Erwartungshorizont anstelle einer Gliederung:

- Literaturrecherche Schulbücher und didakt. Fachliteratur
- fachwissenschaftlich fundiert und auf die Unterrichtsebene reflektieren.
- Referate sollen wesentlich als Einführung in selbstständige Arbeitsphasen der Studierenden dienen,
  Referat/Übung/Didkussion: 30 / 45 / 15 min.

Escher - ein Beispiel außermathematischer Kompetenz?

Aufgabe: Zeichne ein Escher-Bild mit der Vorlage!
Nutze dazu die Vorlage und zeichne auf der Folie!

Bearbeitung: kleine Gruppen, max. 3 Studis
Zeit: < 10 Minuten
mit Präsentation der Zeichnungen

(Kein Vorgriff - mehr dazu oder ähnliches unter Parkettierungen!)

Escher - ein Beispiel außermathematischer Kompetenz?

M. C. Escher: Reptilien; Litographie; 1943

(Kein Vorgriff - mehr dazu oder ähnliches unter Parkettierungen!)

„Geometry between the Devil and the Deep Sea“
(Freudenthal, 1971)

5. Verwenden von Kongruenzabbildungen zum Lösen geometrischer Aufgaben -

ein Vortrag von Jacob und Dirk

„Die Geometrie ist durch dogmatische Auffassungen von mathematischer Strenge gefährdet. Sie zeigen sich auf zweierlei Weise: Einerseits wird die Geometrie in ein mathematisches System wie z.B. die Lineare Algebra gepresst, andererseits wird sie durch eine starre Axiomatik stranguliert. So ist es nicht nur ein Teufel, der die Geometrie bedroht... Es sind zwei. Der Fluchtweg, der bleibt, ist die freie See. Sie ist ein sicherer Weg, wenn mann schwimmwn kann. In der Tat: **Geometrie sollte genauso gelehrt werden wie Schwimmen.**"

(H Freudenthal: Geometry between the Devil and the Deep Sea, 1971 in E. C. Wittmann: Elementargeometrie und Wirklichkeit, 1987)

„Er (Hans Freudenthal) übte nachhaltigen Einfluss auf die Mathematikdidaktik aus, verhinderte die Einführung der Neuen Mathematik (Gruppen- und Körperaxiome, Funktionsbegriff) in den Niederlanden (1970er) und begründete die Schule der realistischen mathematischen Erziehung"

(http://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Freudenthal)

„Die Geometrie ist durch dogmatische Auffassungen von mathematischer Strenge gefährdet. Sie zeigen sich auf zweierlei Weise: Einerseits wird die Geometrie in ein mathematisches System wie z.B. die Lineare Algebra gepresst, andererseits wird sie durch eine starre Axiomatik stranguliert. So ist es nicht nur ein Teufel, der die Geometrie bedroht... Es sind zwei. Der Fluchtweg, der bleibt, ist die freie See. Sie ist ein sicherer Weg, wenn mann schwimmwn kann. In der Tat: **Geometrie sollte genauso gelehrt werden wie Schwimmen.**"

Lösen geometrischer Aufgaben = Problemlösen

Vorbetrachtungen – Problemlösen nach Wittmann

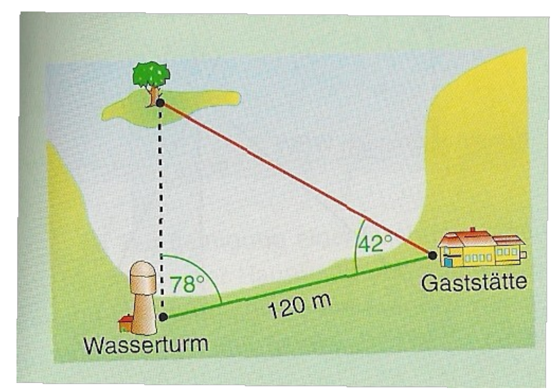
Wittmann[1]:

Geometrische Probleme treten niemals isoliert auf,

sondern in der Praxis immer in Problemkontexten.

