Spektraltheorie

Vorlesungsmitschrift der Vorlesung von Prof. Brüning
im Sommersemester 2016 an der Humboldt-Universität Berlin

Aufgeschrieben von Daniel Platt. Kommentare und
Fehlerhinweise sind sehr willkommen unter d.platt@web.de.

Stand: 9. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Operatoren in endlichdimensionalen komplexen Vektorräumen 2
1.1 Was ist “spektral”? 2
1.2 Lineare Operatoren 2
1.3 Analytische Behandlung der Spektralzerlegung 5
1.4 Analytische Theorie (Resolvente) 11
1.5 Hilbertraum-Struktur 13

2 Spektraltheorie beschränkter Operatoren im Hilbertraum 19
2.1 Die Polarzerlegung 21
2.2 Kompakte Operatoren 26

3 Spektraltheorie normaler Operatoren 33

1 Lineare Operatoren in endlichdimensionalen komplexen Vektorräumen

1.1 Was ist “spektral”?

- Lateinische Wörter für *spähen* (*specio*) und *Bild, Vorstellung* (*spectrum*).
- Zerlegung von weißem Licht durch ein Prisma in einzelne Farben, zeigt das Spektrum des Lichts. Circa 1770.
- Fraunhofer: Schwarze Linien im Sonnenspektrum, circa 1850.
- Quantenmechanik, circa 1925. $\to$ Schrödinger-Gleichung (Operator)

1.2 Lineare Operatoren

Sei E ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\dim E = n$.

Standardmodell $\mathbb{C}^m \ni z = (z^1, \ldots, z^m)$ mit $z^i \in \mathbb{C}$.

Dann ist $E \simeq \mathbb{C}^m$ durch Angabe einer Basis $(e_i)_{i=1}^m$, nämlich durch

$$e \in E, e = \sum_{i=1}^{n} z^i e_i \mapsto (z^1, \ldots, z^n) = z \in \mathbb{C}.$$

Es ist E^* =Raum der linearen Funktionale auf E. Aus einer Basis $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^m$ erhalten wir eine Basis $\mathcal{E}^* = (e^i)_{i=1}^m$ mit der Eigenschaft $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

Es sei $\mathcal{L}(E) = \{\text{Homomorphismen von } E\}$, und $A \in \mathcal{L}(E)$ so ein linearer Operator, also eine Abbildung $A : E \to E$ mit $A(\alpha z + \beta w) = \alpha A(z) + \beta A(w)$.

Es sei $\mathcal{E} = (e_i)$ eine fixierte Basis. Dann erhalten wir $A \mapsto {}^{\mathcal{E}}A_j = \left({}^{\mathcal{E}}A_j\right)$ definiert durch

$$(Ax)^i = e^i(Ax) = \sum_{j=1}^{m} e^i(Ax^j e_j) =: \sum {}^{\mathcal{E}}A^i_j x^j.$$

Es gilt dann ${}^{\mathcal{E}}(A \circ B)^i_j = \sum_{k=1}^m \left({}^{\mathcal{E}}A\right)^i_k \left({}^{\mathcal{E}}B\right)^k_j$.

Und $\det\left({}^{\mathcal{E}}A\right) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \left({}^{\mathcal{E}}A\right)^1_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \left({}^{\mathcal{E}}A\right)^m_{\sigma(m)}$.

Für die Determinante gilt dann: A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Und der Multiplikationssatz $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Folglich ist $\det\left({}^{\mathcal{E}}A\right)$ unabhängig von der Basis $\mathcal{E}$, weil nämlich für eine weitere Basis $\mathcal{E}'$ eine Matrix T existiert, sodass $T^{-1}\,{}^{\mathcal{E}}AT = {}^{\mathcal{E}'}A$.

Davon abgesehen gilt A invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = A(E)$.

Definition 1.1. *A heißt* halbeinfach *(semi-simple), falls eine Basis $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^m$ existiert, sodass $Ae_i = \lambda_i e_i$ für $\lambda_i \in \mathbb{C}$.*

Definition 1.2. *Wenn $Ae = \lambda e$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, dann heißt e* Eigenvektor *von A zum* Eigenwert *λ.*

Wenn λ Eigenwert von A ist, so ist $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq 0$, d.h. $\det(A - I) = 0$.

Definition 1.3. *Das Polynom $\chi_A(t) = \det(\lambda I - A)$ heißt das* charakteristische Polynom *von A.*

Nach dem Fundamentalsatz der Algbra zerfällt χ_A als $\chi_A(z) = \Pi_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{m_a(\lambda_j)}$.

Definition 1.4. *Sei $A \in \mathcal{L}(E)$, dann ist*

$$\begin{aligned} \operatorname{spec} A &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda \operatorname{Id} - A) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \operatorname{Id} \ \textit{ist nicht invertierbar}\}. \end{aligned}$$

das Spektrum *von A.*

Wir setzen $F_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$. $F_A(\lambda)$ heißt Eigenraum *von A zum Eigenwert λ.*

$m_a(\lambda)$ heißt algebraische Vielfachheit *von λ.*

$m_g(t) := \dim F_A(\lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit *von λ.*

Wenn A halbeinfach ist, dann kann man die Eigenwerte nummerieren als $(\lambda_j)_{j=1}^m$ (mehrfache Eigenwerte möglich). Dann wird

$$\chi_A(z) = \Pi_{j=1}^m (z - \lambda_j) = \sum_{i=1}^m z^i \delta_{m-i}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)(-1)^{m-i}$$

wobei

$$\begin{aligned}\delta_0(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 1\\ \delta_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \Pi_{i=1}^m \lambda_i = \det A\\ \delta_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i =: \operatorname{tr} A.\end{aligned}$$

Beispiel 1.5. *$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $\chi_A = (z-1)^2$, $m_a(1) = 2$, aber $F_A(1) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $m_g(1) = 1$.* □

Wenn A nicht halbeinfach ist, dann können wir die verallgemeinerten Eigenräume betrachten: $F_A^{(i)}(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^i$. Diese erfüllen $F_A^1(\lambda) \subset F_A^2(\lambda) \subset \cdots \subset F_A^{(k)}(\lambda)$.

Sei weiter $F_A^{(i,i+1)}(\lambda) := F_A^{(i+1)}(\lambda) - F_A^{(i)}(\lambda)$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned}A - \lambda : F^{(i,i+1)}(\lambda) &\to F_A^{(i)}(\lambda)\\ e &\mapsto (A-\lambda)e\end{aligned}$$

ist injektiv. Mit entsprechenden Basisvektoren ergibt sich die *Jordankette*

$$F_A^{(k,k+1)}(\lambda) \ni e_0 \mapsto e_1 = (A-\lambda)e_0 \mapsto \ldots \mapsto e_{k-1} = (A-\lambda)^{k-1} e_0 \in F_A(\lambda),$$

sodass die darstellende Matrix aus Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

besteht.

Zusammen erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 1.6. *(Jordansche Normalform) Für $A \in \mathcal{L}(E)$ gilt:*

(a) Es gibt einen kleinsten Index $i(\lambda) \in \mathbb{N}$, sodass $\operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id})^{i(\lambda)+1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id})^{i(\lambda)}$.

Es ist $F_A(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id})$ der Eigenraum zu λ und $\tilde{F}_A(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{Id})^{i(\lambda)}$ der erweiterte Eigenraum.

(b) Es gibt die direkte Summe

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{spec} A} \tilde{F}_A(\lambda)$$

und wir setzen $m_\alpha(\lambda) = \dim \tilde{F}_A(\lambda)$.

(c) *Die verallgemeinerten Eigenräume* $\tilde{F}_A(\lambda)$ *zerfallen in* zyklische Unterräume, *d.h. es gibt eine Basis* $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)_{k \leq i(\lambda)}$, *sodass* $(A - \lambda \operatorname{Id})e_i = e_{i+1}$, *sodass*

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Beweis. Übungaufgabe. □

1.3 Analytische Behandlung der Spektralzerlegung

Definition 1.7. $R_A(z) = (A - z)^{-1}$, *falls* $z \notin \operatorname{spec} A$, *heißt Resolvente.* $\operatorname{res} A$ *sei die Menge aller* $z \in \mathbb{C}$, *sodass* $R_A(z)$ *existiert. D.h.* $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spec} A = \operatorname{res} A$.

Definition 1.8. *Eine Norm* $||\cdot||_E$ *auf* E *ist eine Abbildung* $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}_+$ *mit*

(i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $||z \cdot x|| = |z| \cdot ||x||$,

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definition 1.9. *Ein normierter* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* $(E, ||\cdot||)$ *heißt* vollständig, *falls jede Cauchy-Folge in* E *konvergiert. In diesem Fall heißt* E *auch* Banachraum.

Im Folgenden ist E nicht mehr notwendigerweise endlichdimensional.

Definition 1.10. *Falls* $(E, ||\cdot||_E)$ *vollständig ist, so heißt* E *Banachraum. (Symbol* B*)*

Definition 1.11. $\mathcal{L}(E) = \{A \in \operatorname{End} E \mid A \text{ stetig}\}$.

Bemerkung: Es gilt: A stetig $\Leftrightarrow ||Ax|| \leq C\,||x||$. In diesem Fall nennen wir $\inf C =: ||A||$ die Operatornorm von A.

Definition 1.12. $\mathcal{L}(B) = \{A \in \operatorname{End}(E) \mid A \text{ beschränkt}\}$.

Satz 1.13. *(von Neumann) Sei* $A \in \mathcal{L}(E)$, $||A|| < 1$. *Dann ist* $I - A$ *invertierbar und*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Beweis. Benutze die Beziehung $\left|\left|A^j\right|\right| \leq ||A||^j$. □

Lemma 1.14. *Für* $|z| > ||A||$ *ist* $A - z \cdot \operatorname{Id}$ *invertierbar.*

Beweis. $z\,\mathrm{Id} - A = z\left(\mathrm{Id} - \frac{A}{z}\right)$ also

$$(z\,\mathrm{Id} - A)^{-1} = z^{-1}\left(\mathrm{Id} - \frac{A}{z}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{z^{j+1}}.$$

Also $R_A(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{z^{j+1}}$. □

Lemma 1.15. $A \in \mathcal{L}(B) \Rightarrow \operatorname{res} A$ *ist offen und* R_A *ist holomorph in* $\operatorname{res} A$*.*

Beweis. $z_0 \in \operatorname{res} A$, $|z - z_0| < ||R_A(z)||$. Also

$$\begin{aligned} A - z\,\mathrm{Id} &= (A - z_0\,\mathrm{Id} - (z - z_0)\,\mathrm{Id}) \\ &= (A - z_0)\,(\mathrm{Id} - (z - z_0)R_A(z_0)) \end{aligned}$$

und damit

$$R_A(z) = R_A(z_0)\,(\mathrm{Id} - (z - z_0)R_A(z_0))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(z - z_0)^j R_A(z_0)^{j+1}.$$

□

Sei nun wieder $\dim E < \infty$ und $\lambda \in \operatorname{spec} A$, $|z - \lambda| < \epsilon$, sodass kein weiterer Spektralwert enthalten ist. Dann sagt die Laurententwicklung, dass $R_A(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j (z-\lambda)^j$, wobei

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\lambda|=\epsilon} R_A(\xi)(\xi - \lambda)^{-j-1} d\xi.$$

Lemma 1.16. *(1. Resolventengleichung, Hilbert)*

$$R_A(z_1) - R_A(z_2) = (z_1 - z_2)R_A(z_1)R_A(z_2).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 1.17. *Zwischen den Koeffizienten der Resolvente bestehen die folgenden Beziehungen:*

$$A_j A_k = (H(j) - H(k) - 1)A_{j+k+1},$$

wobei H *die Heaviside-Funktion*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

bezeichnet.

