke definieren und aus ihrer Definition Eigenschaften beweisen. Dabei wollen wir besonders darauf achten, die Definition von bewiesenen Eigenschaften zu trennen.

Häufig wird beides über einen Haufen geschmissen. So wissen viele: In einem Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und zwei Paare benachbarter Seiten haben dieselbe Länge. Was davon ist Definition? Was folgt woraus? Diese und andere Fragen werden wir beantworten.

3.1.1 Das Parallelogramm

Als erstes Viereck werden wir das Parallelogramm genauer kennenlernen.

Definition 7. *Ein Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind, heißt* Parallelogramm*.*

Aus der Definition kann man sofort einige Eigenschaften folgern. Anschaulich sind diese Eigenschaften recht klar. Wir können nun aber die bereits bekannten Sätze verwenden, um sie zu beweisen.

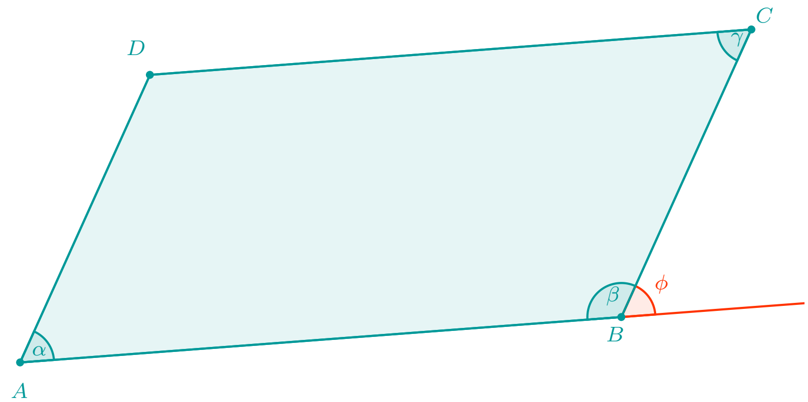
Satz 15. *(Charakterisierung des Parallelogramms 1) In einem Parallelogramm $ABCD$ gilt:*

(i) In $ABCD$ ergänzen sich benachbarte Winkel zu $180°$.

(ii) In $ABCD$ haben gegenüberliegende Winkel die gleiche Größe.

(iii) In $ABCD$ haben gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge.

Beweis. Sei also $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm. Als Hilfslinie betrachten wir die Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Eckpunkt B hinaus. Wir verwenden alle Bezeichnungen wir in der folgenden Skizze:



Wir beweisen nun die ersten beiden Aussage:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi && \text{(Stufenwinkel)} \\ 180^\circ &= \beta + \phi && \text{(Nebenwinkel)} \end{aligned}$$

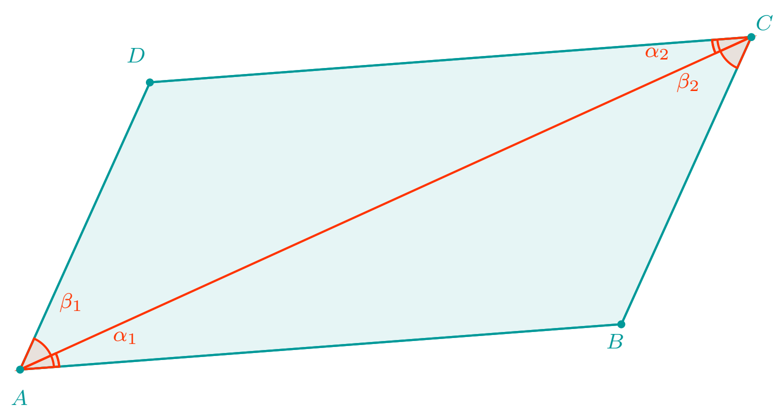
Und wenn wir ϕ in der zweiten Formel durch α aus der ersten Formel ersetzen, erhalten wir $180^\circ = \alpha + \beta$. Analog können wir die Behauptung auch für γ und δ zeigen.

(ii) Hier gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi && \text{(Stufenwinkel)} \\ \phi &= \gamma && \text{(Wechselwinkel)} \end{aligned}$$

Und beide Gleichungen zusammen ergeben $\alpha = \gamma$. Analog erhalten wir auch $\beta = \delta$. Also gilt auch diese Behauptung.

Um die dritte Aussage zu beweisen, betrachten wir als Hilfslinie die Diagonale $\overline{AC}$:



(iii) Wir betrachten die beiden Dreiecke ΔABC und ΔACD. Nach Wechselwinkelsatz gilt $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$. Außerdem haben beide Dreiecke die Strecke $\overline{AC}$ als gemeinsame Seite.

