# Übungsklausur Analysis II

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist.
Alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

## Aufgabe 1

Weisen Sie auf der Grundlage der Definitionen $\cos x := \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)$ und $\sin x := \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$ nach, dass die Sinus- und die Kosinusfunktion jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.
(Die Stetigkeit der Exponentialfunktion über $\mathbb{C}$ können Sie voraussetzen.) **6 Pkt.**

## Aufgabe 2

Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Taylor Näherungswerte für

(a) $\ln 1{,}1$ **4 Pkt.**

(b) $\sqrt{101}$ **4 Pkt.**

mit einem Fehler von weniger als 0,001 und begründen Sie, dass der Fehler tatsächlich diesen Wert unterschreiten muss. Verwenden Sie keinen Taschenrechner.

## Aufgabe 3

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f \leq g$. Zeigen Sie, dass für die Riemann-Integrale gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

**10 Pkt.**

## Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale (durch partielle Integration und/oder Substitution):

(a) $\int x^2 e^x\,dx$ **4 Pkt.**

(b) $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ auf $(-r; r)$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ **9 Pkt.**

## Aufgabe 5

Berechnen Sie die Länge der Schraubenlinie $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}$ mit $r, h \in \mathbb{R}^+$.
**6 Pkt.**

## Aufgabe 6

a) Definieren Sie den Begriff der kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ eines metrischen Raumes $(X, d)$.
**2 Pkt.**

b) Weisen Sie nach: Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes $(X, d)$ ist abgeschlossen und beschränkt. **12 Pkt.**

## Aufgabe 7

Beweisen Sie folgenden Satz: Es sei $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ differenzierbar, und zwar gelte $f(x+h) = f(x) + \mathrm{L} \cdot h + r(h)$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ und der Matrix $\mathrm{L} = \left(l_{ij}\right) \in \mathrm{M}(m \times k, \mathbb{R})$. Dann gilt:

1. $f$ ist in $x$ stetig. **3 Pkt.**
2. Alle Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ von $f$ sind in $x$ partiell differenzierbar, und es gilt: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = l_{ij}$ für alle $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots k$. **8 Pkt.**

## Aufgabe 8

Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeigen Sie: $f$ hat auf allen Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Minimum im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein lokales Minimum von $f$. **12 Pkt.**

*Hinweis*: Beschreiben Sie die Geraden durch den Ursprung mittels Parametergleichungen und leiten Sie nach dem Parameter ab.

[1] Diese Klausur umfasst nur die Vorlesungsinhalte bis zu dem angegebenen Datum. Die „richtige Klausur“ kann auch Aufgaben enthalten, die sich auf die Inhalte der noch folgenden Vorlesungen beziehen.