Und mit den Bezeichnungen $P_\lambda := -A_{-1}$ *und* $-D_\lambda := A_{-2}$ *gilt*

$$A_{-1}^2 = -A_{-1} = (-A_{-1})^2,$$
$$A_{-k} = -D_\lambda^{k-1}$$

und

$$\begin{aligned} R_A(z) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_J(z-\lambda)^j \\ &= -P_\lambda(z-\lambda)^{-1} - \sum_{k=2}^{\infty} D_\lambda^{k-1}(z-\lambda)^{-k} + \sum_{j\geq 0} A_j(z-\lambda)^j \end{aligned}$$

□

Aus der Resolventenidentität folgt auch

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dz}\right)^j R_A(z) = R_A(z)^{j+1}.$$

Und im Fall $\dim E < \infty$ ist also R_A meromorph mit Polen an den Stellen $\lambda \in \operatorname{spec} A$.

Aus der Reihenentwicklung der Resolvente erhalten wir auch eine Darstellung von A selbst: Für $\lambda \in \operatorname{spec} A$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-\lambda|=\epsilon} (A-z)^{-1} z dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-\lambda|=\epsilon} (z-A+A)(A-z)^{-1} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{|z-\lambda|=\epsilon} dz}_{=0} + A(-P_\lambda), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} AP_\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=\epsilon} z R_A(z) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\lambda|=\epsilon} (z-\lambda+\lambda) R_A(z) dz \\ &= -A_{-2} + \lambda P_\lambda \\ &= D_\lambda + \lambda P_\lambda. \end{aligned}$$

Lemma 1.18.

$$\operatorname{spec} D_\lambda P_\lambda = \{0\}.$$

Beweis. Angenommen, es existiert $x \in P_\lambda(E)$ mit $D_\lambda x = \mu x$. Die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} D_\lambda^j (z-\lambda)^{-j-1}$$

konvergiert, also konvergiert auch

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} D_\lambda^j (z-\lambda)^{-j-1}\right)(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu^j}{(z-\lambda)^{j+1}}\right)(x).$$

Das ist eine geometrische Reihe, also gilt $\left|\frac{\mu}{z-\lambda}\right| = \frac{|\mu|}{\epsilon} < 1$ für $\epsilon > 0$ beliebig. Dann muss aber $\mu = 0$ sein, das heißt $D_\lambda^{i(D_\lambda)} = 0$, denn $\ker D_\lambda^{i(D_\lambda)} = P_\lambda(E)$. □

Definition 1.19. *$A \in \mathcal{L}(E)$ heißt* nilpotent, *falls es $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $A^n = 0$. Das kleinste solche n heißt der* Nilpotenzgrad *von A.*

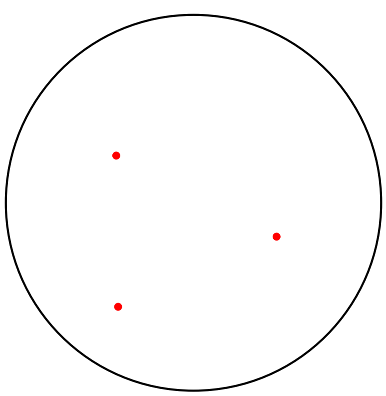
Also zum Beispiel alle $(D_\lambda)_{\lambda \in \operatorname{spec} A}$ sind nilpotent.

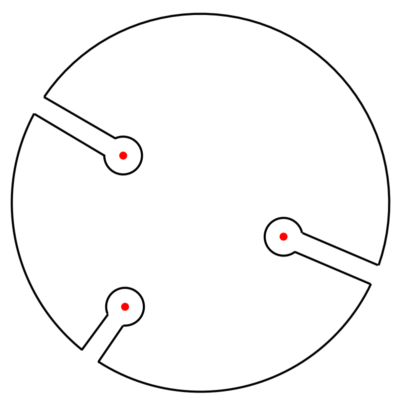
Definition 1.20. *Die Zahl*

$$r_{\text{spec}}(A) := \sup_{\lambda \in \operatorname{spec} A} |\lambda| := \max_{\lambda \in \operatorname{spec} A} |\lambda|$$

heißt der Spektralradius *von A. (Das Suppremum wird im endlichdimensionalen Fall angenommen, weil* $\operatorname{spec} A$ *abgeschlossen und beschränkt ist, also auch kompakt)*

Es ist Spektralradius von $A \leq ||A||$. Wähle für die folgende Rechnung $R >$ Spektralradius von A. Im folgenden betrachten wir den Kreis um den Ursprung mit Radius R, dieser enthält dann alle Punkte des Spektrums, siehe dafür das Bild links. Wir können dann, wie aus der Funktionentheorie bekannt, den Kreis so abändern, dass die Punkte des Spektrums außerhalb des Kreises liegen, das Integral über die Kreislinie aber unverändert bleibt, siehe dafür das rechte Bild.





Wir können schreiben

$$\begin{aligned} R_A(z) &= (A-z)^{-1} \\ &= \left(z\left(\frac{A}{z}-1\right)\right)^{-1} \\ &= -z^{-1}\left(I-\frac{A}{z}\right)^{-1} \\ &= -\sum_{j\geq 0} z^{-j-1}A^j \end{aligned}$$

und erhalten damit

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} R_A(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\geq 0} A^j \underbrace{\int_{|z|=R} z{-}j-1dz}_{=0 \text{ für } j\neq 0} = \mathrm{Id}\,.$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} A^k &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z^k R_A(z)dz && \text{(Übungsaufgabe)} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda\in\operatorname{spec} A}\int_{|z-\lambda|=\epsilon} zR_A(z)dz \\ &= \sum_{\lambda\in\operatorname{spec} A}(\lambda P_\lambda + D_\lambda) && (\text{denn } P_\lambda P_\lambda' = P_\lambda\cdot\delta_{\lambda\lambda'}) \\ &= \sum_\lambda P_\lambda = I && (\text{weil } D := \sum_\lambda D_\lambda P_\lambda \text{ nilpotent ist}). \end{aligned}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in folgendem Satz:

Satz 1.21. *Falls* $\dim E < \infty$*, dann besitzt jedes* $A \in \mathcal{L}(E)$ *eine Zerlegung der Form* $A = S + N$ *mit*

$$\begin{aligned} &S \text{ halb-einfach}, && S = \sum_{\lambda\in\operatorname{spec} A}\lambda P_\lambda, \\ &N \text{ nilpotent}, && N = \sum_{\lambda\in\operatorname{spec} A} D_\lambda P_\lambda, \end{aligned}$$

wobei $SN = NS$*, also* $[S, N] = 0$. □

Satz 1.22. *Für den Spektralradius gilt*

$$r_{\mathrm{spec}}(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$$

für alle $A \in \mathcal{L}(B)$*, wobei* B *ein Banachraum ist.*

Beweis. (a) Behauptung: $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ existiert und ist gleich $\min ||A^n||^{\frac{1}{n}}$.

Beweis der Behauptung: Sei $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $||A^{n_0}||^{\frac{1}{n_0}} < \inf_n ||A^n||^{\frac{1}{n}} + \epsilon$. Wir zerlegen $n = p \cdot n_0 + q$ mit $0 \leq q \leq n_0 - 1$. Dann

$$\begin{aligned}
||A^n||^{\frac{1}{n}} &= ||A^{pn_0} A^q||^{\frac{1}{n}} \\
&\leq ||A^{pn_0}||^{\frac{1}{n}} \cdot ||A^q||^{\frac{1}{n}} \\
&\leq ||A^{n_0}||^{\frac{p}{n}} \cdot ||A||^{\frac{q}{n}} && \text{schreibe } \frac{p}{n} = \frac{p}{pn_0 + q} = \frac{1}{n_0 + \frac{q}{p}} \\
&\leq ||A^{n_0}||^{\frac{1}{n_0}} && \text{durch Bildung von } \limsup_{n\to\infty} \\
&\leq \inf ||A^n||^{\frac{1}{n}} + \epsilon,
\end{aligned}$$

das zeigt die Behauptung.

(b) Behauptung: Für $\tilde{r} := \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ gilt $\tilde{r} \geq r_{\text{spec}}(A)$.

Beweis der Behauptung: Wir haben $R_A(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{z^{j+1}}$ für $|z| > ||A||$, aber R_A ist holomorph für $|z| > r_{\text{spec}}(A)$, also muss insbesondere $\left|\left|\frac{A^j}{z^j}\right|\right| \leq 1$ gelten, damit Konvergenz vorliegen kann.

Sei nun $\epsilon > 0$, sodass $||A^n||^{\frac{1}{n}} \leq \tilde{r} + \epsilon$ für $n \geq n_0$.

Dann also auch $||A^n|| \leq (\tilde{r} + \epsilon)^n$ und für $|\lambda| \geq \tilde{r} + 2\epsilon$ ist

$$\left|\left|\frac{A^n}{|\lambda|^n}\right|\right| \leq \frac{(\tilde{r}+\epsilon)^n}{(\tilde{r}+2\epsilon)^n} = \left(\frac{\tilde{r}+\epsilon}{\tilde{r}+2\epsilon}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{\epsilon}{\tilde{r}+\epsilon}}\right)^n < 1.$$

Also konvergiert die Reihe $\left|\left|\frac{A^n}{|\lambda|^n}\right|\right|$ für $|\lambda| > \tilde{r}$. Das heißt aber, dass $\lambda \notin \operatorname{spec} A$, also $\tilde{r} \geq r_{\text{spec}}(A)$.

(c) Behauptung: $\left|\left|\frac{A^i}{|\lambda|^i}^{\frac{1}{i}}\right|\right| \to 0$ für $i \to \infty$, falls $|\lambda| > r_{\text{spec}}(A)$.

Beweis der Behauptung: Sei $\epsilon > 0$, sodass $|\lambda| \leq r_{\text{spec}}(A) + \epsilon$. Dann ist $\left|\left|A^i\right|\right|^{\frac{1}{i}} \leq |\lambda| \leq r_{\text{spec}}(A) + \epsilon$. Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, also auch $\tilde{r} \leq r_{\text{spec}}(A)$.

Zusammen mit Teil (b) also $\tilde{r} = r_{\text{spec}}(A)$.

$\square$

1.4 Analytische Theorie (Resolvente)

Sei zunächst wieder $\dim E < \infty$. Dann gilt für $A \in \mathcal{L}(E)$:

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{spec} A} (\lambda P_\lambda + D_\lambda) =: S + D,$$

wobei P_λ und D_λ die Bedingung $P_\lambda D_\lambda = D_\lambda = D_\lambda P_\lambda$ erfüllen.

Wir betrachten jetzt R_A in $\mathbb{C} \setminus B_{r_{\text{spec}(A)}}(0)$, wo R_A holomorph ist. Dann gilt

$$R_A(z) = \sum_{-\infty}^{j=-1} A_j z^j$$

mit

$$A_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=c} R_A(z) z^{-j-1} dz \quad \text{mit } c > r_{\text{spec}}(A)$$

unabhängig von der Wahl von c.

Ebenfalls gilt die Neumann-Reihenentwicklung

$$z^{-1} \left(\frac{A}{z} - I \right)^{-1} = (a-z)^{-1} = R_A(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^j z^{-j-1}$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir für $k \geq 0$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=z} R_A(z) z^k dz = A^k$$

und damit gilt für ein beliebiges Polynom $p(z)$:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=z} R_A(z) p(z) dz = p(A).$$

Das motiviert die Betrachtung des obigen Integrals anstelle für Polynome auch für beliebige holomorphe Funktionen f.

Satz 1.23. (Nelson Dunford) *Es sei B ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(B)$ und $r_{\text{spec}}(A)$ der Spektralradius von A. Es sei $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq ||A||\} \subset U$, wobei $U \subset \mathbb{C}$ offen ist. Sei $c : [0,1] \to U \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq ||A||\}$ ein einfacher (d.h. injektiv auf $[0,1)$), stückweiser C^1-Weg. Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$, dann setzen wir*

$$f(A) := -\frac{1}{2\pi i} \int_c R_A(z) f(z) dz.$$

Dann gilt

(a) $f(A) \in \mathcal{L}(B)$.

(b) *Wenn* $f,\, g \in \mathcal{O}(U)$, *dann gilt* $(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$.

(c) $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

(d) *Sei* $f \in \mathcal{O}(U)$ *mit einer in* U *konvergenten Potenzreihe* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$. *Dann gilt:*

$$f(A) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j A^j.$$

(e) (Spectral Mapping Theorem, Dunford Integral)

$$f(\operatorname{spec}(A)) = \operatorname{spec} f(A).$$

Beweis.

(a), (b) Klar.

