

Ähnlichkeitsabbildungen und Ähnlichkeitslehre

Lisa Laudan, Christopher Wolf

Rahmenlehrplan Sek I Berlin

Klasse 9/10

Standards für das Ende der Klasse 10:

- ▶ Die SuS berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen. (Leitidee Messen)
- ▶ Die SuS beschreiben Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte mit Hilfe von Ähnlichkeit. (Leitidee Raum und Form)
- ▶ P2 9/10 Längen und Flächen bestimmen und berechnen

Vorkommen in den Schulbüchern

- ▶ Ähnlichkeitsabbildungen sind nicht in allen Büchern enthalten
- ▶ Schulbücher behandeln den Begriff der Ähnlichkeit, aber nicht zwingend auch Ähnlichkeitsabbildungen
- ▶ Im Schulbuch MatheLive 9 findet man die Ähnlichkeitslehre lediglich im Erweiterungskurs
- ▶ 3 Schulbücher, welche die Ähnlichkeitsabbildungen beinhalten:
 - (1) Lambacher Schweizer 9
 - (2) Neue Wege 9
 - (3) Mathematik heute 9 (lediglich als Erweiterung)

Einstieg in die Ähnlichkeitslehre

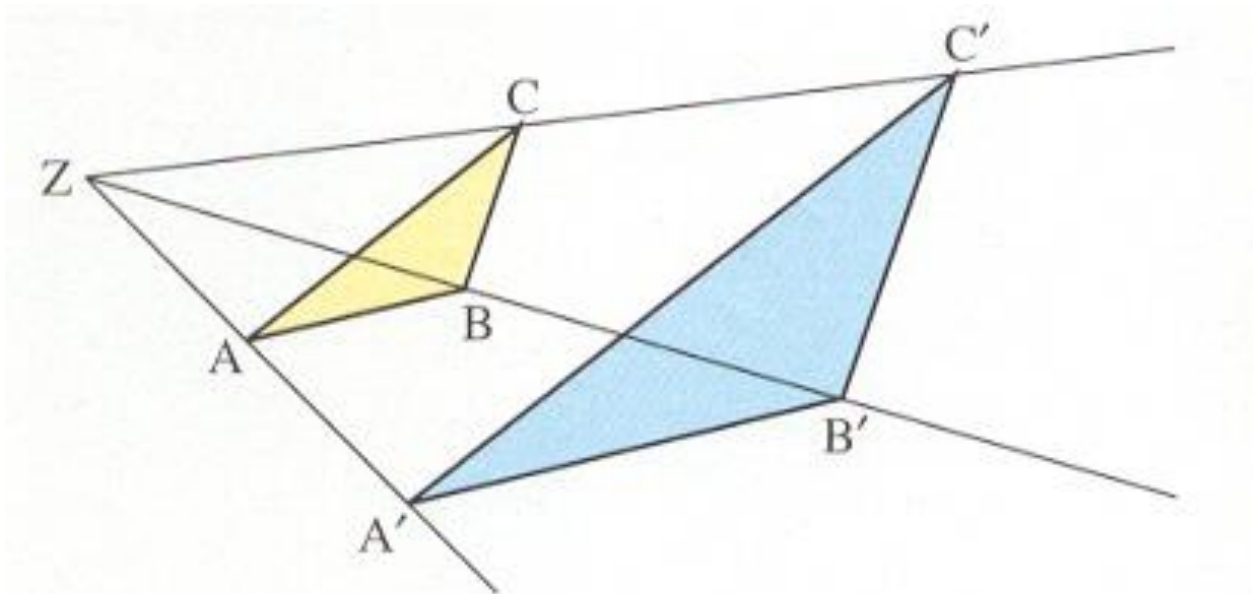
- ▶ Thema der 9. Klasse
- ▶ Einführung erfolgt meistens über Strahlensätze oder über die zentrische Streckung