Damit gilt nach dem Kongruenzsatz Winkel–Seite–Winkel: $\Delta ABC \simeq \Delta ACD$. Also gilt insbesondere, dass die Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ die gleiche Länge haben.

□

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. Also genauer gesagt:

Satz 16. *(Charakterisierung des Parallelogramms 2) Es sei $ABCD$ ein Viereck.*

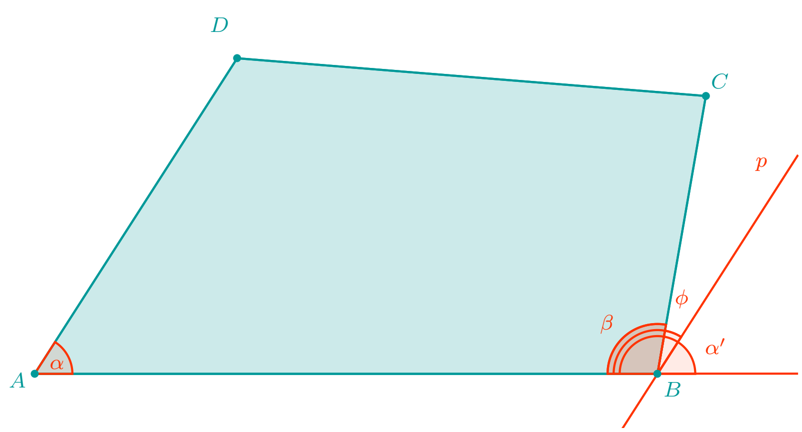
(i) Ergänzen sich in $ABCD$ benachbarte Winkel zu $180°$, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

(ii) Haben in $ABCD$ gegenüberliegende Winkel die gleiche Größe, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

(iii) Haben in $ABCD$ gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Beweis. Wir beweisen hier nur die Punkte (i) und (iii). Der Punkt (ii) bleibt als Übungsaufgabe.

(i) In $ABCD$ betrachten wir die Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über B hinaus und eine Parallele zur Seite $\overline{AD}$ durch B. Diese Parallele sei p:



Dabei ist das Viereck in der Skizze extra beliebig gewählt. Wir wissen ja noch nicht, dass $ABCD$ tatsächlich ein Parallelogramm ist, sondern möchten das erst zeigen!

Mit den Bezeichnungen aus der Zeichnung gilt nur $\alpha = \alpha'$ (Stufenwinkel). Außerdem gilt:

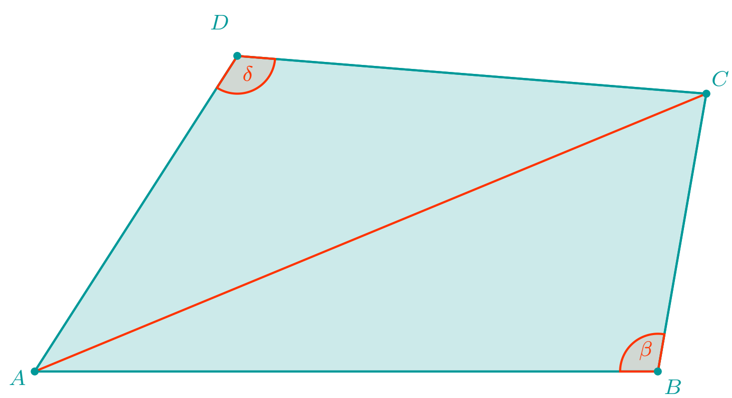
$$\alpha' + \phi + \beta = 180^\circ \qquad \text{(gestreckter Winkel)}$$
$$\alpha' + \beta = 180^\circ \qquad \text{(davon sind wir ausgegangen)}$$

Also muss $\phi = 0$ sein. Also muss $p = \overline{BC}$ sein. Also muss $\overline{BC}$ parallel zu $\overline{AD}$ sein.

Analog können wir schließen: $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind parallel zueinander. Also ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

(ii) Dieser Punkt wird hier nicht bewiesen, sondern bleibt als Übungsaufgabe.

(iii) Wir betrachten als Hilfslinie diesmal die Diagonale $\overline{AC}$:



Dann gilt: Die Dreiecke ΔABC und ΔACD stimmen in drei Seitenlängen überein. Nach Voraussetzung sind nämlich $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$. Und schließlich ist die Dreiecksseite $\overline{AC}$ in beiden Dreiecken einfach dieselbe Strecke.

Nach dem Kongruenzsatz Seite–Seite–Seite sind beide Dreiecke also kongruent. Also gilt insbesondere $\beta = \delta$.