(c) Wir bemerken zunächst, dass $f(A)$ nicht von der Wahl des Weges c abhängt. Seien nun $f,\, g \in \mathcal{O}(U)$. Wir wählen dann zwei Wege c_1 und c_2 derart, dass $\overline{\operatorname{Int} c_1} \subset \operatorname{Int} c_2$, wobei Int entsprechend dem Jordanschen Kurvensatz das Innengebiet einer Kurve bezeichnet. Dann folgt

$$\begin{aligned}
f(A)g(A) &= \underbrace{\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2}_{=:c_0^2} \int_{z_1 \in c_1} \int_{z_2 \in c_2} R_A(z_1) R_A(z_2) f(z_1) g(z_2)\, dz_1\, dz_2 \\
&= c_0^2 \int_{z_1 \in c_1} \int_{z_2 \in c_2} \frac{R_A(z_1) - R_A(z_2)}{z_1 - z_2} f(z_1) g(z_2)\, dz_1\, dz_2 \\
&=: I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
I_1 &= c_0^2 \int_{c_1} R_A(z_1) f(z_1) \int_{c_2} \frac{g(z_2)}{z_1 - z_2}\, dz_2\, dz_1 = 0 \\
&= c_0 \int_{c_1} R_A(z_1) f(z_1) g(z_1)\, dz_1 \\
&= (fg)(A)
\end{aligned}$$

und

$$I_2 = -c_0 \int_{c_2} R_A(z_2) g(z_2) \underbrace{\int_{c_1} \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2}\, dz_1}_{=0,\text{ weil } z_2 \notin \operatorname{Int} c_1}\, dz_2 = 0,$$

wobei wir zur Berechnung der inneren Integrale jeweils die Cauchysche Integralformel benutzt haben.

(d)

$$
\begin{aligned}
f(A) &= c_0 \int_c R_A(z) f(z)\, dz \\
&= c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \int_c R_A(z) f_j z^j\, dz \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f_j A^j.
\end{aligned}
$$

(e) Zeigen zunächst: $f(\operatorname{spec} A) \subset \operatorname{spec} f(A)$.

Angenommen, $\lambda \in \operatorname{spec} A$ und $f(\lambda \notin \operatorname{spec} f(A)$. Definiere

$$g(z) := \big(f(\lambda) - f(z)\big)(\lambda - z)^{-1} \quad \text{auf } U \setminus \{\lambda\}$$

und $g(z) = f'(z)$, dann ist g holomorph und

$$g(z)(\lambda - z) = (f(\lambda) - f(z)).$$

Weil $f(\lambda) \notin \operatorname{spec} f(A)$, existiert $(f(\lambda)I - f(A))^{-1}$, also

$$g(A)(\lambda I - A)(f(\lambda)I - f(A))^{-1} = I,$$

was ein Widerspruch zu $\lambda \in \operatorname{spec} A$ ist.

Die andere Inklusion, das heißt $\operatorname{spec} f(A) \subset f(\operatorname{spec} A)$ bleibt als Übungsaufgabe.

□

1.5 Hilbertraum-Struktur

Auf $\mathbb{C}^n$ haben wir ein natürliches (hermitesches) Skalarprodukt

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \sum_{i=1}^{m} z_1^i \overline{z_2^i}.$$

Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sesquilinear (hermitesch), das heißt

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(ii) $\langle x, x \rangle = ||x||^2 \geq 0$,

(iii) $\langle \alpha x_1, \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$.

Definition 1.24. *Ein Banachraum, dessen Norm durch $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ aus einem Skalarprodukt hervorgeht, heißt* Hilbertraum.

Definition 1.25. *Jeder Hilbertraum besitzt eine* orthonormale Basis $(e_i)_{i=1}^n$*, d.h. die* e_i *erfüllen* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$*.*

$l^2 \subset \mathbb{C}^\infty$ wird ein Hilbertraum unter der Norm

$$||x||^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \left| x^j \right|^2 .$$

Definition 1.26. *Ein Hilbertraum heißt* separabel*, wenn es eine Isometrie* $\phi : l^2 \to H$ *gibt, das heißt,*

(i) ϕ *ist ein linearer Isomorphismus,*

(ii) $\langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle_H = \delta_{ij}$*.*

Definition 1.27. *Ist* $A \in \mathcal{L}(H)$*, so definieren wir den* adjungierten Operator $A^* \in \mathcal{L}(H)$ *durch die Identität*

$$\langle A^* x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Lemma 1.28. *Der adjungierte Operator hat die Eigenschaften:*

(a) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$*,*

(b) $(AB)^* = B * A*$*,*

(c) $* : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ *ist eine Involution, das heißt* $(A^*)^* = A$*.*

Durch leichte Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + ||y||^2 \end{aligned}$$

und damit

$$4\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2 \tag{1.1}$$

und durch analoge Rechnung

$$4\,\mathrm{Im}\langle x, y \rangle = i\,||x+iy||^2 - i\,||x-iy||^2 .$$

Zusammen ergibt sich die Polarisationsformel für das Sesquilinearprodukt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\,||x+iy||^2 - i\,||x-iy||^2 \right).$$

Ähnlich erhalten wir die Parallelogrammidentität

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2 \left(||x||^2 + ||y||^2 \right).$$

Lemma 1.29. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ist stetig.*

Beweis. Nach 1.1 gilt auch

$$4 \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq (||x|| + ||y||)^2 - (||x|| - ||y||)^2 = 4\, ||x|| \cdot ||y||\,.$$

Eine analoge Rechnung kann man für den Imaginärteil durchführen und erhält damit die Stetigkeit. □

Definition 1.30. *Für einen abgeschlossenen Unterraum $H_0 \subset H$ definieren wir das* orthogonale Komplement *als*

$$H_0^{\perp} := \{x \in H \mid \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in H_0\}.$$

Lemma 1.31. $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$.

Beweis. (i) $H_0 \cap H_0^{\perp} = 0$, weil für $x \in H_0 \cap H_0^{\perp}$ nach Definition des orthogonalen Komplements gilt $\langle x, x\rangle = 0$, also $x = 0$.

(ii) Sei nun $x \in H$. Minimiere die Größe $||x - y||$ über $y \in H_0$. Sei

$$d := \inf_{y \in H_0} ||x - y|| = \lim_{n \to \infty} ||x - y_n||\,.$$

Wir möchten nun zeigen, dass y_n konvergiert. Dafür genügt es zu zeigen, dass y_n eine Cauchy-Folge ist, weil H_0 als abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums selbst ein Hilbertraum ist.

$$\begin{aligned} ||y_n - y_m||^2 &= ||(x - y_m||^2 + ||x - y_n||^2 - 2 \underbrace{\left|\left| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right|\right|^2}_{\geq ||x - y_n||} \\ &\to d^2 + d^2 - 2d^2 = 0 \end{aligned}$$

für n, $m \to \infty$.

Schreibe $y_n \to y$, dann ist $x = y + (x - y)$ und $y \in H_0$, weil H_0 abgeschlossen ist. Und $(x - y) \in H_0^{\perp}$, denn angenommen für ein $h \in H_0$ ist $m := \langle h, x - y\rangle \neq 0$. Dann ist

$$||x - (y + \alpha h)||^2 = ||x - y||^2 - 2\alpha m + \alpha^2\, ||h||^2 < ||x - y||^2 \text{ für } \alpha \text{ klein,}$$

das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von $d = ||x - y||$.

□

Wir schreiben im Folgenden $x = P_{H_0}x + P_{H_0^\perp}x$, das heißt $P_{H_0} : H \to H_0$ ist die Projektion auf H_0 und $H_{P_0^\perp}$ die Projektion auf $H_{P_0^\perp}$.

Lemma 1.32. *(a) $P_{H_0} \in \mathcal{L}(H_0)$ und unter allen Projektionen $P \in \mathcal{H}$ mit $\operatorname{Im} P = H_0$ ist P_{H_0} ausgezeichnet durch jede der folgenden Bedingungen:*

$$\langle P_{H_0}x, y\rangle = \langle x, P_{H_0}y\rangle, \tag{1.2}$$

$$||P_{H_0}|| \leq 1. \tag{1.3}$$

(b) $(H_0^\perp)^\perp = H_0$

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass P_{H_0} die Gleichungen 1.2 und 1.3 erfüllt. Wir haben für $x \in H$ die Darstellung $x = x_0 + x_0^\perp$, also

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||x_0||^2 + \left|\left|x_0^\perp\right|\right|^2 + 2\operatorname{Re}\underbrace{\langle x_0, x_0^\perp\rangle}_{=0} \\ &= ||P_{H_0}x||^2 + \left|\left|P_{H_0^\perp}x\right|\right|^2 \geq ||P_{H_0}x||^2, \end{aligned}$$

also ist $P_{H_0} \in \mathcal{L}(H)$ mit $||P_{H_0}|| \leq 1$.

Und weil $P\,|_{H_0} = \mathrm{Id}_{H_0}$, ist auch $||P_{H_0}|| \geq 1$, also zusammen $||P_{H_0}|| = 1$. Also ist Gleichung 1.3 erfüllt.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \langle P_{H_0}x, y\rangle &= \langle P_{H_0}x, P_{H_0}y + P_{H_0^\perp}y\rangle \\ &= \langle P_{H_0}x, P_{H_0}y\rangle + \langle P_{H_0}x + P_{H_0^\perp}x, P_{H_0}y\rangle \\ &= \langle x, P_{H_0}y\rangle, \end{aligned}$$

also ist auch Gleichung 1.2 erfüllt.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Sei also $P \in \mathcal{L}(H)$ mit $P^2 = P$ und $\operatorname{Im} P = H_0$. Dann haben wir eine Darstellung

$$x = \underbrace{Px}_{\in \operatorname{Im} P} + \underbrace{(\mathrm{Id} - P)x}_{\in \operatorname{Ker} P}$$

und falls $x \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$, dann $x = Py$ für ein $y \in H$ und damit $0 = Px = P^2x = Py = x$, also ist $H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.

Falls nun 1.2 gilt, dann

$$\langle Px, (\mathrm{Id} - P)x\rangle = \langle x, P(\mathrm{Id} - P)x\rangle = 0,$$

also $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - P) = \operatorname{Ker} P$. Daher

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle x, PPH_0 y + PP_{H_0^\perp} y\rangle = \langle x, P_{H_0} y\rangle = \langle P_{H_0} x, y\rangle$$

für x, $y \in H$ beliebig, also $P = P_{H_0}$.

Falls andererseits 1.3 gilt, dann schreiben wir zunächst wieder

$$H = \underbrace{\operatorname{Im} P}_{=H_0} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker} P}_{=:K_0}.$$

Sei $x \in K_0^\perp$ und $y = Px - x$, dann $x \perp y$ und $x + y = Px$ und

$$||x||^2 \geq ||Px||^2 = ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2,$$

also $y = 0$ und damit $P = P_{H_0}$.

□

Satz 1.33. (F. Riesz)

Es sei $F : H \to \mathbb{C}$ ein stetiges, lineares Funktional. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in H$, sodass $F(x) = \langle x, x_0\rangle$.

