

Projektaufgabe: Aufzüge (Aufgabe der A-lympiade, Niederlande)¹

... Betrieb mit 1200 Angestellten

... Bürogebäude ... 21 Etagen: Erdgeschoss und Stockwerke 1 bis 20

... alle Angestellten arbeiten in den Stockw. 1-20 und benutzen die Aufzüge

... es gibt 6 Aufzüge

Sowohl das Erkämpfen eines Aufzuges als auch die Zeit, die manche Aufzüge unterwegs sind, führen zu **unangenehmen Situationen**. *Es kommt manchmal vor, dass ein Aufzug mit Angestellten besetzt ist, die alle zu unterschiedlichen Etagen unterwegs sind ...*

Die Direktion beschließt, eine „**Aufzugsaufsicht**“ einzustellen ... Sie soll Maßnahmen ergreifen, die den Strom der Angestellten zu den Stockwerken flüssiger verlaufen lassen.

Die Aufsicht listet zuerst die **Angaben** auf, **die mit den Problemen zusammenhängen**:

¹Deutsche Übersetzungen der Aufgaben:

Projektaufgabe: Aufzüge

- ▶ Zu jedem Stockwerk fahren 60 Personen.
- ▶ Kapazität eines jeden Aufzuges: 20 Personen.

Geschwindigkeit der Aufzüge:

- ▶ Von Stillstand bis zu Stillstand ein Stockwerk höher oder tiefer: 8 sec.
- ▶ Von Stillstand bis zum Passieren des nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerks: 5 sec.
- ▶ Zeit zwischen dem Passieren zweier aufeinander folgender Stockwerke: 3 sec.
- ▶ Vom Passieren eines Stockwerks bis zum Stillstand im nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerk: 6 sec.
- ▶ Die Zeit, während der ein Aufzug in einem Stockwerk stillsteht, beträgt durchschnittlich: 10 sec.

Alle Angestellten kommen zwischen 8:45 und 9:00 herein ... gleichmäßiger Strom ... Die Angestellten verlassen ihr Stockwerk zwischen 8:45 und 10:00 kaum. Die Aufzüge werden in dieser Zeit also (fast) nur für den Transport der eintreffenden Angestellten gebraucht.

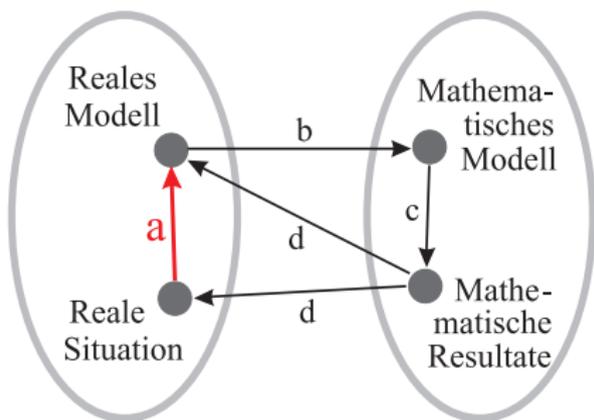


Aufgabe I:

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Eingangshalle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.

Projektaufgabe: Aufzüge

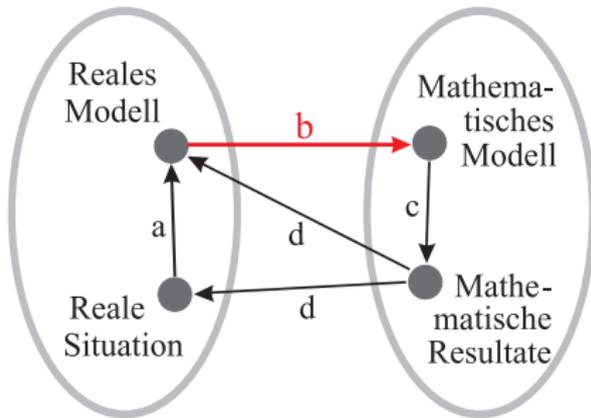
1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.



- ▶ Es handelt sich zunächst um rein deskriptive Modellierung.
- ▶ Idealisierung:
Aufzüge halten auf jeder Etage.

Projektaufgabe: Aufzüge

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.



► Sammeln und „Zusammenfügen“ der Daten

Projektaufgabe: Aufzüge

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.