Betrachten wir nun nicht die Diagonale $\overline{AC}$, sondern die Diagonale $\overline{BD}$, so erhalten wir, dass auch die anderen beiden, gegenüberliegenden Innenwinkel von $ABCD$ gleich groß sind.

In $ABCD$ sind also gegenüberliegende Winkel gleich groß. Damit ist $ABCD$ nach Punkt (ii) ein Parallelogramm.

□

Nehmen wir die Aussagen von beiden Sätzen zusammen, so erhalten wir:

Satz 17. *(Charakterisierung des Parallelogramms 3) Es sei $ABCD$ ein Viereck. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) ABCD ist ein Parallelogramm.

(ii) In ABCD ergänzen sich benachbarte Winkel zu $180°$*.*

(iii) In ABCD haben gegenüberliegende Winkel die gleiche Größe.

(iv) In ABCD haben gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge.

Beweis. Nach Satz 15 gilt: (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii), (i) $\Rightarrow$ (iv).

Nach Satz 16 gilt: (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Rightarrow$ (i).

Zusammengenommen bedeutet dies: (i) $\Leftrightarrow$ (ii), (i) $\Leftrightarrow$ (iii), (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Es sind also (ii), (iii), (iv) äquivalent zu (i). Also sind sie auch untereinander äquivalent. Also sind alle Aussagen zueienander äquivalent. □

Bemerkung: Das Ergebnis aus Satz 17 hätten wir auch mit etwas weniger Arbeit erhalten können. Seien nämlich (i), (ii), (iii), (iv) die Aussagen wie im Satz, dann hätte es auch genügt, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) zu zeigen.

Hätten wir also zu Anfang des Kapitels definiert *"Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem sich benachbarte Winkel zu* $180°$ *ergänzen"*, so würden wir damit genau die gleichen Vierecke beschreiben wie mit unserer ursprünglichen Definition.

Zuletzt geben wir noch eine Charakterisierung des Parallelogramms an. Der Beweis dieser Behauptung bleibt als Übungsaufgabe:

Satz 18. *Es sei ABCD ein Viereck. Dann sind äquivalent:*

(i) ABCD ist ein Parallelogramm.

(ii) Die Diagonalen in ABCD halbieren sich.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Die Richtung "$\Rightarrow$" ist zwar nicht leicht zu beweisen, aber keine große Überraschung. Die Rückrichtung "$\Leftarrow$" dagegen ist den meisten Schülern unbekannt. (Dabei ist diese Richtung sogar viel leichter zu beweisen)

3.2 Aufgaben

3.1) Aus der Mathematik-Olympiade, Aufgabe `480724`:

Wir betrachten ein Viereck $ABCD$, von dem gefordert wird:

(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

(a) Außerdem wird vorausgesetzt:

(2) H ist ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$.

(3) Die durch B verlaufende Parallele zu $\overline{DH}$ schneidet die Seite $\overline{CD}$ im Punkt K.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{BH}$ und $\overline{DK}$ stets gleich lang sind und dass die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{HK}$ den gleichen Mittelpunkt haben.

(b) An Stelle der Voraussetzungen (2) und (3) aus Teilaufgabe (a) wird über das Parallelogramm $ABCD$ nun vorausgesetzt:

(2*) Die Halbierenden der Winkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ schneiden einander in einem Punkt auf der Seite $\overline{CD}$. Dieser Punkt sei mit E bezeichnet.

(3*) Die Strecke $\overline{AE}$ hat eine Länge von 6cm und die Strecke $\overline{BE}$ hat eine Länge von 4cm.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

3.2) Gib einen Beweis für Satz 18 an.

3.3) Aus der ersten (!) Mathematik-Olympiade, Aufgabe `010715`:

Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:

a) zwei benachbarte Seiten,

b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,

c) beide Diagonalen,

d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,

e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?

3.4) Aus der Mathematik-Olympiade, Aufgabe `310723`:

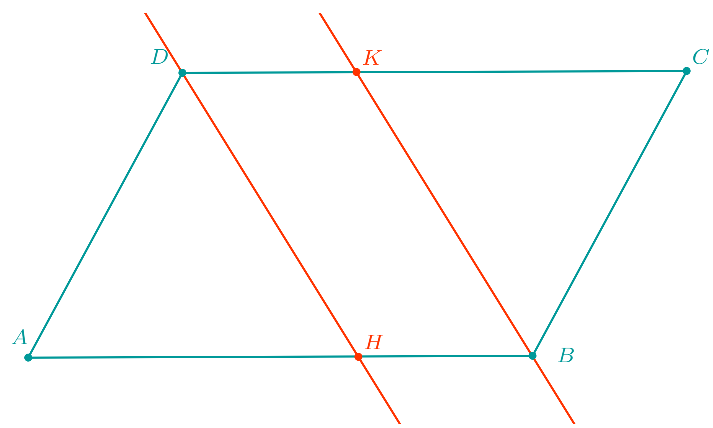
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{BC} = 3\text{cm}$ betragen und der Winkel $\angle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat.