Beweis. O.B.d.A. $F \neq 0$. Setze $H_0 := \operatorname{Ker} F$, dann $\overline{H_0} = H_0$ und $H_0^\perp \neq 0$. Wähle $x_0 \in H_0^\perp$ mit $F(x_0) = 1$. Für $x \in H$ ist $y(x) := F(x)(x_0) - x \in H$, dann

$$x = \underbrace{F(x)x_0}_{\ni H_0^\perp} + \underbrace{y}_{\ni H_0} \Rightarrow P_{H_0^\perp} x = F(x)x_0. \tag{1.4}$$

Außerdem gilt $x = \langle x, x_0\rangle x_0 + y$, also auch $P_{H_0} x = \langle x, x_0\rangle x_0$ und wir erhalten zusammen mit 1.4

$$\langle x_0, x\rangle x_0 = P_{H_0^\perp} x = F(x)x_0,$$

also insbesondere $\langle x, x_0\rangle = F(x)$. □

Als Anwendung beweisen wir die Cauchy-Schwarsche Ungleichung:

Lemma 1.34. (Cauchy-Schwarsche Ungleichung) *Für x, $y \in H$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2.$$

Beweis. Wir verwenden, dass $\left|\left|P_{\langle \frac{y}{||y||}\rangle} \cdot \right|\right|$ ein lineares Funktional ist, das durch $\langle \frac{y}{||y||}, \cdot\rangle$ dargestellt wird:

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle|^2 &= \left|\langle x, \frac{y}{||y||}\rangle\right|^2 \cdot ||y||^2 \\
&= \left|\left|P_{\langle \frac{y}{||y||}\rangle} x\right|\right|^2 \cdot ||y||^2 \\
&\leq ||x||^2 \cdot ||y||^2.
\end{aligned}$$

Und im letzten Schritt haben wir verwendet, dass die orthogonale Projektion Norm ≤ 1 hat. □

Definition 1.35. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$, dann wird der* zu A adjungierte Operator $A^* \in \mathcal{L}(H)$ *definiert durch*

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle.$$

Bemerkung 1.36. *Wir sehen sofort, dass*

$$||A^*|| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle A^*x, y\rangle|}{||x||\,||y||} = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle x, Ay\rangle|}{||x||\,||y||} = ||A||\,.$$

Außerdem bemerken wir, dass

$$(\cdot)^* : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$$

stetig und komplex anti-linear ist.

Als interessanten Spezialfall betrachten wir die orthogonale Projektion P_{H_0}: Diese erfüllt $\langle P_{H_0}x, y\rangle = \langle x, P_{H_0}y\rangle$, also ist in diesem Fall $P_{H_0} = P_{H_0}^*$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1.37. *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt* symmetrisch*, falls $A = A^*$.*

Bemerkung 1.38. *Für $A \in \mathcal{L}(H)$ können wir schreiben*

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\left(\frac{A - A^*}{2i}\right).$$

Definition 1.39. *$U \in \mathcal{L}(H)$ heißt* isometrisch *oder* unitär*, falls $||Ux|| = x$ für alle $x \in H$.*

Durch Polarisierung folgt $\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, also $U^* = U^{-1}$. Also gilt auch insbesondere $U^*U - UU^* = 0$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 1.40. *$A \in \mathcal{L}(H)$ heißt* normal*, falls $[A, A^*] = 0$.*

Das heißt zum Beispiel, dass alle symmetrischen und unitären Operatoren normal sind.

Im Fall $\dim H < \infty$:

Sei A normal. Wie verhalten sich dann die Spektren von A und A^* zueinander? Sei $x \in F_A(\lambda)$, das heißt $(A - \lambda)x = 0$, also auch $(A^* - \overline{\lambda})(A - \lambda)x = 0$ und somit auch

$$0 = \langle (A^* - \overline{\lambda})(A - \lambda)x, x\rangle = \langle (A^* - \overline{\lambda})x, (A^* - \overline{\lambda})x\rangle.$$

Damit folgt

$$F_A(\lambda) \subset F_{A^*}(\overline{\lambda}) \subset F_A(\lambda).$$

Sei nun $\lambda \neq \lambda' \in \operatorname{spec} A = \overline{\operatorname{spec} A^*}$, o.B.d.A. $\lambda \neq 0$. Seien $x_\lambda \in F_A(\lambda)$, $x_{\lambda'} \in F_A(\lambda')$, dann ist

$$\langle x_\lambda, x_{\lambda'} \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle Ax_\lambda, x_{\lambda'} \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle x_\lambda, A^* x_{\lambda'} \rangle = \frac{\lambda'}{\lambda}\langle x_\lambda, x_{\lambda'} \rangle.$$

Und weil $\frac{\lambda'}{\lambda} \neq 0$, ist $F_A(\lambda) \perp F_A(\lambda')$.

Satz 1.41. *Jeder normale Operator ist halbeinfach.*

Beweis. Es gilt für $x \in H$ mit $(A-\lambda)^2 x = 0$:

$$\langle (A^* - \overline{\lambda})(A-\lambda)(A^* - \overline{\lambda})(A-\lambda)x, x \rangle = \left|\left|A^* - \overline{\lambda})(A-\lambda)x\right|\right|^2 = 0,$$

also auch

$$0 = \langle (A^* - \overline{\lambda})(A-\lambda)x, x \rangle = ||(A-\lambda)x||^2 .$$

□

Satz 1.42. *Auf $\mathcal{L}(H)$ ist ein Skalarprodukt gegeben durch*

$$\langle A, B \rangle_{\mathrm{tr}} = \operatorname{tr} B^* A \quad \textit{für } A,\ B \in \mathcal{L}(H).$$

Es hat die Eigenschaften $||A||_{\mathrm{tr}}^2 = \operatorname{tr} A^* A$.

Beweis. Übung. □

Daraus folgt dann auch, dass $\langle A * Ax, x \rangle = ||Ax||^2 \geq 0$, das heißt, A^*A ist symmetrisch und ≥ 0. Und das Spektrum von A^*A ist in den positiven reellen Zahlen enthalten, denn falls $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A^*A mit Eigenvektor x ist, so gilt

$$||Ax||^2 = \langle A^*Ax, x \rangle = \lambda\, ||x||^2 ,$$

also $\lambda \geq 0$.

2 Spektraltheorie beschränkter Operatoren im Hilbertraum

Sei H ein separabler Hilbertraum. Für $A \in \mathcal{L}(H)$, wie ist das Abbildungsverhalten von A? $\operatorname{Ker} A \subset H$ ist als Urbild einer abgeschlossenen Menge selbst abgeschlossen, $\operatorname{Im} A$ allerdings im Allgemeinen nicht.

Satz 2.1. *Es gilt*

$$(\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A^*} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp.$$

Durch Vertauschen der Rollen von A und A^* erhält man auch noch $(\operatorname{Ker} A^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A}$ als dazu äquivalente Bedingung.

Beweis. $x \in \operatorname{Ker} A$, $y \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, dann ist

$$0 = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \text{für alle } y \in H,$$

also $x \perp \operatorname{Im} A^*$ und damit auch $x \perp \overline{\operatorname{Im} A^*}$. □

Als Folgerung erhalten wir damit sofort:

Satz 2.2. *Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ symmetrisch, d.h. $A = A^*$, so gilt*

$$H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}.$$

□

Beispiel 2.3. $H = l^2(\mathbb{N} \ni (x^i)_{i=1}^{\infty}$, $||x||^2 = \sum_i |x^i|^2$. *Sei*

$$A : l^2 \to l^2$$
$$(Ax)^i := \frac{1}{i} \cdot x^i,$$

dann ist $||A|| \leq 1$ und A ist injektiv.

Jedoch ist A nicht surjektiv, zum Beispiel die Folge $y^i = \frac{1}{i}$ hat kein Urbild. Es gilt allerdings trotzdem $\overline{\operatorname{Im} A} = l^2$.

Satz 2.4. (Banach) *Seien B_1, B_2 Banachräume und $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ surjektiv. Dann ist A offen, d.h. die Bilder offener Mengen unter A sind wieder offen.*

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus dem *Satz von Baire Hausdorff*, bzw. dem *Baireschen Kategoriensatz*, welcher besagt:

In einem vollständigen metrischen Raum gilt: Von abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen, deren Vereinigung eine offene Kugel enthält, enthält mindestens eine bereits eine offene Kugel. □

Daraus folgt direkt:

Satz 2.5. (Automatische Stetigkeit) *Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ bijektiv, so ist A^{-1} stetig.* □

Satz 2.6. (Hörmander) *Sei $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ *und* $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$,

(b) Ist $(x_n) \subset H_1$ und konvergiert die Folge $A(x_n)$ in H_2, so besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b):

Es muss $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ gelten, anderenfalls wähle (x_n) ein Orthonormalsystem von $\operatorname{Ker} A$. Dann ist $||x_n|| = 1$, $Ax_n = 0$, aber x_n hat keine konvergente Teilfolge.

Zeigen nun die Abgeschlossenheit des Bildes. (Der Originalbeweis aus der Vorlesung enthielt hier einige Fehler) Sei also $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$ und $y_n \to y$ mit $(Ax_n) = (y_n) \subset \operatorname{Im} A$. Nach Voraussetzung hat dann x_n eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x$. Dann ist

$$||Ax - y|| \leq ||Ax - Ax_{n_k}|| + ||Ax_{n_k} - y||\,,$$

wobei für $k \to \infty$ die rechte Seite beliebig klein wird. Also $Ax = y$ und damit $y \in \operatorname{Im} A$, also ist das Bild abgeschlossen.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Seien also $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ und $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$. Betrachte

$$B := A\,|_{\overline{\operatorname{Im} A^*}} \colon \overline{\operatorname{Im} A^*} \to \operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}.$$

B ist injektiv und stetig und damit nach 2.1 und 2.5 stetig invertierbar. Also gilt für $Ax_n = y_n \to y$: $x_n = A^{-1}y_n \to x_0 = A^{-1}(y)$. □

Satz 2.7. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ injektiv, dann ist*

$$\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{ex. } C > 0, \ \textit{sodass } C\,||x|| \leq ||Ax|| \ \textit{für alle } x \in \operatorname{Im} A. \tag{2.1}$$

Beweis. Durch Widerspruch. Übungsaufgabe. □

2.1 Die Polarzerlegung

Im einfachen Fall $H = \mathbb{C}$ haben lineare Abbildungen $A \in \mathcal{L}(H)$ die Form $Az = az$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Dann besitzt A die Polarzerlegung

$$a = e^{i \cdot \arg(a)} \cdot |a|\,.$$

Bemerke, dass dann auch $|a|^2 = \overline{a}a$, das heißt, $|A|^2 = A^*A$.

Für $A \in \mathcal{L}(H)$ sind A^*A und AA^* symmetrisch.

Im Fall $\dim H < \infty$ gilt für Operatoren $A \in \mathcal{L}(H)$ für das zuvor eingeführte orthonormales System (P_λ) mit $P_\lambda P_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} P_\lambda$ und $P_\lambda = P_\lambda^*$:

$$\begin{aligned} & & A &= \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} A} \lambda P_\lambda \\ \Rightarrow & & A^* &= \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} A} \overline{\lambda} P_\lambda \\ \Rightarrow & & A^*A = AA^* &= \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} A} |\lambda|^2 P_\lambda. \end{aligned}$$

Definiere $|A| := \sum_{\lambda \in \operatorname{spec} A} |\lambda| \, P_\lambda$. Dann ist $r_{\operatorname{spec} A} \geq |A| \geq 0$, wobei das $\geq$-Zeichen für Endomorphismen die folgende Bedeutung hat: $B \geq 0 \;\Leftrightarrow\; B = B^*$ und $\langle Bx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$. Und $C \geq B \;\Leftrightarrow\; C - B \geq 0$.

Für $A^*A =: B \in \mathcal{L}(H)$ möchten wir nun $\sqrt{B}$ konstruieren. O.B.d.A. sei $0 \leq B \leq 1$. Wir haben das Dunford-Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c R_A(z) f(z) \; dz = f(A)$$

für holomorphe Funktionen f. Allerdings ist $f = \sqrt{\cdot}$ keine holomorphe Funktion um 0, wie man an der Darstellung

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}(\log|z| + i \arg(z))}$$

sieht. Wir wählen daher einen anderen Weg, um $\sqrt{B}$ zu definieren.

Betrachte

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - \sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

Dann haben wir für f einerseits die Taylor-Entwicklung im Punkt $x_0 = 0$, nämlich

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$$

und andererseits für die Wurzel eine Darstellung als Binomialreihe, nämlich

$$\sqrt{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-x)^j.$$

Wir erinnern kurz an die Definition des Binomialkoeffizienten: Für $x \in \mathbb{C}$ und $j \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ ist

$$\binom{x}{j} := \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!}$$

und wir setzen $\binom{x}{0} := 0$.

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir dann, dass die Koeffizienten

$$f_j = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ \binom{\frac{1}{2}}{j} (-1)^j & \text{if } j > 0 \end{cases}$$

in der Taylorentwicklung von f allesamt nicht negativ sind.