Vorteil von Problemkontexten:

- stiften Sinnzusammenhänge,
- schaffen eine Verständnisgrundlage,
- mobilisieren verfügbare Kenntnisse und Fertigkeiten,
- ermöglichen ein heuristisches Vorgehen



aus Mathematik, Neue Wege, 8, Schroedel

(1) E. C. Wittmann: Elementargeometrie und Wirklichkeit, 1987; H.-G. Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, 2009

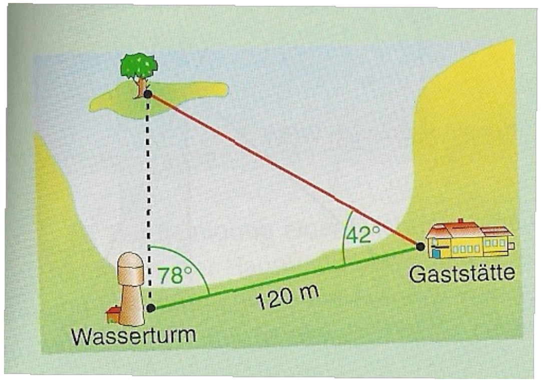
Vorbetrachtungen – Problemlösen nach Wittmann

Ein Problem:

Ist eine Aufgabenstellung, deren Lösung nicht offensichtlich ist und für Schülerinnen und Schülern (SuS) steht kein explizites und schematisches Lösungsverfahren zur Verfügung. Ob ein Problem vorliegt ist von den Kompetenzen der SuS bestimmt und nicht eindeutig festgelegt (z.B. Minimierungsproblem).

Problemarten:

- Beweisproblem,
- Konstruktionsproblem,
- Modellierungsproblem,
- Anzahlproblem,
- Optimierungsproblem,
- Berechnungsproblem



aus Mathematik, Neue Wege, 8, Schroedel

Vorbetrachtungen – Problemlösen nach Wittmann

Ziele des Problemlösens - Aspekt der Anwendungsorientierung und Kreativität

innermathematisch:

- erkennen mathematischer Fragestellungen
- Fragestellungen formulieren können
- geeignete Modelle und Vorgehensweisen kennen und einsetzen

nicht mathematikbezogen:

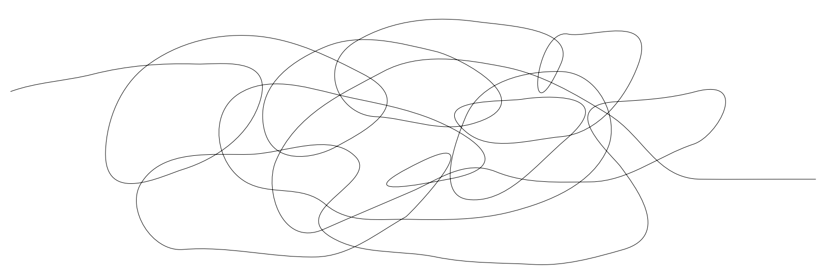
- in Gruppen arbeiten
- Lösungen präsentieren
- eigenes Handel reflektieren und beschreiben
- Anstrengungsbereitschaft und Durchhaltevermögen
- Vertrauen in eigenes Leistungsvermögen

Vorbetrachtungen – Problemlösen nach Wittmann

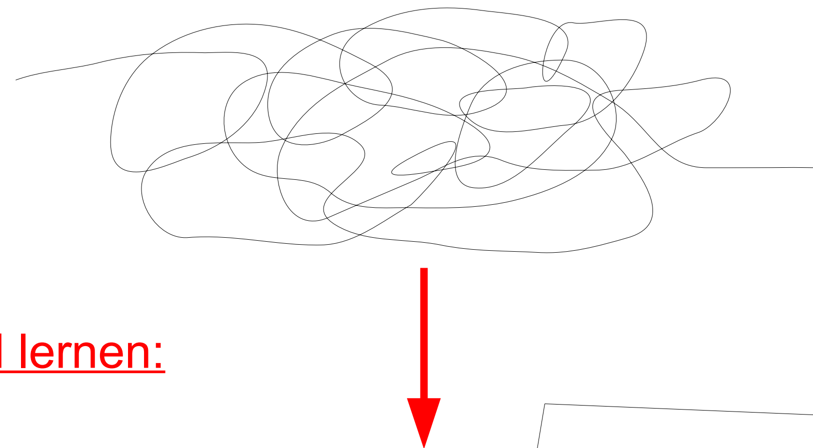
Schritte zum Problemlösen:

Verstehen des Problems, Lösungsplan entwickeln, Plan ausführen, Rückschau

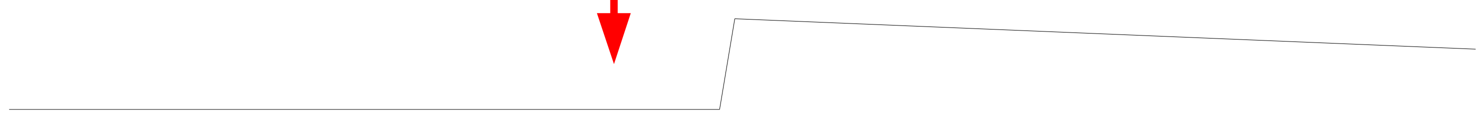
Alles schön und gut, aber wie löse ich ein Problem?