Errichte über den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, dass diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!

b) Beweise, dass für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\angle BAD$ kleiner als $90°$ ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken $\overline{BQ}$ und $\overline{BR}$ einander gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.

3.3 Lösungen zu einigen Aufgaben

3.1) (a) Wir veranschaulichen die Aufgabe an einer Skizze. (Dabei beachten wir: Die Eckpunkte von $ABCD$ werden gegen den Uhrzeigersinn benannt.)



Wir betrachten das Viereck $BKDH$. Dort sind $\overline{DK}$ und $\overline{BH}$ als Teilstrecken des Ausgangsparallelogramms zueinander parallel. Weiter sind $\overline{BK}$ und $\overline{DH}$ nach Konstruktion parallel. Also ist $BKDH$ ein Parallelogramm.

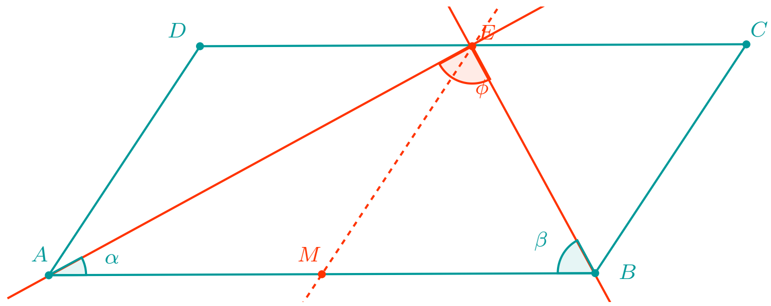
Nach Satz 15 sind im Parallelogramm gegenüberliegende Seiten gleich lang. Also haben $\overline{BH}$ und $\overline{DK}$ die gleiche Länge.

Weiter haben nach Satz 18 die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{HK}$ den gleichen Mittelpunkt, weil sie Diagonalen im Parallelogramm $BKDH$ sind.

Zuletzt stellen wir fest: Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ haben den gleichen Mittelpunkt, weil sie Diagonalen im Parallelogramm $ABCD$ sind.

Also haben alle drei Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{HK}$ den gleichen Mittelpunkt.

(b) Es sei α der Innenwinkel von $ABCD$ bei A, β derjenige bei B. Wir veranschaulichen die neuen Voraussetzungen wieder an einer Skizze:



Wir berechnen nun den Flächeninhalt von $ABCD$ in zwei Schritten:

(I) Berechnen den Flächeninhalt von ΔABE:

Es gilt:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \phi && \text{(Innenwinkelsumme im Dreieck)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta) + \phi \\ &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ + \phi && \text{(α, β benachbarte Winkel im Parallelogramm)} \\ &= 90^\circ + \phi \end{aligned}$$
$$\Rightarrow 90^\circ = \phi$$

Also ist ΔABE ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei E. Wir rechtwinklige Dreiecke kennen wir die Flächeninhaltsformel:

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{1}{2} \cdot \text{Produkt der anliegenden Seitenlängen}$$

Also in unserem Fall:

$$A_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot 6\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 12\text{cm}^2$$

(II) Berechnen nun den Flächeninhalt von $ABCD$. Dazu betrachten wir eine Parallele zu $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ durch den Punkt E. (Im Bild die gestrichelte Linie) Der Schnittpunkt dieser Parallele mit $\overline{AB}$ sei M.

Es gilt: $BCEM$ ist nach Konstruktion ein Parallelogramm. Also sind $\overline{CE}$ und $\overline{BM}$, sowie $\overline{BC}$ und $\overline{EM}$ zueinander gleich lang. Also stimmen ΔBEM und ΔBCE in drei Seitenlängen überein. Nach dem Kongruenzsatz Seite–Seite–Seite (Satz 13) ist also $\Delta BEM \simeq \Delta BCE$. Also haben die beiden Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.

Analog sehen wir, dass ΔAME und ΔAED den gleichen Flächeninhalt haben.

Also ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ gerade doppelt so groß wie der des Dreiecks ΔABE. Er beträgt also 24cm^2.