Durch Anwendung der Taylorformel erhalten wir auch explizit:

$$\begin{aligned}
&f_0 = 0 \\
&f_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{d}{dx} |_{x=0}\, f(x) = \frac{1}{2} \\
&\dots \\
&f_j = \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2j-1}{2} \in [0,1].
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Id} \geq \mathrm{Id} - B \geq 0$, also konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j (\mathrm{Id} - B)^j$$

wegen Absoluter Konvergenz. Wir können also die folgende Definition machen:

Definition 2.8. *Für $0 \leq B \leq 1$ definiere*

$$\sqrt{B} := \mathrm{Id} - f(\mathrm{Id} - B).$$

Der folgende Satz beschreibt die entscheidende Eigenschaft von $\sqrt{\cdot}$:

Satz 2.9. *Ist $A = \sqrt{B}$ gegeben und ein $A' \in \mathcal{L}(H)$ mit $0 \leq A' \leq \mathrm{Id}$ und $(A')^2 = B$, dann ist $A' = A$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

(a) Zeige zunächst, dass $[A', A] = 0$.

(b) Zeige, dass daraus $A' = A$ folgt.

Die Ausarbeitung des genauen Beweises bleibt als Übungsaufgabe. □

Eine äquivalente Formulierung lautet:

Satz 2.10. *Es existiert ein eindeutiger Operator $|A| \in \mathcal{L}(H)$ mit $0 \leq |A| \leq A^*A$ und $|A|^2 = A^*A$.*

$|A|$ ist gegeben durch

$$|A| := \mathrm{Id} - \sum_{j=0}^{\infty} f_j (I - A^*A) = f(I - A^*A).$$

□

Lemma 2.11. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ symmetrisch und $0 \leq A \leq 1$. Dann ist* $\operatorname{spec} A \subset [0,1]$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $A - z$ invertierbar ist für $z = \alpha + i\beta \notin [0,1]$, das heißt für $\alpha > 1$ oder $\alpha < 0$ oder $\beta \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} ||(A-\alpha)x - i\beta x||^2 &= ||(A-\alpha)x||^2 + \beta^2 ||x||^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}\langle (A-\alpha)x, -i\beta x\rangle}_{=0} \\ &= ||(A-\alpha)x||^2 + \beta^2 ||x||^2 . \end{aligned}$$

- Im Fall $\beta \neq 0$ haben wir also eine Abschätzung wie in 2.1 aus Satz 2.7. Also ist $\mathrm{Im}(A - z) = \overline{\mathrm{Im}(A - z)}$, also ist

  $$(A - z) : H \to \mathrm{Im}(A - z) = \overline{\mathrm{Im}(A - z)}$$

  eine bijektive Abbildung zwischen zwei Banachräumen ($\overline{\mathrm{Im}(A - z)}$ ist als abgeschlossener Unterraum eines Banachraums selbst ein Banachraum) und damit nach Satz 2.5 invertierbar.

- Im Fall $\beta = 0$, $\alpha < 0$ haben wir

  $$||(A-\alpha)x||^2 = ||Ax||^2 + \alpha^2 ||x||^2 - \underbrace{2\alpha\langle Ax, x\rangle}_{\leq 0 \text{ für } \alpha<0} \geq \alpha^2 ||x||^2 ,$$

  also auch die Abschätzung 2.1 und wir können analog schließen, dass $(A - z)$ invertierbar ist.

- Im Fall $\beta = 0$, $\alpha > 0$ haben wir

  $$||(A-\alpha)x||^2 = ||\alpha x - Ax||^2 \geq (\alpha ||x|| - ||Ax||)^2 \geq \big((\alpha - ||A||)\, ||x||\,\big)^2$$

  wobei wir $||A|| \leq 1$ benutzt haben, was in 2.12 gezeigt wird. Also haben wir wieder die Abschätzung 2.1.

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 2.12. *Wenn* $0 \leq A \leq 1$, *dann ist*

$$||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{||x||^2} \leq 1.$$

Beweis. Die Sesquilinearform $B : (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ ist positiv semi-definit, das heißt $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ und es genügt der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, wie aus

$$B(\alpha x + B(x, y)y, \alpha x + B(x, y)y) \geq 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} ||A|| &= \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle Ax, y\rangle|}{||x||\,||y||} \\ &\leq \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle Ax, x\rangle|^{\frac{1}{2}}}{||x||} \cdot \frac{|\langle Ay, y\rangle|^{\frac{1}{2}}}{||y||} \leq 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

□

Satz 2.13. (Polarzerlegung) *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$, dann existiert eine unitäre Abbildung $u : \operatorname{Im} A^* \to \operatorname{Im} A$, sodass*

$$A = u \cdot |A|$$

auf $\operatorname{Im} A^*$.

Beweis. Wir haben

$$\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker}|A|^2 = \operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A,$$

wobei die erste Gleichheit gilt, weil $|A|$ ein normaler Operator ist. Man sieht die Gleichheit dann wie in Satz 1.41.

Also gilt

$$(\operatorname{Ker} A)^\perp = (\operatorname{Ker}|A|)^\perp = \overline{\operatorname{Im}|A|} = \overline{\operatorname{Im} A^*}.$$

Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} u : \operatorname{Im}|A| &\to \operatorname{Im} A \\ |A|\, x &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, denn

$$\begin{aligned} && |A|\,(x) = |(|\,A)(y) \\ \Leftrightarrow && |A|\,(x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow && A(x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow && A(x) = A(y). \end{aligned}$$

Und nach Definition gilt

$$u(|A|\,x) = Ax$$

für alle $x \in H$. □

Bemerkung 2.14. *Für $a \leq A \leq b$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ erhalten wir ein ähnliches Ergebnis. Wende das* Spectral Mapping Theorem *1.23 auf eine geeignete holomorphe Funktion $f : [0,1] \to [a,b]$ an.*

Bemerkung 2.15. *u wird* partielle Isometrie *genannt.*

Definition 2.16. *Für $A \in \mathcal{L}(H)$ zerlegen wir* $\operatorname{spec} A$ *in drei disjunkte Teilmengen:*

(a) Das Punktspektrum *(oder* Eigenwertspektrum *oder* diskontinuierliches Spektrum*)*

$$\operatorname{spec_p} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ker}(A - \lambda) \neq 0\},$$

(b) das stetige Spektrum *(oder* kontinuierliches Spektrum*)*

$$\operatorname{spec_c} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda) \text{ } \textit{injektiv}, \operatorname{Im}(A - \lambda) \subset H \text{ } \textit{ist dicht, aber} \neq H\},$$

(c) das Residualspektrum *(oder* Restspektrum*)*

$$\operatorname{spec}_{\mathrm{r}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A-\lambda) \text{ injektiv, aber } \operatorname{Im}(A-\lambda) \subset H \text{ nicht dicht}\}.$$

Beispiel 2.17. *Wir betrachten den Raum $H := L^2(\mathbb{R}^m, d\lambda^m) = L^2(\mathbb{R}^m)$ mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Dann ist

$$\mathcal{L}(L^2) \supset \{M_\phi \mid \phi \in (L^\infty \cap C)(\mathbb{R}^n)\}, \text{ wobei } M_\phi f(x) = \phi(x) f(x).$$

Die linearen Transformationen M_ϕ haben die Eigenschaften

- $M_{\phi_1} M_{\phi_2} = M_{\phi_1\phi_2}$,
- $(M_\phi)^* = M_{\overline{\phi}}$,
- $|M_\phi| = M_{|\phi|}$.

Was ist das Spektrum von M_ϕ?

(i) Wir haben

$$z \in \operatorname{res} M_\phi \;\Leftrightarrow\; \text{ex. } \epsilon(z) > 0, \text{ sodass } |\phi(x) - z| \geq \epsilon(z) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m,$$

also

$$\operatorname{spec} M_\phi = \overline{\phi(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) Falls $\phi(x) = \lambda$ für alle $x \in \mathbb{R}^\ltimes$, dann ist $M_\phi = \lambda \operatorname{Id}$, also $\operatorname{spec} M_\phi = \{\lambda\}$.

(iii) Wir haben $\{0\} \subset \operatorname{spec}_{\mathrm{r}} S$, falls S ein unilateraler Shift ist, das heißt

$$S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})(x^1, x^2, \dots) \qquad \mapsto (0, x^1, x^2, \dots).$$

In diesem Fall ist $S(l^2(\mathbb{N})) \subset l^2(\mathbb{N})$ nicht dicht.

(iv) Falls ϕ ein eindeutiges (globales) Maximum bei x_0 hat, dann ist

$$\phi(x_0) \in \operatorname{spec}_{\mathrm{c}} M_\phi.$$

Dieser Fall bleibt als Übungsaufgabe.

2.2 Kompakte Operatoren

Definition 2.18.

(i) $k \in \mathcal{L}(H)$ *heißt* kompakt*, wenn gilt:*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H \text{ beschränkt } \Rightarrow K(x_n) \text{ enthält konvergente Teilfolge.}$$

Äquivalent dazu ist die Forderung, dass $K(B_r(0))$ *relativ kompakt ist für alle* $r > 0$.

Die Menge aller kompakten Operatoren schreiben wir als $\mathcal{K}(H)$.

(ii) $F \in \mathcal{L}(H)$ *heißt* von endlichem Rang*, falls* $\dim F(H) < \infty$.

Sei F ein Operator von endlichem Rang, $(e_i)_{i=1}^{i_0}$ eine Basis von $\operatorname{Im} F$, dann ist

$$Fx = \sum_{i=1}^{i_0} F^i(x) e_i,$$

wobei F^i stetige lineare Funktionale auf H sind und $F^i = \langle f_i, \cdot\rangle$ nach dem Riesz'schen Darstellungssatz. Dann ist außerdem

$$\begin{aligned}\langle Fx, y\rangle &= \sum_{i=0}^{i_0} \langle x, f_i\rangle\langle e_i, y\rangle \\ &= \langle x, \sum_{i=0}^{i_0} \langle y, e_i\rangle f_i\rangle \\ &=: \langle x, F^* y\rangle.\end{aligned}$$

Ist nun $(x_n) \subset H$ eine beschränkte Folge, so ist

$$Fx_n = \sum_{i=0}^{i_0} \langle x_n, f_i\rangle e_i,$$

wobei $\langle x_n, f_i\rangle$ beschränkte Folgen in $\mathbb{C}$ sind. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gilt auch $Fx_{n_j} \to y$ für eine geeignete Teilfolge n_j. Das heißt also, dass Operatoren von endlichem Rang auch kompakt sind.

Satz 2.19. *(Satz vom fast orthogonalen Element nach F. Riesz) Sei* $(E, ||\cdot||)$ *ein normierter Vektorraum,* $E_1 \subsetneq E$ *ein echter Teilraum. Dann existiert ein* $y \in E \setminus E_1$ *mit* $||y|| = 1$ *und*

$$\operatorname{dist}(y, E_1) := \inf_{e \in E_1} ||y - e_1|| \geq \frac{1}{2}.$$

Beweis. Bleibt als Übungsaufgabe. $\square$

Daraus folgt das folgende Korollar:

Satz 2.20. *Gegeben sei eine Folge von Unterräumen*

$$E \supsetneq E_1 \supsetneq E_2 \supsetneq \dots$$

Dann existiert eine Folge (y_n) *mit* $y_n \in E_n \setminus E_{n-1}$, $||y_n|| = 1$, $\operatorname{dist}(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. □

Lemma 2.21.

(a) $\mathcal{K}(H)$ *ist ein zweiseitiges Ideal in* $\mathcal{L}(H)$.

(b) $\mathcal{K}(H)$ *ist invariant unter Bildung der adjungierten Abbildung und abgeschlossen bezüglich* $||\cdot||$.

Beweis.

(a) Ist klar.

(b) Die $*$-Invarianz bleibt als Übungsaufgabe.

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit bezüglich der Norm $||\cdot||$. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $K_n \to K$ in $\mathcal{L}(H)$. Wir müssen zeigen, dass K kompakt ist.

Sei $(x_n) \subset H$ eine beschränkte Folge. Sei $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, sodass $K_i(x_{k,i})$ konvergiert für $k \to \infty$. Ein Diagonalargument zeigt, dass $K_i(x_{i,i})$ konvergiert für $i \to \infty$.