Lambacher Schweizer (2012)	Neue Wege (2010)	Mathematik heute (1985)
-zentrische Streckungen -Strahlensätze -Ähnlichkeitsabbildungen	-zentrische Streckungen -Strahlensätze -Ähnlichkeitsabbildungen	-Strahlensätze -zentrische Streckungen -Ähnlichkeitsabbildungen

- ▶ Schulbuch 3 setzt die für außermathematischen Anwendungen wichtigen Strahlensätze in den Vordergrund; Vorteil hierbei ist die Anwendungsbezogenheit
- ▶ die 2 aktuelleren Schulbücher setzen die für innermathematischen Anwendungen (z.B. Vektorrechnung) wichtige zentrische Streckung in den Vordergrund
- ▶ Für den Beginn mit der zentrischen Streckung sprechen ihr dynamischer Charakter sowie die Kontinuität des Gesamtaufbaus der Geometrie, die es nahe legt, auf die Kongruenzabbildungen eine Ähnlichkeitsabbildung folgen zu lassen.

Zentrische Streckung

- Halbgerade von Streckzentrum (Z) durch abzubildenden Punkt (A)
- Die entstandene Strecke wird mit dem Streckfaktor k multipliziert
- Diese Strecke wird vom Streckzentrum abgetragen



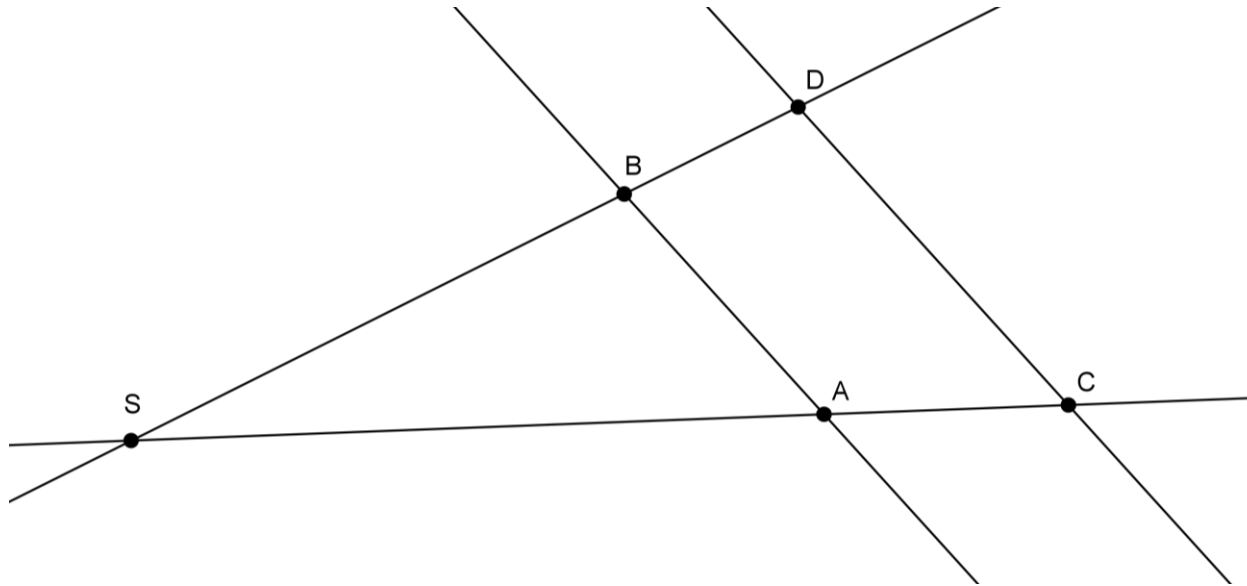
<http://www.lukas-krumnacker.de/Mathematik/Zentrische-Streckung/Zentrische-Streckung-Konstruktion/Zentrische-Streckung-011.htm>

Eine **zentrische Streckung** ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Zentrische Streckung

