

Ableitungen von Funktionen

Differenzialrechnung

Robert Lau, Philip Denkovski

Institut für Physik

06. Juni 2012



Gliederung

- 1 Verschiedene Schulbücher
- 2 Historischer Einstieg
- 3 Tangentenproblem
- 4 Änderungsrate

Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



Historischer Einstieg



Abb. 1: Leibniz



Abb. 2: Newton

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem (Leibniz, 1646-1716)
- Änderungsrate einer Funktion (Newton, 1643-1727)

Historischer Einstieg



Abb. 1: Leibniz

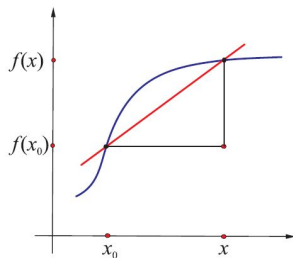


Abb. 2: Newton

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem (Leibniz, 1646-1716)
- Änderungsrate einer Funktion (Newton, 1643-1727)

Tangentenproblem

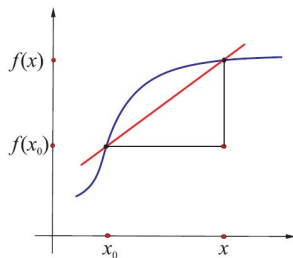
Funktion f sei in einem Intervall $]a, b[$ definiert; $x_0, x \in]a, b[$.



- Anstieg der Sekante in $[x_0, x]$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Anstieg der Tangente in $(x_0 \mid f(x_0))$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Tangentenproblem

Funktion f sei in einem Intervall $]a, b[$ definiert; $x_0, x \in]a, b[$.



- Anstieg der Sekante in $[x_0, x]$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Anstieg der Tangente in $(x_0 \mid f(x_0))$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

1. *Schritt*: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. *Schritt*: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
3. *Schritt*: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

aus *Danckwerts, Vogel*

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

1. *Schritt*: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. *Schritt*: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
3. *Schritt*: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

aus *Danckwerts, Vogel*

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

1. *Schritt*: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. *Schritt*: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
3. *Schritt*: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

aus *Danckwerts, Vogel*

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

1. *Schritt*: Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
2. *Schritt*: Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
3. *Schritt*: Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

1. *Schritt*: Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
2. *Schritt*: Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
3. *Schritt*: Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

1. *Schritt*: Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
2. *Schritt*: Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
3. *Schritt*: Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

Alternativvorschlag

Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

Alternativvorschlag

Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

Alternativvorschlag

Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

Alternativvorschlag

Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Thema:

Anschauliche Einführung in die Differentialrechnung über die mittlere Änderungsrate am Bsp. des Weltrekordlaufes von Usain Bolt.

Stundenziel:

Die SuS sollen in einem Partnerpuzzle zwei verschiedene Darstellungsformen der mittleren Änderungsrate erarbeiten, möglichst genau die maximale Geschwindigkeit von Usain Bolt bestimmen und die Ungenauigkeit ihrer Ergebnisse erkennen.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Thema:

Anschauliche Einführung in die Differentialrechnung über die mittlere Änderungsrate am Bsp. des Weltrekordlaufes von Usain Bolt.

Stundenziel:

Die SuS sollen in einem Partnerpuzzle zwei verschiedene Darstellungsformen der mittleren Änderungsrate erarbeiten, möglichst genau die maximale Geschwindigkeit von Usain Bolt bestimmen und die Ungenauigkeit ihrer Ergebnisse erkennen.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

1. *Schritt*: Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
2. *Schritt*: Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
3. *Schritt*: Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

1. *Schritt*: Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
2. *Schritt*: Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
3. *Schritt*: Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

1. *Schritt*: Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
2. *Schritt*: Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
3. *Schritt*: Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

Quellen:



[Dan] Danckwerts, Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum, 2006



[Fri] Friedrich, *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*, Dissertation, 2001



[Fil] Filler, *Ableitungen von Funktionen*,
[http : //didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d = 331](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d=331), 2010

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

Quellen:



[Dan] Danckwerts, Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum, 2006



[Fri] Friedrich, *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*, Dissertation, 2001



[Fil] Filler, *Ableitungen von Funktionen*,
[http : //didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d = 331](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d=331), 2010

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

Quellen:



[Dan] Danckwerts, Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum, 2006



[Fri] Friedrich, *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*, Dissertation, 2001



[Fil] Filler, *Ableitungen von Funktionen*,
[http : //didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d = 331](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d=331), 2010