Damit gilt auch

$$\begin{aligned} ||K(x_{i,i} - x_{j,j})|| &\leq \left|\left|(K - K_{n(\epsilon)})(x_{i,i} - x_{j,j})\right|\right| + \left|\left|K_{n(\epsilon)}(x_{i,i} - x_{j,j})\right|\right| \\ &\leq \left|\left|K - K_{n(\epsilon)}\right|\right| 2C + \epsilon \end{aligned}$$

für beliebiges $\epsilon > 0$ und $n(\epsilon)$ groß genug. Also $||K(x_{i,i} - x_{j,j})|| \to 0$.

□

Was können wir über $\operatorname{spec} K$ sagen?

Offensichtlich ist für $K \in \mathcal{K}(H)$ und $\dim H = \infty$ immer $0 \in \operatorname{spec} K$.

Sei weiter $(x_n) \subset H$ eine beschränkte Folge, sodass

$$(\underbrace{Kx_{n_j}}_{\to y_1} - \underbrace{z_0 x_{n_j}}_{\to y_1 - y}) \to y \in H,$$

d.h. $x_{n_j} \to \frac{1}{z_0}(y_1 - y)$.

Nach einem vorigen Satz ist $\operatorname{Ker}(K - z_0)$ endlichdimensional und $\operatorname{Im}(K - z_0 \operatorname{Id}) = \overline{\operatorname{Im}(K - z_0 \operatorname{Id})}$. Das heißt

- *entweder* ist z_0 ein Eigenwert mit endlicher Vielfachheit
- *oder* $z_0 \in \operatorname{res} K$,

falls wir zeigen können, dass

$$\operatorname{Im}(K - z_0 \operatorname{Id}) = H. \tag{$*$}$$

Sei dafür

$$\begin{aligned}
&H_0 := H,\\
&H_1 := \operatorname{Im}(K - z_0 \operatorname{Id}) \subsetneq H_0,\\
&H_2 := \operatorname{Im}(\underbrace{K - z_0 \operatorname{Id}}_{=:T_{z_0}}) |_{H_1} \subsetneq H_1,\\
&\quad \ldots
\end{aligned}$$

Wir erhalten so eine Folge

$$H_{n+1} \subsetneq H_n \subsetneq \cdots \subsetneq H_0.$$

Also haben wir nach 2.19 eine Folge (y_n), sodass

$$||y_n|| = 1, \quad y_n \in H_n \setminus H_{n-1}, \quad ||y_n - y_j|| \geq \frac{1}{2} \text{ für j ¿n.}$$

Zeigen, dass (Ky_n) keine konvergente Teilfolge hat:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_0}Ky_n &= \frac{1}{z_0}(K - z_0)y_n + y_n\\
&= \frac{1}{z_0}T_{z_0}y_n + y_n
\end{aligned}$$

$$\text{für } m < n: \qquad \begin{aligned}
\frac{1}{z_0}Ky_m - \frac{1}{z_0}Ky_n &= \frac{1}{z_0}T_{z_0}y_m + y_m - \frac{1}{z_0}T_{z_0}y_n - y_n\\
&= y_m + w \quad \text{ für ein } w \in H_{m+1}.
\end{aligned}$$

Also

$$\left|\left|\frac{1}{z_0}Ky_m - \frac{1}{z_0}Ky_n\right|\right| = ||y_m w|| \geq \frac{1}{2}.$$

Also gilt $(*)$. Insgesamt haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.22. *Für $K \in \mathcal{K}$ und $z_0 \in \mathbb{C}^*$ ist entweder $z_0 \in \operatorname{res} K$ oder z_0 ist ein Eigenwert mit endlicher Vielfachheit von K.* □

Wir wissen bereits, dass $\operatorname{spec} K \subset B_{r_{\text{spec}}(K)} \subset B_{||K||}$. Für kompakte Operatoren gilt darüber hinaus der folgende Satz:

Satz 2.23. *Für einen kompakten Operator $K \in \mathcal{K}(H)$ ist $0 \in \mathbb{C}$ der einzig mögliche Häufungspunkt.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann existiert eine Folge (z_n, x_n) von Eigenwerten mit zugehörigen Eigenvektoren, sodass $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq 0$.

Behauptung: $H_n := \operatorname{span}(x_i)_{i=1}^n$ hat Dimension n.

Angenommen, es ist $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$, dann ist auch

$$0 = K^l\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^l \alpha_i x_i.$$

Dies ist eine Vandermonde-Determinante, also ist $\alpha_i = 0$, das zeigt die Behauptung.

Daraus erhalten wir eine Kette

$$H_1 = \operatorname{span}(x_1) \subsetneq \cdots \subsetneq H_n \subsetneq \dots$$

Wähle nun wieder eine Folge (y_n), sodass $||y_n|| = 1$ und $y_n \in H_n \setminus H_{n-1}$. Wir haben dann

$$y_n = \sum_{j=1}^n \beta_{n_j} x_j.$$

Dann gilt für $n > m$:

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{1}{z_n}Ky_n - \frac{1}{z_m}Ky_m\right|\right| &= \left|\left|\frac{1}{z_n}(K - z_n)y_n + y_n - \frac{1}{z_m}(K - z_m)y_m - y_m\right|\right| \\ &= ||y_n + w||\,, \quad \text{für ein } w \in H_{n-1},\end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_n}(K - z_n)y_n &= \frac{1}{z_n}(K - z_n)\sum_{j=1}^n \beta_{n_j} x_j \\ &= \frac{1}{z_n}\sum_{j=1}^n \beta_{n_j}(z_j - z_n)x_j \in H_{n-1}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left|\left|\frac{y_n}{x_n}\right|\right| = \frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z_0|} \text{ für } n \geq n_0.$$

Also ist $\frac{y_n}{x_n}$ beschränkt, was ein Widerspruch zur Kompaktheit von K ist. □

Satz 2.24. *Für $A \in \mathcal{L}(H)$ gilt* $\operatorname{res} A^* = \overline{\operatorname{res} A}$.

Beweis. Sei $z \in \operatorname{res} A$, also $\operatorname{Ker}(A - z\operatorname{Id}) = 0$, $\operatorname{Im}(A - z\operatorname{Id})$ abgeschlossen und $\operatorname{Ker}(A^* - \overline{z}) = 0$. Aus der Polarzerlegung folgt

$$\operatorname{Ker}(A - z) \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow \operatorname{Im}(A^* - \overline{z}) \text{ abgeschlossen},$$

also $\overline{z} \in \operatorname{res} A^*$. □

Wir haben wie im endlichdimensionalen Fall eine Resolventenentwicklung von K um einen Eigenwert $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Für $|z - z_0| < \frac{|z_0|}{2}$ gilt

$$R_K(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} K_j (z - z_0)^j \text{ mit } K_j = \frac{1}{2\pi i} \int R_K(z)(z - z_0)^{-j-1}\, dz.$$

Wissen bereits: $P_0 = -c_0 \int R_K(z)\, dz = -K_{-1}$ ist Projektion und $P_{z_0} A_j = A_j P_{z_0} = A_j$ für $j < 0$, sowie $P_{z_0} A_j = 0$ für $j \geq 0$.

Satz 2.25. *P_{z_0} ist kompakt und $\operatorname{Im} P_{z_0}$ und $\operatorname{Im} P_{z_0}^*$ sind endlichdimensional.*

Beweis. Setze $R_K(z) = (K - z)^{-1} =: Jz - \frac{1}{z}\operatorname{Id}$. Verknüpfung mit $(K - z)$ liefert

$$\operatorname{Id} = (K - z)Jz - \frac{1}{z}(K - z) = KJz - zJz - \frac{1}{z}K + \operatorname{Id},$$

also auch $zJz = K\left(Jz - \frac{1}{z}\right) \in \mathcal{K}(H)$ und insbesondere $Jz \in \mathcal{K}(H)$. Also gilt

$$P_z = -c_0 \int_{|z - z_0| = \frac{|z_0|}{3}} \left(Jz - \frac{\operatorname{Id}}{z}\right)\, dz$$

$$= (\text{etwas Kompaktes}) + c_0 \underbrace{\int \frac{dz}{z}}_{=0} \in \mathcal{K}(H).$$

Also ist P_{z_0} endlichdimensional. Weil P_{z_0} kompakt ist, ist nach 2.21 auch $P_{z_0}^*$ kompakt. $P_{z_0} = U \circ |P_{z_0}|$ mit $U : \operatorname{Im} P_{z_0}^* \to \operatorname{Im} P_{z_0}$ isometrisch. Also $\operatorname{rank} P_{z_0} = \operatorname{rank} P_{z_0}^* < \infty$. □

Wenn z_0 ein Eigenwert von K ist, $z_0 \neq 0$, was passiert dann mit den verallgemeinerten Eigenräumen?

Lemma 2.26. *Es existiert $m_a(z_0) \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Ker}(K - z_0)^{m_a + l} = \operatorname{Ker}(K - z_0)^{m_a}$ für alle $l \in \mathbb{N}$. $H_n = \operatorname{Ker}(K - z_0)^n \subsetneq \operatorname{Ker}(K - z_0)^{n+1}$ für $n \leq m_a(z_0) - 1$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $m_a(z_0) < \infty$. Angenommen, $m_a(z_0) = \infty$., Dann existiert eine Riesz-Folge (y_n), sodass $y_n \in H$, $||y_n|| = 1$, $\operatorname{dist}(y_n, H_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Setzen $x_n = \frac{y_n}{z_0}$. Dann ist $||x_n|| = \frac{1}{|z_0|}$. Und für $m > n$ haben wir die Abschätzung:

$$||Kx_m - Kx_n|| = \left|\left|(K - z_0)\frac{y_m}{z_0} + y_m - y_n - (K - z_0)\frac{y_n}{z_0}\right|\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von K. □

Lemma 2.27. $\dim \operatorname{Ker}(K - z_0)^{m_a(z_0)} < \infty$.

Beweis. Angenommen, $\dim \operatorname{Ker}(K - z_0)^{m_a(z_0)} 0 \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\dim(H^{n+1}/H^n)$. Wähle eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ von $H^{n+1} \ominus H^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} K^{n+1} e_i &= (K - z_0 + z_0)^{n+1} e_i \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{j} (K - z_0)^j z_0^{n+1-j} \right) e_i \\ &= z_0^{n+1} e_i + x \quad \text{für ein } x \in H^n. \end{aligned}$$

Schreiben $K^{n+1} e_j = z_0^{n+1} e_j + x_j$. Damit haben wir

$$\left|\left| K^{n+1} e_i - K^{n+1} e_j \right|\right| = \left|\left| z_0^{n+1} (e_i - e_j) + (x_i - x_j) \right|\right| \geq |z_0|^{n+1} \sqrt{2},$$

was ein Widerspruch zur Kompaktheit von K ist. □

Lemma 2.28. *Es existiert eine Isometrie $U : \operatorname{Im} P_{z_0} \to \operatorname{Im} P_{z_0}^*$, sodass*

$$P_{z_0} = U^* U, \quad P_{z_0}^* = U U^*.$$

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Bemerkung 2.29. *Wir haben*

$$P_{z_0} = -c_0 \int R_K(z)\, dz = c_0 \int P_{z_0} R_K(z) P_{z_0}\, dz.$$

Angenommen $P_{z_0} = U^* U$, dann auch $P_{z_0}^* = U U^* = U U^* U U^* = U P_{z_0} U^*$ und damit

$$P_{z_0}^* = -c_0 \int R_{K^*}(z)\, dz = -c_0 \int U R_K(z) U^*\, dz.$$

Für $j < -1$ ist $U A_j U^* = A_j^*$ andererseits:

$$-A_{-j} = (K - z_0)^{j - \lambda} P_{z_0},$$

also gilt $m_a(z_0) = m_a(\overline{z_0})$ und $\operatorname{Ker}(K - z_0)^l$ und $\operatorname{Ker}(K^* - \overline{z_0})^l$ sind isomorph für alle $l \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.30. *Dann gilt auch die Zerlegung:*

$$H = \operatorname{Ker}(K^* - \overline{z_0})^{m_a(z_0)} \oplus \operatorname{Im}(K^* - \overline{z_0})^{m_a(z_0)}.$$

Beweis. Nämlich gilt für $y = (K - z_0) \in \operatorname{Ker}(K - z_0)^{m_a(z_0)}$:

$$0 = (K - z_0)^{2 m_a(z_0)} x = (K - z_0)^{m_a(z_0)} x = 0 = y.$$

Und analog sehen wir, dass $\operatorname{Ker}(K^* - \overline{z_0})^{m_a(z_0)}$ und $\operatorname{Im}(K^* - \overline{z_0})^{m_a(z_0)}$ zusammen ganz H aufspannen. □

Daraus folgt:

Satz 2.31. *Wenn es einer perturbierte Isometrie V_{z_0} gibt mit $P_{z_0} = V_{z_0}^* V_{z_0}$ und $P_{z_0}^* = V_{z_0} V_{z_0}^*$, dann gilt*

$$\dim \operatorname{Ker}(K - z_0)^l = \dim \operatorname{Ker}(K^* - z_0)^l \textit{ für alle } l \in \mathbb{N}.$$

3 Spektraltheorie normaler Operatoren

Zur Erinnerung: Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ auf einem Hilbertraum heißt normal, falls $[A, A^*] = 0$.