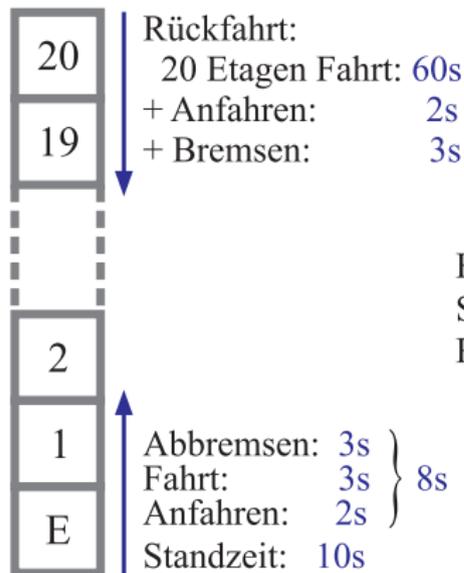
- (1) Von Stillstand bis zu Stillstand ein Stockwerk höher oder tiefer: 8 sec.
- (2) Von Stillstand bis zum Passieren des nächst höher o. tiefer gelegenen Stockwerks: 5 sec.
- (3) Zeit zwischen dem Passieren zweier aufeinander folgender Stockwerke: 3 sec.
- (4) Vom Passieren eines Stockwerks bis zum Stillstand im nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerk: 6 sec.
- (5) Die Zeit, während der ein Aufzug in einem Stockwerk stillsteht: durchschnittlich 10 sec.

(4) ist redundant; aus (1), (2) und (3) ergibt sich:

- ▶ Zeit zum Abbremsen: 3 sec.
- ▶ Zeit zum Anfahren: 2 sec.

Projektaufgabe: Aufzüge

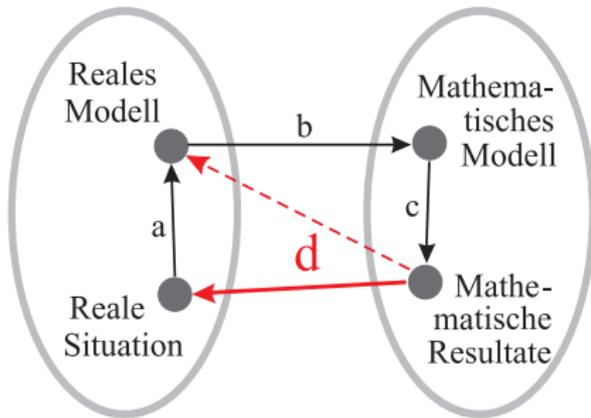
1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.



- ▶ Mathematisierung und Lösung im mathematischen Modell „verwischen“ bei dieser Aufgabe
- ▶ Lösung benötigt nur einfachstes Rechnen
- ▶ Trotzdem div. Fehler
Ursache: ungünstige Strukturierung

Projektaufgabe: Aufzüge

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.



- Es handelt sich um den „worst case“.

Projektaufgabe: Aufzüge

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.
 - ▶ Zwischen 8:45 und 9:00 kommen 1200 Menschen herein, 80 in jeder Minute.
 - ▶ Die Aufzüge sind sehr schnell gefüllt.
 - ▶ Die Aufzüge müssen $10\times$ fahren, die letzte Fahrt nur noch nach oben.
 - ▶ Gesamtfahrzeit: $10 \cdot 435s - 65s = 4285s \approx 71\text{min}$.
 - ▶ Spätestens 9:56 sind alle Menschen am Ziel.
 - ▶ 9:00 Uhr wurden von den 1200 Menschen erst 240 transportiert, also warten 960 Menschen.
 - ▶ Wenn alle Menschen brav in der Schlange stehen, warten diejenigen am längsten, die zuletzt kommen, nämlich von 9:00 bis 9:56.