Vorbetrachtungen – Problemlösen nach Wittmann



Problemlösen lehren und lernen:



- allgemeine heuristische Strategien, wie Darstellungswechsel, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren ...
- inhaltsspezifische heurist. Strategien: Hilfslinien einzeichnen, gleich lange Strecken suchen, entsprd. Winkel, kongruente Dreiecke ...
- Hilfe im Lösungsprozess: Motivationshilfe, Rückmeldung, strategische („Versuche anders“), inhaltsorientierte („Fertige Zeichnung an“) und konkrete inhaltliche Hilfe („zeichne...“)

In der Schule?

RLP Berlin Sek. I
Beitrag des Mathematikunterrichts zum Kompetenzerwerb

2.1 Mathematische Kompetenzen (Seite 10)[1]:

Probleme lösen

Mathematisches Problemlösen findet statt, sobald in einer Situation **nicht unmittelbar ein Lösungsverfahren** angewendet werden kann, sondern ein Lösungsweg entwickelt oder ausgewählt werden muss. Problemlösen in der Mathematik zeichnet sich durch die **Verwendung spezifischer Strategien** aus (z.B. Einzeichnen von Hilfslinien, Auswählen von Hilfsgrößen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten) und die **Verwendung verschiedener Darstellungsformen** (verbal, numerisch, graphisch, symbolisch). Ein wesentlicher Bestandteil des Problemlösens ist die **Reflexion von Lösungswegen** und von verwendeten **Strategien**.

Fachbezogene mathematische Kompetenzen	
Prozessbezogene mathematische Kompetenzbereiche	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzbereiche (nach Leitideen)
- Argumentieren - Probleme lösen - Modellieren - Darstellungen verwenden - Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen - Kommunizieren	- Zahl - Messen - Raum und Form - Funktionaler Zusammenhang - Daten und Zufall

(1) RLP Berlin Mathematik Sek I

RLP Berlin Sek. I - Standards

Problemlösen (Seite 20)

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Muster und Beziehungen bei Zahlen und Figuren und finden mögliche mathematische Problemstellungen,
- geben inner- und außermathematische Problemstellungen in eigenen Worten wieder und entnehmen ihnen die relevanten Größen,
- vereinfachen Probleme und bilden und untersuchen Beispiele,
- finden und nutzen geeignete Darstellungen und Hilfsgrößen (z. B. Hilfslinien, Zwischenergebnisse, Variablen),
- verwenden heuristische Strategien,
- reflektieren Lösungswege und überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen.

Unterschiede hinsichtlich des Anforderungsniveaus liegen in

- der Offenheit, Komplexität und Allgemeinheit der Probleme,
- der Anzahl der selbst zu findenden Zwischenschritte,
- dem Grad der Selbstständigkeit bei der Problembearbeitung,
- der Komplexität der verwendeten Strategien (vom systematischen Probieren über das Zeichnen einer informativen Figur bis hin zum Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten).

RLP Berlin Sek. I - Module

„Kongruenzabbildungen zum Lösen geometrischer Aufgaben“ kommen nicht explizit vor.

Leitidee Raum, Form/Messen

P6 7/8 Konstruieren und mit ebenen Figuren argumentieren, Zentrale Leitidee: Raum und Form: „begründen die Eindeutigkeit (Kongruenz) von Dreiecken“, Konstruktion und Eindeutigkeit

W3 7/8 Geometrische Abbildungen und Symmetrie, Zentrale Leitideen: Raum und Form, Messen: „Zur Anwendung der Kongruenzabbildungen eignen sich auch Spiele und Wettbewerbe. Sachbezüge: Ebene symmetrische Figuren in der Lebenswelt, z. B. Ziffern, Buchstaben in Druckschrift, Muster, Parkettierungen z. B. von Maurits Cornelis Escher (1898-1972)“

Fähigkeiten: „befassen sich kreativ und selbstbestimmt mit Situationen, in denen sie Probleme mit mathematischen Mitteln lösen (Kreativität im Umgang mit Mathematik).“

Standards für das Ende der Klasse 8: „nutzen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen“

→ **„Schwimmunterricht“**

RLP Berlin Sek. II

Wortfindung „Kongruenz“ hat zwei Treffer und Kongruenz zum Lösen... kommt nicht vor.