1. Strahlensatz: $\frac{|SA|}{|SC|} = \frac{|SB|}{|SD|}$, $\frac{|SA|}{|AC|} = \frac{|SB|}{|BD|}$ und $\frac{|SC|}{|AC|} = \frac{|SD|}{|BD|}$

2. Strahlensatz: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|SA|}{|SC|}$ und $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|SB|}{|SD|}$



Bedingung: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

Bildet man eine Figur durch eine Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung oder Verschiebung ab, so bleiben die Größen der Winkel und die Seitenlängen der Figur unverändert. Dabei entsteht eine deckungsgleiche, also kongruente Bildfigur. Diese Abbildungen heißen deshalb auch **Kongruenzabbildungen**.

Sind zwei ähnliche Figuren gegeben, so kann man stets eine der beiden Figuren durch eine **zentrische Streckung** so vergrößern oder verkleinern, dass das Bild zur anderen gegebenen Figur kongruent ist. Die gestreckte Figur lässt sich dann wie oben beschrieben durch eine Kongruenzabbildung auf die zweite Figur abbilden.

Führt man eine zentrische Streckung und eine Kongruenzabbildung hintereinander aus, so nennt man diese Verkettung **Ähnlichkeitsabbildung**. Durch Ähnlichkeitsabbildungen werden stets ähnliche Figuren erzeugt.

[aus Lambacher Schweizer S. 84]

Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

Das Hintereinanderausführen einer zentrischen Streckung und einer Kongruenzabbildung heißt „Ähnlichkeitsabbildung“.



M. C. Escher zeichnete dieses Muster, das aus Rochen besteht [Abbildung aus Lambacher Schweizer 9, S.84]

Kongruenzabbildungen:
Achsen Spiegelung, Punkt Spiegelung, Drehung oder Verschiebung

Einstieg in die Ähnlichkeitsabbildungen

Lambacher Schweizer (2012)	Neue Wege (2010)	Mathematik heute (1985)
Abbildungsgeometrischer Zugang	Zugang über Figurenvergleiche & Bedeutung von Streckenverhältnisse	Zugang über Figurenvergleiche

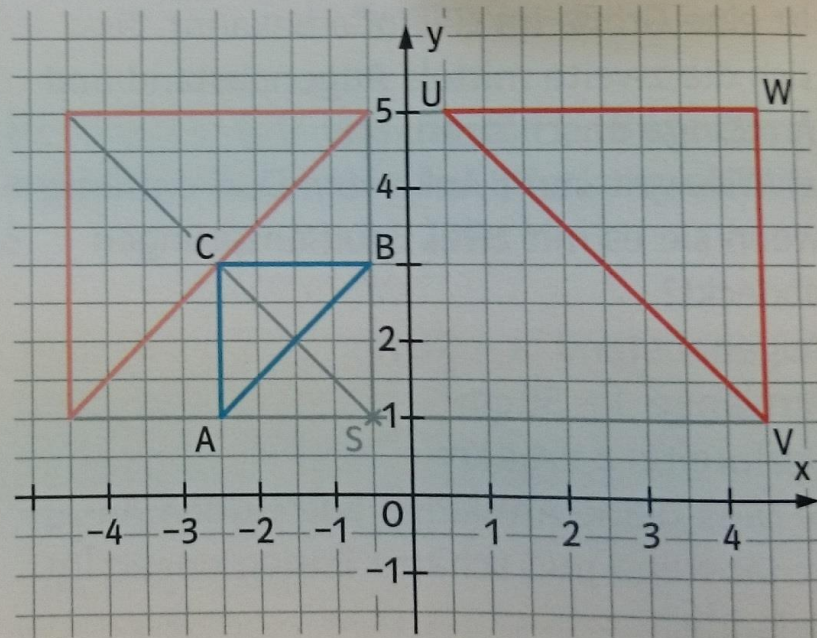
Abbildungsgeometrischer Zugang (Lambacher Schweizer 9)

Beispiel 1

Beschreibe, wie man das Dreieck ABC durch eine Ähnlichkeitsabbildung auf Uvw abbilden kann.