Projektaufgabe: Aufzüge

1. Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt?
2. Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.
3. Findet heraus, wie groß die Anzahl der Menschen werden kann, die in der Halle warten.
4. **Bestimmt die Zeit (ab der Ankunft im Gebäude), die ein Angestellter brauchen kann, um auf seinem Stockwerk anzukommen.**
 - ▶ Zwischen 8:45 und 9:00 kommen 1200 Menschen herein, 80 in jeder Minute.
 - ▶ Die Aufzüge sind sehr schnell gefüllt.
 - ▶ Die Aufzüge müssen $10\times$ fahren, die letzte Fahrt nur noch nach oben.
 - ▶ Gesamtfahrzeit: $10 \cdot 435s - 65s = 4285s \approx 71\text{min}$.
 - ▶ Spätestens 9:56 sind alle Menschen am Ziel.
 - ▶ 9:00 Uhr wurden von den 1200 Menschen erst 240 transportiert, also warten 960 Menschen.
 - ▶ **Wenn alle Menschen brav in der Schlange stehen, warten diejenigen am längsten, die zuletzt kommen, nämlich von 9:00 bis 9:56.**

Aufgabe II:

Die Aufsicht überlegt sich das folgende Modell, um den Strom der Angestellten – wie sie hofft – schneller weiterzuleiten:

- Drei Aufzüge fahren ausschließlich zu den Stockwerken 1 bis 10.
- Die drei anderen Aufzüge halten nur in den Stockwerken 11 bis 20.

5. Welche Antworten ergeben sich auf die Fragen 1.-4., wenn dieses Modell umgesetzt wird?

Es waren dieselben Überlegungen nochmals anzustellen, was bis auf einige Rechenfehler kein Problem mehr darstellte.

- ▶ Aufzüge 1-10 benötigen für jede Fahrt 3:45 min.
- ▶ Aufzüge 11-20 benötigen für jede Fahrt 4:45 min.
- ▶ Die Angestellten der Stockwerke 1-10 sind nach ca. 37 min, die der Stockwerke 11-20 nach ca. 47 min am Ziel.

⇒ ein beachtlicher Gewinn.

Aufgabe III:

- Überlegt euch mindestens drei Fahrpläne für den Aufzugsverkehr, die für eine schnellere Abwicklung des morgendlichen Spitzenansturms sorgen.

Vergleicht alle Modelle miteinander und benennt für jedes Modell Argumente, die dafür oder dagegen sprechen.

Aufgabe IV:

- Verfasst ein Konzept für die Direktion, in dem ihr Vorschläge, wie der Menschenstrom zügiger weitergeleitet werden kann, vorstellt.

Stützt das Konzept durch Berechnungen, begründet eure Annahmen.

Entscheidet, inwiefern ihr folgenden Umständen Rechnung tragen wollt:

- ▶ Die Angestellten möchten nicht zu viel gegängelt werden und keine zu komplizierte Regelung – aber sie wollen schnell ankommen.
- ▶ Die Direktion hat ihren Sitz im 15-ten Stockwerk und hätte in eurem Konzept am liebsten eine Vorzugsbehandlung.

Vorschläge von Schülern:

- ▶ Die drei Aufzüge 1-10 helfen den oberen Aufzügen, wenn sie mit den Stockwerken 1-10 fertig sind.
- ▶ Bewohner der oberen Stockwerke müssen im 10. Stockwerk umsteigen. Dann benötigen die oberen Aufzüge weniger Zeit.
- ▶ Jeder Aufzug steuert nur 3-4 Etagen an.
- ▶ Die 3 Aufzüge, die in die unteren Etagen fahren, steuern mehr Etagen an (z. B. 1-11), als diejenigen, die in die oberen Etagen fahren.

Es gibt sehr viele Möglichkeiten.

Nach einigem Probieren reift die Erkenntnis, dass etwas Systematik wünschenswert wäre.

Wie lange muss ein „ n - m -Aufzug“ fahren, um alle Personen, die in die Etagen n bis m fahren, hochzubringen?

- ▶ Anzahl der Angestellten in den Stockwerken m bis n :

$$(m - n + 1) \cdot 60$$

- ▶ Anzahl der benötigten Fahrten für die Stockwerke m bis n :

$$\frac{1}{20} \cdot (m - n + 1) \cdot 60$$

- ▶ Fahrtdauer, falls jede Etage nur von einem Aufzug angefahren wird:

$$3 \cdot (m - n + 1) \cdot (21m - 15n + 30)$$

- ▶ Fahrtdauer, falls jede Etage von zwei Aufzügen angefahren wird:

$$\frac{3}{2} \cdot (m - n + 1) \cdot (21m - 15n + 30)$$

- ▶ Nun lassen sich leicht verschiedene Modelle vergleichen.