Leitidee Raum und Form / Messen

„...mathematisch fassbare Probleme zu strukturieren und erfolgreich zu bearbeiten, Problemlösen und Modellieren, Mathematische Darstellungen verwenden.“

→ Geometrie wird algebraisch

Wie sieht es nun konkret aus?

Voraussetzungen

<u>Notwendige Voraussetzungen</u>

in Schule für das Lösen von geometrischen Aufgaben mittels Kongruenzabbildungen:

- Symmetrie,
- Konstruktion der Kongruenzabbildungen,
- Winkel im Dreieck,
- Winkel an geschnittenen Parallelen,
- Kongruenzsätze für Dreiecke

→ RLP ansehen bzw. Curriculum der einzelnen Schule

Kongruenz – Sätze/Aussagen ohne Beweis

Satz: Zwei Dreiecke in der Ebene mit den Seitenlängen a, b, c und a', b', c' sind genau dann kongruent, wenn bis auf Permutation a = a', b = b' und c = c' gilt. (Ilka Agricola, Thomas Friedrich: Elementargeometrie, Vieweg und Teubner, 2009)

Bei Strecken und Winkeln werden synonym zu „kongruent“ die Termini „gleichlang“ bzw. „gleichgroß“ benutzt. (Wittmann)

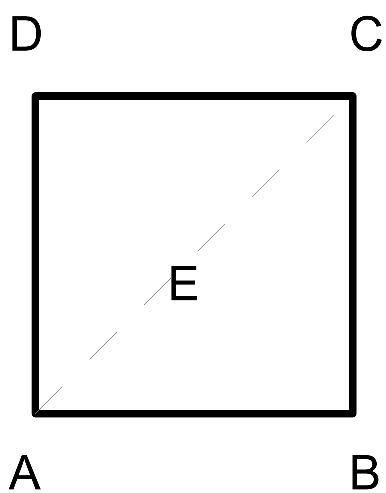
Kongruenzabbildungen: Drehung, Verschiebung, Spiegelung sind längen- und winkeltreu (bijektiv, vergleiche letzte Stunde)

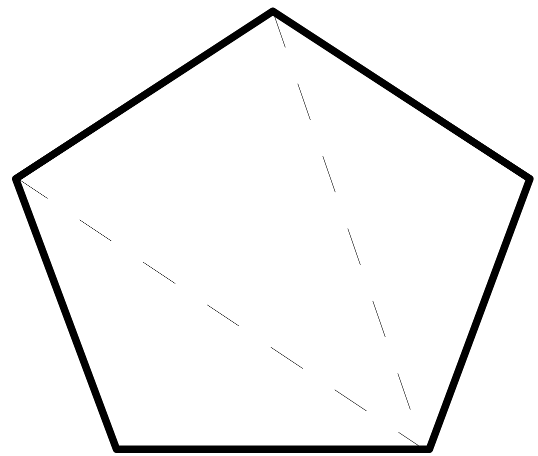
Charakterisierung Kongruenz:

- Längentreue
- Umlaufsinn wird für alle Punkte erhalten oder umgekehrt
- Eindeutigkeit – eine Kongruenzabbildung ist durch drei nicht auf einer Geraden liegender Punkte bestimmt, oder durch zwei Punkte und Umlaufsinn

Kongruenz – Sätze/Aussagen ohne Beweis

Besondere Rolle der Dreiecke innerhalb ebener Figuren → SSS, SWS, WSW...
Aber auch Konstruktionen und Beweise über Kongruenzabbildungen sind möglich.





u.s.w.

Aufgabe: Begründe, dass die Diagonale E das Rechtecks ABCD in zwei kongruente Dreiecke teilt (ohne SSS o.ä.)!