Lösung:

Streckt man das Dreieck ABC vom Zentrum $S(-0,5|1)$ aus mit dem Streckfaktor $k = 2$ und spiegelt anschließend das Zwischenbild an der y -Achse, so erhält man das Dreieck Uvw.



[aus Lambacher Schweizer 9, S. 84]

Abbildungsgeometrischer Zugang (Lambacher Schweizer 9)

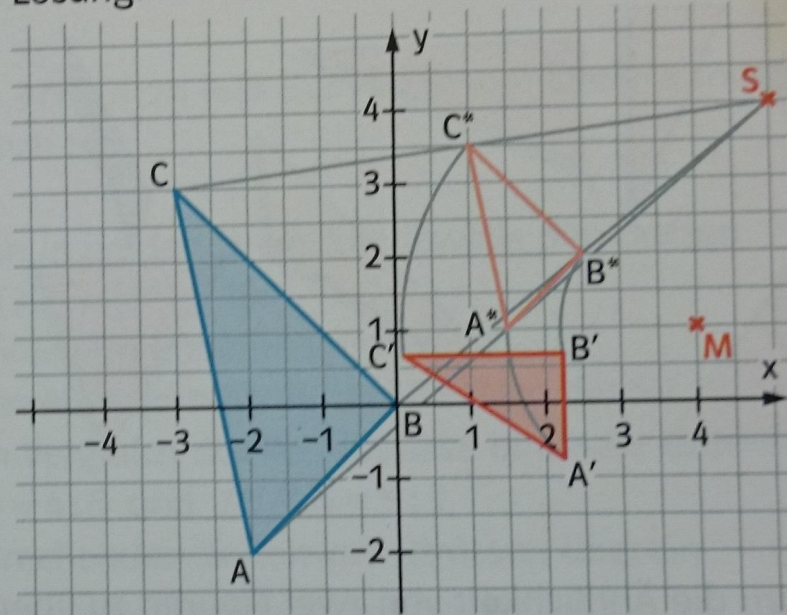
Beispiel 2

Zeichne das Dreieck ABC mit $A(-2|-2)$; $B(0|0)$; $C(-3|3)$ sowie $M(4|1)$ und $S(5|4)$. Bilde das Dreieck durch folgende Ähnlichkeitsabbildung ab: zentrische Streckung mit Streckzentrum S und $k = 0,5$, anschließende Drehung um 45° um M.

Beschreibung der Konstruktion:

1. Zeichne das Dreieck ABC und die Punkte M und S.
2. Strecke ABC von S aus mit dem Streckfaktor $k = \frac{1}{2}$. Man erhält ein Dreieck $A^*B^*C^*$.
3. Drehe $A^*B^*C^*$ um 45° um den Punkt M. Man erhält das Bilddreieck $A'B'C'$.

Lösung:

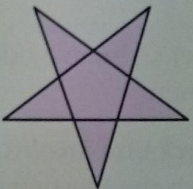
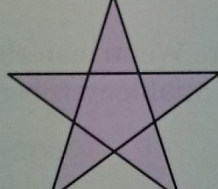
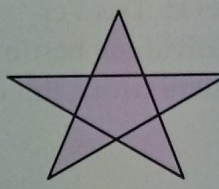
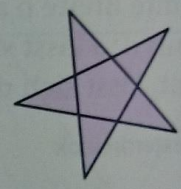
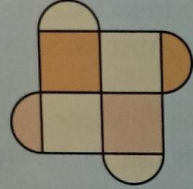
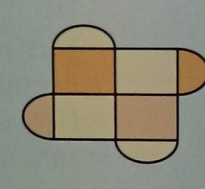
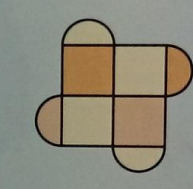
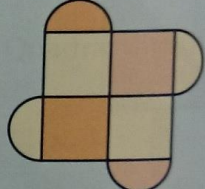