Beispiel 3.1. *Betrachte $H := L^2(\mathbb{R}^m, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^m$ ist. Für $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$ definiere*

$$M_f : H \to Hs \qquad \mapsto M_f s \textit{ gegeben durch } (M_f s)(x) = f(x) \cdot s(x).$$

Dann gilt auch $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

Betrachte nun $\mathcal{A} = C(K, \mathbb{C})$ für einen kompakten Raum K. (Kompaktheit schließt für uns immer die Eigenschaft *Hausdorffsch* ein, dies ist hier aber nicht weiter von Bedeutung)

Was ist nun die Struktur von $\mathcal{A}$? $\mathcal{A}$ ist eine kommutative Banach-Algebra mit Eins im Sinne der folgenden Definition:

Definition 3.2. *Eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra mit Norm, die bezüglich dieser Norm vollständig ist, und ein Einselement enthält, heißt* kommutative B(anach)-Algebra mit Eins*.*

Der sovietische Mathematiker Gelfand verwendete dafür den Begriff des *normierten Rings*.

Wir überlegen nun für das Beispiel obiges $\mathcal{A}$: Kann man aus $\mathcal{A}$ die Menge K zurückgewinnen? Die Antwort hierfür lautet Ja, wie wir nun zeigen wollen:

Für $x \in K$ ist ein lineares Funktional $\phi_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\phi_x(f) := f(x)$. ϕ_x ist außerdem *multiplikativ*, das heißt

$$\phi_x(fg) = \phi_x(f)\phi_x(g).$$

Lemma 3.3. *Ein so definiertes ϕ_x hat entweder Norm 1 oder ist das Nullfunktional.*

Beweis. Falls $\phi_x \neq 0$,dann gibt es ein $f \in C(K)$ mit $\phi_x(f) \neq 0$. Dann

$$\begin{aligned} &\phi_x(f) = \phi_x(f \cdot 1) = \phi_x(f) \cdot \phi_x(1) \\ \Rightarrow &\phi_x(1) = 1 \\ \Rightarrow &\, ||\phi_x|| \geq 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq ||f||_\infty \\ \Rightarrow &||\phi_x|| \leq 1 \\ \Rightarrow &||\phi_x|| = 1. \end{aligned}$$

□

Definition 3.4. *Sei $\mathcal{A}$ kommutative B-Algebra mit Eins. Dann heißt $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein multiplikatives Funktional, falls*

$$\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1 \text{ und } \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

Die Gesamtheit alles multiplikativen Funktionale bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Lemma 3.5. *Sei ϕ ein multiplikatives Funktional auf $C(K)$. Dann existiert ein $x = x_\phi \in K$ mit $\phi = \phi_{x_\phi}$.*

Beweis. Angenommen, das ist nicht so. Das heißt für alle $x_0 \in K$ ist $\operatorname{Ker} \phi \neq \{f \mid f(x_0) = 0\}$. Zu $x \in K$ gibt es $f_x \in C(K)$ mit $\phi(f_x) = 0$ und $f(x) \neq 0$. Es existiert eine Umgebung U_x von x mit $\phi(f_y) \neq 0$ für $y \in U_y$. Dann wählen wir eine endliche Überdeckung $(U_{x_i})_{i=1}^N$ von K und setzen

$$g := \sum_{i=1}^N \overline{f_{x_i}} \cdot f_{x_i} > 0.$$

Weil $g > 0$, existiert $\frac{1}{g}$ und damit

$$0 \neq \phi(g) = \sum_{i=1}^N \phi\left(\overline{f_{x_i}}\right) \phi\left(f_{x_i}\right) = 0,$$

was ein Widerspruch ist. Damit folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.6. *Wir haben eine bijektive Beziehung*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \text{ multiplikativ}\} \leftrightarrow K.$$

Lemma 3.7. *Die maximalen Ideale in $\mathcal{A} = C(K)$ sind genau die Unteralgebren $\{\operatorname{Ker} \phi \mid \phi \text{ multiplikativ}\}$.*

Beweis.

(a) $\operatorname{Ker} \phi_x$ ist ein Ideal. Zu zeigen ist: $\operatorname{Ker} \phi_x$ ist maximal. Angenommen, das ist nicht der Fall, dann existiert ein Ideal I mit $\operatorname{Ker} \phi_x \subsetneq I \subsetneq \mathcal{A}$. Dann gibt es ein $f \in I \setminus \operatorname{Ker} \phi_x$. Also $f(x) \neq 0$. Dann gilt

$$f = \underbrace{(f - f(x) \cdot 1)}_{\in \operatorname{Ker} \phi_x \subset I} + f(x) \cdot 1,$$

also $f(x) \cdot 1 \in I$ und damit $1 \in I$, was ein Widerspruch zu $I \neq \mathcal{A}$ ist.

(b) Sei andererseits I ein maximales Ideal in $C(K)$. Ist $f \neq I$, dann ist $I + C(K)f$ ebenfalls ein Ideal. Wegen Maximalität also $C(K) = I + C(K) \cdot f$ und daher

$$1 = h + af \text{ mit } h \in I, a \in \mathcal{A}.$$

Wir schreiben $\overline{f} := f + I \in C(K)/I$. Dann ist $\overline{1} = \overline{a} \cdot \overline{f}$, also ist $\overline{f}$ invertierbar in $C(K)/I$. Wenn nun I topologisch abgeschlossen ist, dann ist $C(K)/I$ eine kommutative B-Algebra mit Eins.

(c) Zeigen, dass I topologisch abgeschlossen ist, d.h. $\overline{I} = I$.

Wenn dies nicht gilt, so ist $\overline{I} = C(K)$ nach Maximalität von I. Also existiert ein $g \in I$ mit $||1 - g||_\infty < 1$. Also ist g invertierbar durch die Neumann-Reihenentwicklung. Dann ist aber $I = C(K)$, was ein Widerspruch ist.

Also ist $C(K)/I$ ein Integritätsbereich. Damit haben wir nach Satz 3.10

$$\mathcal{A} \stackrel{\pi}{\to} \mathcal{A}/I \stackrel{\Psi}{\to} \mathbb{C}$$

und $\phi := \Psi \circ \pi$ ist das multiplikative Funktional, das I definiert.

□

Definition 3.8. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative B-Algebra mit Eins. Für $A \in \mathcal{A}$ sei*

$$\operatorname{spec} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \operatorname{Id} \textit{ nicht invertierbar}\}.$$

Satz 3.9. *Für $A \in \mathcal{A}$ ist $\operatorname{spec} A \neq \emptyset$.*

Beweis. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Satz 3.10. *(Gelfand-Mazur) Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative B-Algebra mit Eins und ein Integritätsbereich (d.h. alle Elemente außer 0 sind invertierbar), dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$.*

Beweis. Für $A \in \mathcal{A}$ ist $\operatorname{spec} A \neq \emptyset$, also sei $\lambda_A \in \mathbb{C}$, sodass $A - \lambda_A 1$ nicht invertierbar ist. Dann ist $A = \lambda_A 1$, weil $\mathcal{A}$ ein Divisionsring ist und λ_A ist eindeutig bestimmt.

Damit setzen wir

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{A} &\to \mathbb{C} \\ A &\mapsto \lambda_A. \end{aligned}$$

Dann ist Ψ ein Isomorphismus von kommutativen B-Algebren mit 1 und eindeutig bestimmt. □

Dieselbe Beweismethode zeigt auch:

Satz 3.11. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative B-Algebra mit Eins. Dann gibt es eine bijektive Abbildung*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \{\textit{maximale Ideale von } \mathcal{A}\} = M_I(\mathcal{A}).$$

Dabei ist $M_I(\mathcal{A})$ ein kompakter Hausdorffraum.

Vor dem Beweis erinnern wir kurz an den Begriff der schwachen Topologie:

Definition 3.12. *Die schwach-$*$-Topologie auf $B_1(\mathcal{A})$ wird erzeugt von allen Funktionen der Art*

$$\begin{aligned} \hat{A} : B_1(\mathcal{A}^*) &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(A). \end{aligned}$$

Die schwach-$*$-Topologie ist dann die gröbste Topologie, für die alle Funktionen $\hat{A}$ für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ stetig sind.

Beweis. Wir zeigen, dass $M(\mathcal{A}) \subset B_1(\mathcal{A}^*)$, kompakt ist. Hierbei ist $\mathcal{A}^*$ der stetige Dualraum und B_1 die Einheitskugel. Benutze dazu den folgenden Satz:

Satz 3.13. *(Banach-Alaoglu) $B_1(\mathcal{A}^*)$ is kompakt ist der schwach-$*$-Topologie.*

Damit ist $M_I(\mathcal{A})$ Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums. Sei

$$\phi = \lim_{\mathcal{N} \text{ Netz}} (\phi_a)_{a \in \mathcal{N}},$$

so dass

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \lim_{\mathcal{N}} \phi_a(1) = 1 \text{ und} \\ \phi(AB) &= \lim_{\mathcal{N}} \phi_a(AB) = \lim_{\mathcal{N}} \phi_a(A)\phi_a(B)\phi(A)\phi(B). \end{aligned}$$

Dann ist $M_I(\mathcal{A})$ abgeschlossen und damit kompakt. □

Definition 3.14. *Die* Gelfand-Transformation *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{A} &\to C(M(\mathcal{A})) \\ A &\mapsto \Gamma(A) \textit{ gegeben durch } \Gamma(A)(\phi) := \phi(A) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Definition 3.15.

(a) Eine B-$*$-Algebra ist eine B-Algebra mit einer Abbildung $A \mapsto A^*$, sodass:

- *(i) $A^{**} = A$ (Involution),*
- *(ii) $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$ (antilinear),*
- *(iii) $||A^*|| = ||A||$ (isometrisch),*

(iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

(b) Eine C-$*$-Algebra ist eine B-$*$-Algebra mit $||A^*A|| = ||A||^2$.

Bemerkung 3.16. *Aus der Definition von C-$*$-Algebra erhalten wir sofort:*

$$\begin{aligned} & ||A||^2 \leq ||A|| \cdot ||A^*||\,, \\ \Rightarrow \quad & ||A|| \leq ||A^*||\,, \\ \Rightarrow \quad & ||A^*|| \leq ||A^{**}|| = ||A||\,, \end{aligned}$$

also $||A^*|| = ||A||$.

Lemma 3.17. $||\phi|| = 1$ *für alle* $\phi \in M(\mathcal{A})$.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} & 1 = \phi(1_{\mathcal{A}}) = \phi(1_{\mathcal{A}} \cdot 1_{\mathcal{A}}) = \phi(1_{\mathcal{A}})^2, \\ \Rightarrow \quad & \phi(1_{\mathcal{A}}) = 1 = |\phi(1_{\mathcal{A}})| \leq ||\phi|| \cdot ||1_{\mathcal{A}}|| = ||\phi||\,, \end{aligned}$$

also $||\phi|| \geq 1$. Und

$$\begin{aligned} ||\phi|| &= \sum_{0 \neq A \in \mathcal{A}} \frac{|\phi(A)|}{||A||} \qquad \text{schreibe } A = \underbrace{(A - \phi(A)1_{\mathcal{A}})}_{=:B \in \operatorname{Ker}\phi} + \underbrace{\phi(A)1_{\mathcal{A}}}_{=:\lambda} \\ &= \sup_{B \in \operatorname{Ker}\phi, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda|}{||B + \lambda 1_{\mathcal{A}}||} \\ &= \sup_{B \in \operatorname{Ker}\phi, \lambda \neq 0} \frac{1}{\left|\left|1_{\mathcal{A}} + \frac{1}{|\lambda|} \cdot B\right|\right|}. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\left|\left|1_{\mathcal{A}} + \frac{1}{|\lambda|} \cdot B\right|\right| \geq 1$, sonst würden wir mit der Neumann-Reihenentwicklung einen Widerspruch erhalten.

