

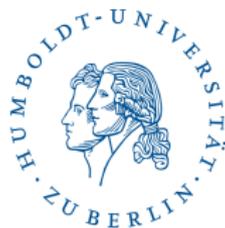
# Ableitungen von Funktionen

## Differenzialrechnung

Robert Lau, Philip Denkovski

Institut für Physik

06. Juni 2012



# Gliederung

- 1 Verschiedene Schulbücher
- 2 Historischer Einstieg
- 3 Tangentenproblem
- 4 Änderungsrate

# Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



# Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



# Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



# Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



# Verschiedene Schulbücher

Arbeitsauftrag:

15 min.

- 1 Bildet 6 Gruppen!
- 2 Betrachtet die Einführung der Differentialrechnung in Schulbüchern. (Achtet dabei im Besonderen auf die **Reihenfolge der Kapitel!**)
- 3 Skizziert den Ablauf auf einer OH-Folie.
- 4 Präsentation der Ergebnisse! (3 min. pro Gruppe)



# Historischer Einstieg



Abb. 1: Leibniz



Abb. 2: Newton

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem (Leibniz, 1646-1716)
- Änderungsrate einer Funktion (Newton, 1643-1727)

# Historischer Einstieg



Abb. 1: Leibniz

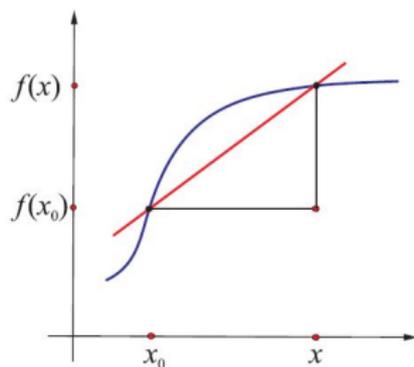


Abb. 2: Newton

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem (Leibniz, 1646-1716)
- Änderungsrate einer Funktion (Newton, 1643-1727)

# Tangentenproblem

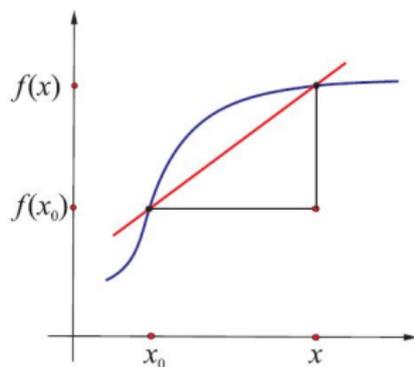
Funktion  $f$  sei in einem Intervall  $]a, b[$  definiert;  $x_0, x \in ]a, b[$ .



- Anstieg der Sekante in  $[x_0, x]$ :  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Anstieg der Tangente in  $(x_0 \mid f(x_0))$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

# Tangentenproblem

Funktion  $f$  sei in einem Intervall  $]a, b[$  definiert;  $x_0, x \in ]a, b[$ .



- Anstieg der Sekante in  $[x_0, x]$ :  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Anstieg der Tangente in  $(x_0 \mid f(x_0))$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

1. *Schritt*: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. *Schritt*: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
3. *Schritt*: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

aus *Danckwerts, Vogel*

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

1. *Schritt*: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. *Schritt*: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
3. *Schritt*: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

aus *Danckwerts, Vogel*

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

1. *Schritt*: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente
2. *Schritt*: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten
3. *Schritt*: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.

aus *Danckwerts, Vogel*

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

# Schulklassischer Zugang zur Differentialrechnung - Tangentenproblem

Arbeitsauftrag:

30 min.

- 1 Bildet dreier Gruppen!
- 2 Lest die euch zugeteilten Texte.
- 3 Informiert eure Gruppenmitglieder über die Kernaussagen eures Textes.

Zusammenfassung der Kernaussagen der Texte im Plenum mit Diskussion und Ergänzungen.

## Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

- 1. Schritt:* Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
- 2. Schritt:* Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
- 3. Schritt:* Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

## Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

- 1. Schritt:* Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
- 2. Schritt:* Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
- 3. Schritt:* Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

## Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

- 1. Schritt:* Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
- 2. Schritt:* Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
- 3. Schritt:* Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

# Alternativvorschlag

## Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

# Alternativvorschlag

## Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

# Alternativvorschlag

## Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

# Alternativvorschlag

## Arbeitsauftrag:

- 1 Bearbeitet das Arbeitsblatt zum Thema: Wie schnell ist Usain Bolt?
- 2 Achte dabei vor allem auf die Abfolge der Aufgaben und den Sachkontext.
- 3 Überlege im Anschluss Vor- und Nachteile dieses Einstieges in die Differentialrechnung im Vergleich zum Tangentenproblem.

Diskussion!

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Thema:

Anschauliche Einführung in die Differentialrechnung über die mittlere Änderungsrate am Bsp. des Weltrekordlaufes von Usain Bolt.

## Stundenziel:

Die SuS sollen in einem Partnerpuzzle zwei verschiedene Darstellungsformen der mittleren Änderungsrate erarbeiten, möglichst genau die maximale Geschwindigkeit von Usain Bolt bestimmen und die Ungenauigkeit ihrer Ergebnisse erkennen.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Thema:

Anschauliche Einführung in die Differentialrechnung über die mittlere Änderungsrate am Bsp. des Weltrekordlaufes von Usain Bolt.

## Stundenziel:

Die SuS sollen in einem Partnerpuzzle zwei verschiedene Darstellungsformen der mittleren Änderungsrate erarbeiten, möglichst genau die maximale Geschwindigkeit von Usain Bolt bestimmen und die Ungenauigkeit ihrer Ergebnisse erkennen.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

### Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...durch den Lebensweltbezug Interesse entwickeln.
- ...begründen, warum die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der maximalen Geschwindigkeit entspricht.
- ...entsprechend ihres individuellen Leistungsniveaus entweder formal-rechnerisch oder grafisch, näherungsweise die maximale Geschwindigkeit bestimmen.
- ...die Qualität ihre Ergebnisse beurteilen und Ideen entwickeln, wie die maximale Geschwindigkeit exakter bestimmt werden kann.

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

# Wofür ist das Arbeitsblatt gut geeignet?

## Teilziele:

Die SuS sollen ...

- ...ihre Kommunikationskompetenz weiterentwickeln.
- ...die Notwendigkeit „mathematischer Sprache“ erkennen.
- ...die Definition der mittleren Änderungsrate erarbeiten und auf den vorliegenden Sachverhalt übertragen. [Eventualziel]

## Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

- 1. Schritt:* Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
- 2. Schritt:* Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
- 3. Schritt:* Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

## Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

- 1. Schritt:* Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
- 2. Schritt:* Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
- 3. Schritt:* Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

## Fazit - Spezifische Schwierigkeiten

- 1. Schritt:* Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff.
- 2. Schritt:* Die Idee, die Tangente als Grenzlage von Sekanten aufzufassen, liegt quer zur Schmiegevorstellung.
- 3. Schritt:* Kann man den Sekantensteigungen (den Differenzenquotienten) überhaupt einen Grenzwert zuschreiben?

aus *Danckwerts, Vogel*

# Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

## Quellen:



[Dan] Danckwerts, Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum, 2006



[Fri] Friedrich, *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*, Dissertation, 2001



[Fil] Filler, *Ableitungen von Funktionen*,  
[http : //didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d = 331](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d=331), 2010

# Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

## Quellen:

-  [Dan] Danckwerts, Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum, 2006
-  [Fri] Friedrich, *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*, Dissertation, 2001
-  [Fil] Filler, *Ableitungen von Funktionen*, [http : //didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d = 331](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d=331), 2010

# Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

## Quellen:

-  [Dan] Danckwerts, Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum, 2006
-  [Fri] Friedrich, *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten*, Dissertation, 2001
-  [Fil] Filler, *Ableitungen von Funktionen*, [http : // didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d = 331](http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article;d=331), 2010