[aus Lambacher Schweizer 9, S. 84]

Zugang über Figurenvergleiche (Neue Wege 9)

Beispiel 1:

1 In Einstellungstests taucht häufig die Frage auf „Welches Bild passt nicht dazu?“

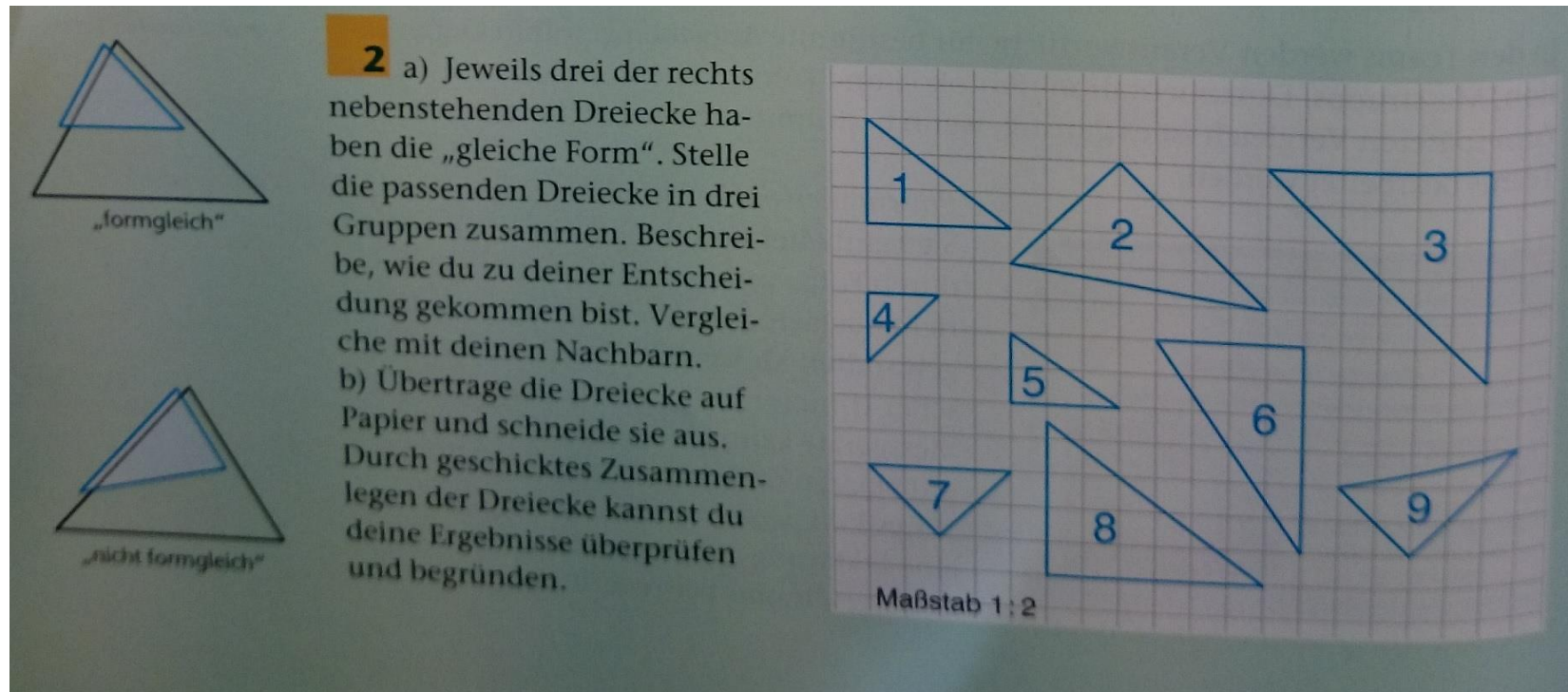
a)				
b)				
c)				

Wie entscheidest du? Begründe deine Entscheidung.