Also $||\phi|| \leq 1$ und insgesamt $||\phi|| = 1$. □

Satz 3.18. *Die Gelfand-Transformation* $\Gamma : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) $M(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

(b) Γ *ist ein Algebren-Homomorphismus.*

(c) $||\Gamma(A)||_\infty \leq ||A||$ *(kontaktiv)*

(d) Für $A \in \mathcal{A}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} A \textit{ invertierbar in } \mathcal{A} &\Leftrightarrow \Gamma(A) \textit{ invertierbar in } C(M(\mathcal{A})) \\ &\Leftrightarrow \Gamma(A)(\phi) = \phi(A) \neq 0 \textit{ für alle } \phi \in M(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Beweis.

(a) Wir haben die bijektive Beziehung

$$M(\mathcal{A}) \leftrightarrow \{\text{maximale Ideale von } \mathcal{A}\}.$$

Nach dem Satz von Krull (bzw. dem Zornschen Lemma) existiert immer ein maximales Ideal, also ist $M(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

(b) Ist klar.

(c) $||\Gamma(A)||_\infty = \sup_\phi |\Gamma(A)(\phi)| = \sup_\phi |\phi(A)| \leq ||A||$.

(d) "$\Rightarrow$": Sei $A \in \mathcal{A}$ invertierbar.

Dann $1_{\mathcal{A}} = AA^{-1}$ und damit

$$\Gamma(1_{\mathcal{A}})(\phi) = (\Gamma(A)\Gamma(A^{-1}))(\phi) = 1,$$

also ist $\Gamma(A)$ invertierbar in $C(M(\mathcal{A}))$.

"$\Leftarrow$": Sei $A \in \mathcal{A}$ nicht invertierbar.

Dann ist $A\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ ein eigentliches Ideal, d.h. $A\mathcal{A} \neq \mathcal{A}$. Also ist $A\mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}\phi$ für eine $\phi \in M(\mathcal{A})$. Also

$$0 = \phi(A) = \Gamma(A)(\phi),$$

das heißt, $\Gamma(A)$ kann nicht invertierbar sein.

□

Lemma 3.19. *Für $A \in \mathcal{A}$ ist*

$$\operatorname{spec}(A) = \operatorname{Im}\Gamma(A) = \Gamma(A)\big(M(\mathcal{A})\big).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \lambda \in \operatorname{spec}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda 1_{\mathcal{A}} \text{ nicht invertierbar} \\ &\overset{3.18}{\Leftrightarrow} \Gamma(A) - \lambda \text{ nicht invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \Gamma(A)(\phi) = \lambda \text{ für ein } \phi \in M(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Äquivalenz benutzt haben, dass $\Gamma(A)$ kompakt ist in $\mathbb{C}$. □

Wir fragen uns im Folgenden, wann Γ injektiv ist und wann Γ sogar eine Isometrie ist.

Zunächst gilt Γ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\Gamma = 0$ und:

$$\operatorname{Ker}\Gamma \ni A \Rightarrow \Gamma(A)(\phi) = 0 = \phi(A) \text{ für alle } \phi \in M(\mathcal{A}),$$

also

$$\bigcap_{\phi \in M(\mathcal{A})} \operatorname{Ker} \phi = \bigcap_{I \subset M(\mathcal{A}) \text{ max. Ideal}} I$$

und damit $\Gamma(A) = 0 \Rightarrow \operatorname{spec}(A) = \operatorname{Im} \Gamma(A) = 0$.

Definition 3.20. *$A \in \mathcal{A}$ heißt* quasi-nilpotent, *wenn* $\operatorname{spec} A = 0$.

Beispiel 3.21. *Der* Volterra-Operator *auf $H := L^2(0,1)$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} V : H &\to H \\ f &\mapsto Vf \text{ gegeben durch } Vf(x) = \int_0^x f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe: Dieser Operator ist kompakt, besitzt aber keinen Eigenwert $\neq 0$. Er ist also ein Beispiel für einen quasi-nilpotenten Operator, der nicht nilpotent ist.

Wir wenden uns nun der Beantwortung der zweiten Frage zu: Es sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C-$*$-Algebra mit Eins.

Definition 3.22. *$A \in \mathcal{A}$ heißt*

(a) selbstadjungiert*, falls $A = A^*$,*

(b) normal*, falls $[A, A^*] = 0$,*

(c) unitär*, falls $AA^* = A^*A = 1_{\mathcal{A}}$.*

Lemma 3.23. *Für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\operatorname{spec} A^* = \overline{\operatorname{spec} A}$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \lambda \notin \operatorname{spec} A &\Leftrightarrow A - \lambda 1_{\mathcal{A}} \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \text{es existiert } (A - \lambda 1_{\mathcal{A}})^{-1} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda 1_{\mathcal{A}})(A - \lambda 1_{\mathcal{A}})^{-1} = 1_{\mathcal{A}} \\ &\Leftrightarrow (A^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{A}})(A^* - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{A}}) 1{-}1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda} \notin \operatorname{spec} A^*. \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 3.24. *Ist A selbstadjungiert, so ist $\operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}$.*

Folgerung 3.25. *$\Gamma : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$ ist ein $*$-Homomorphismus, d.h.*

$$\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A)}.$$

Beweis. $A \in \mathcal{A}$ hat eine Darstellung

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^*)}_{=:\operatorname{Re} A} + \underbrace{i \cdot \frac{1}{2i}(A - A^*)}_{=:i \cdot \operatorname{Im} A}.$$

Dann sind $\operatorname{Re} A$ und $\operatorname{Im} A$ selbstadjungiert und

$$\begin{aligned}
\Gamma(A^*) &= \Gamma(\operatorname{Re} A - i \operatorname{Im} A) \\
&= \Gamma(\operatorname{Re} A) - i\Gamma(\operatorname{Im} A) \\
&= \overline{\Gamma(\operatorname{Re} A) + i\Gamma(\operatorname{Im} A)} \\
&= \overline{\Gamma(A)}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.26. Γ *ist eine Isometrie genau dann, wenn* $\left|\left|A^2\right|\right| = ||A||^2$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. "$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned}
||\Gamma(A)||_\infty &= \sup_{\phi \in M(\mathcal{A})} |\phi(A)| \\
&= \sup_{\phi \in M(\mathcal{A})} |\Gamma(A)\phi| \\
&= \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{spec} A\} \\
&= r_{\text{spec}}(A) \\
&= \lim_{n \to \infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left|\left|A^{2^n}\right|\right|^{2^{-n}} \\
&= ||A|| \text{ nach Voraussetzung.}
\end{aligned}$$

Also ist Γ eine Isometrie.

"$\Rightarrow$": Bleibt als Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.27.

- *Das Musterbeispiel einer kommutativen C-$*$-Algebra mit Eins (und damit auch einer B-Algebra oder B-$*$-Algebra) ist* $\mathcal{L}(H)$ *für einen Hilbertraum* H.
- *Ein Beispiel für eine Algebra, die nicht kommutativ ist, ist* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. *Hier ist* $M(\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)) = \emptyset$. *Der Beweis dazu bleibt als Übungsaufgabe.*

Satz 3.28 (Spektralsatz für normale Operatoren I)**.** *Sei* $A \in \mathcal{L}(H)$ *mit* $[A^*, A] = 0$. *Ist* $\mathcal{C}_A$ *die von* A *erzeugte C-$*$-Algebra, ist* $\mathcal{C}_A$ *kommutativ und homöomorph zu* $\operatorname{spec} A \subset \mathbb{C}$, *wobei* $\operatorname{spec} A$ *ein kompakter Hausdorffraum ist.*

$\mathcal{C}_A$ ist dabei die kleinste C-$*$-Algebra, die A, A^* und Id_H enthält. Ist $p(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, so ist $p(A, A^*)$ enthalten in der von A, A^* und Id_H erzeugten Algebra. Alle solchen $p(A, A^*)$ bilden eine $*$-Algebra $\mathcal{C}_A^0$, und deren Abschluss in $\mathcal{L}(H)$ ist die gesuchte kommutative C-$*$-Algebra $\mathcal{C}_A$.

Beweis. Nach 3.19 ist $\operatorname{Im}\Gamma(A) = \operatorname{spec} A$. Weiter ist $\Gamma(A^*) = \overline{\operatorname{Im}\Gamma(A)}$, d.h. $\Gamma(A) = z\,|_{\operatorname{spec} A}$ und $\Gamma(A^*) \simeq \overline{z}$, $\Gamma(\mathrm{Id}_H) = 1$. Das heißt, jedes Polynom $p(z, \overline{z})$ für $z \in \operatorname{spec} A^k$ ist in der Menge der stetigen Abbildungen $C(\operatorname{spec} A)$.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß wissen wir, dass der Abschluss aller Polynome bzgl. $||\cdot||_\infty$ gegeben ist durch $C(\operatorname{spec} A)$. □

Definition 3.29. *Ist $A = B^*B \in \mathcal{C}_A$ (sogar in $\mathcal{L}(H)$), so heißt A* positiv*. Wir schreiben dafür auch $A \geq 0$.*

Für $A \in \mathcal{L}(H)$ positiv gilt $\langle Ax, x\rangle = ||Bx||^2$, daher die Schreibweise $A \geq 0$.

Lemma 3.30. *Ist $A = B^*B$, so ist* $\operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}_+$.

Beweis. Sei $\lambda < 0$. Dann $A - \lambda 1 = A + |\lambda|\,1$, also

$$\Gamma(A - \lambda 1) = \Gamma(A) + |\lambda|\,1 = \Gamma(B^*B) + |\lambda|\,1_{\operatorname{spec} A} = |\Gamma(B)|^2 + |\lambda|\,1 > 0.$$

Also ist $\Gamma(A - \lambda 1)$ invertierbar, also $\lambda \notin \operatorname{spec} A$. Also $\operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}_+$. □

Lemma 3.31. *Ist A positiv, dann existiert ein $C \in \mathcal{C}_A$ positiv mit $C^2 = A$.*

Beweis. Wir haben $\Gamma(A) \in C(\operatorname{spec} A \subset \mathbb{R}_+) \geq 0$. Also ist $\sqrt{\Gamma(A)} \geq 0$ und stetig. Setze

$$C := \Gamma^{-1}\big(\sqrt{\Gamma(A)}\big),$$

dann gilt $C^2 = A$. □

Satz 3.32 (Spektralsatz für normale Operatoren II)**.** *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann existiert eine Isometrie $\Phi : C(\operatorname{spec} A) \to \mathcal{L}(H)$, die auch ein $*$-Homomorphismus ist und $\Phi(1_{C(\operatorname{spec} A)}) = \mathrm{Id}_H$ erfüllt.*

$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt $*$-Homomorphismus, falls $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$.

Satz 3.33 (Spektralsatz für normale Operatoren III)**.** *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann existiert ein Maßraum (X, Σ, μ), der σ-endlich ist, sowie eine messbare und beschränkte Funktion $a : X \to \mathbb{C}$ und eine injektive Isometrie $\Phi_{III} : H \to L^2(X, \mu)$, sodass*

$$\begin{aligned}
\Phi_{III}(Ay)(\xi) &= a(\xi),\\
\Phi_{III}(A^*y)(\xi) &= \overline{a}(\xi),\\
\Phi_{III}(\mathrm{Id}_H\, y)(\xi) &= \Phi_{III}(y)(\xi).
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.34. *Wir können nur halbeinfache Operatoren gut beschreiben. Was tun mit nicht beschränkten Operatoren?*