[aus Neue Wege 9, S. 64]

Zugang über Figurenvergleiche (Neue Wege 9)

Beispiel 2:



2 a) Jeweils drei der rechts nebenstehenden Dreiecke haben die „gleiche Form“. Stelle die passenden Dreiecke in drei Gruppen zusammen. Beschreibe, wie du zu deiner Entscheidung gekommen bist. Vergleiche mit deinen Nachbarn.
b) Übertrage die Dreiecke auf Papier und schneide sie aus. Durch geschicktes Zusammenlegen der Dreiecke kannst du deine Ergebnisse überprüfen und begründen.

„formgleich“

„nicht formgleich“

1 2 3
4 5 6
7 8 9

Maßstab 1 : 2

[aus Neue Wege 9, S. 64]

Zugang über Figurenvergleiche (Neue Wege 9)

Beispiel 3:

4 In vielen Computerprogrammen lassen sich Bilder in ihrer Größe verändern, indem man den rechteckigen Grafikrahmen aktiviert und an einem der markierten Punkte zieht. Bild A zeigt das Original. Die Bilder B, C und D sind durch Ziehen an einem Eckpunkt oder an einer Seitenmitte entstanden.

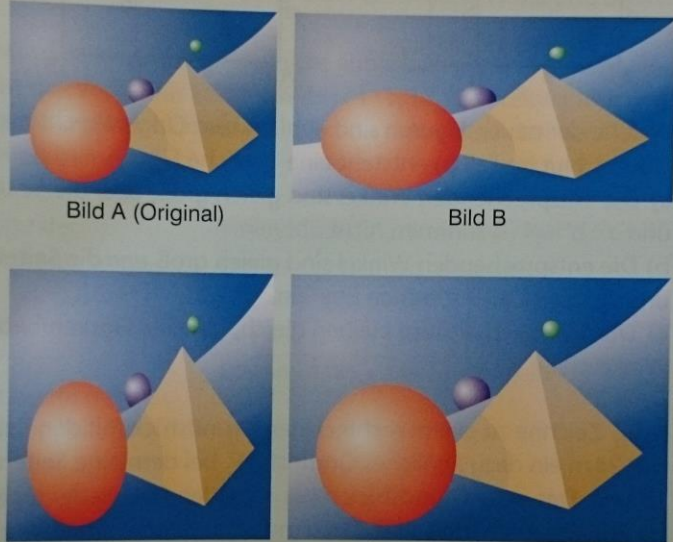


Bild A (Original) Bild B

Bild C Bild D

a) Beschreibe die Wirkungen. An welchem Punkt wurde bei den einzelnen Bildern jeweils der Rahmen „gezogen“?
b) Warum wird nur Bild D als „echte Vergrößerung“ anerkannt? Welche Eigenschaften muss die echte Vergrößerung im Vergleich zum Original aufweisen?

Probiere mit einem eigenen Bild am Computer aus.

[aus Neue Wege 9, S. 65]

Zusammenfassung

Lambacher Schweizer	Neue Wege
Einführung erfolgt nicht so anschaulich, wie in Neue Wege; es werden lediglich Definitionen der Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildung gegeben	Gelungene Einführung in die Ähnlichkeitsabbildungen durch intuitive und alltagsbezogene Beispiele
Abbildungsgeometrischer Zugang	Zugang über Figurenvergleiche Bedeutung von Streckenverhältnissen
Gelungene Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen	-Kaum Aufgaben zur Ähnlichkeitsabbildung -Aufgaben zur zentrischen Streckung -Vergrößerung, Verkleinerung, Streckenverhältnisse und Winkel
Nächster Abschnitt: Ähnliche Dreiecke	Zur Vorbereitung auf: Ähnliche Dreiecke