Bearbeitung: jeder für sich oder mit Nachbar
Zeit: 3Minuten mit kurzer Präsentation der Lösung

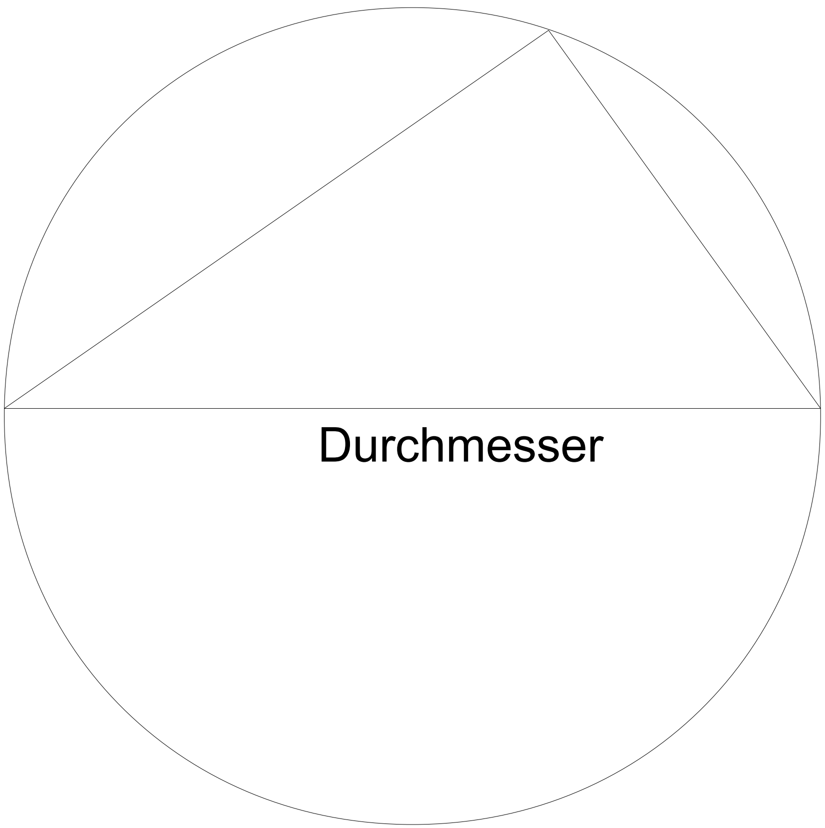
Aufgabe für alle zur Übung

Beweis Satz des Thales mittels Konstruktion – Drehung, Spiegelung …

Bearbeitung: jeder für sich oder mit Nachbar

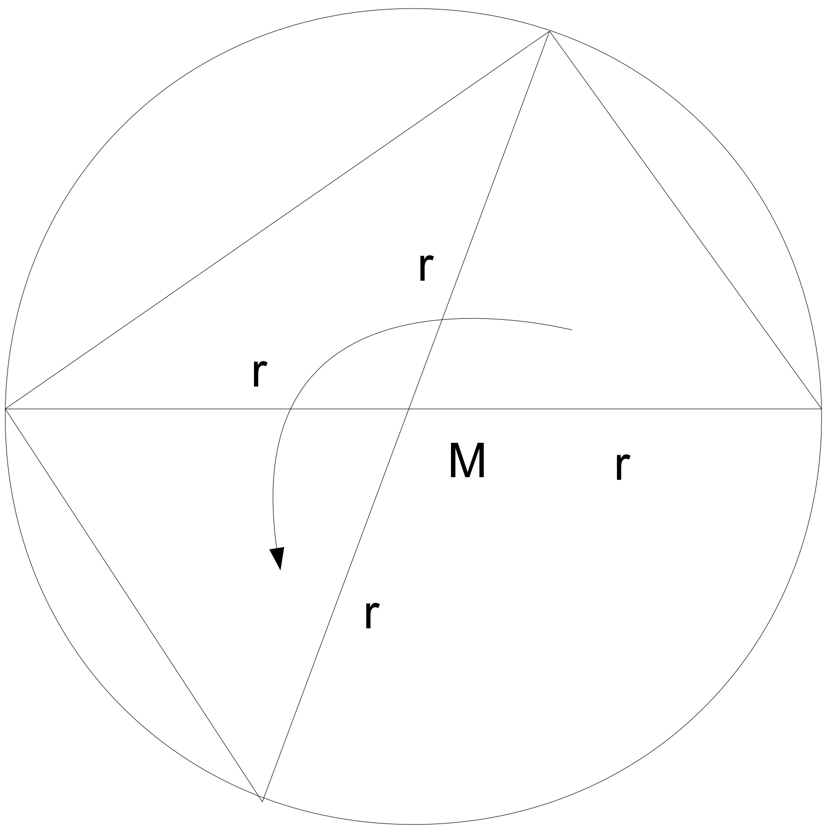
Zeit: < 5 Minuten

mit kurzer Präsentation der Lösung



Aufgabe für alle zur Übung

Beweis Satz des Thales mittels Konstruktion - Drehung



Gleichlange Diagonalen im Viereck

→ Rechteck

→ Winkel im Rechteck haben 90°

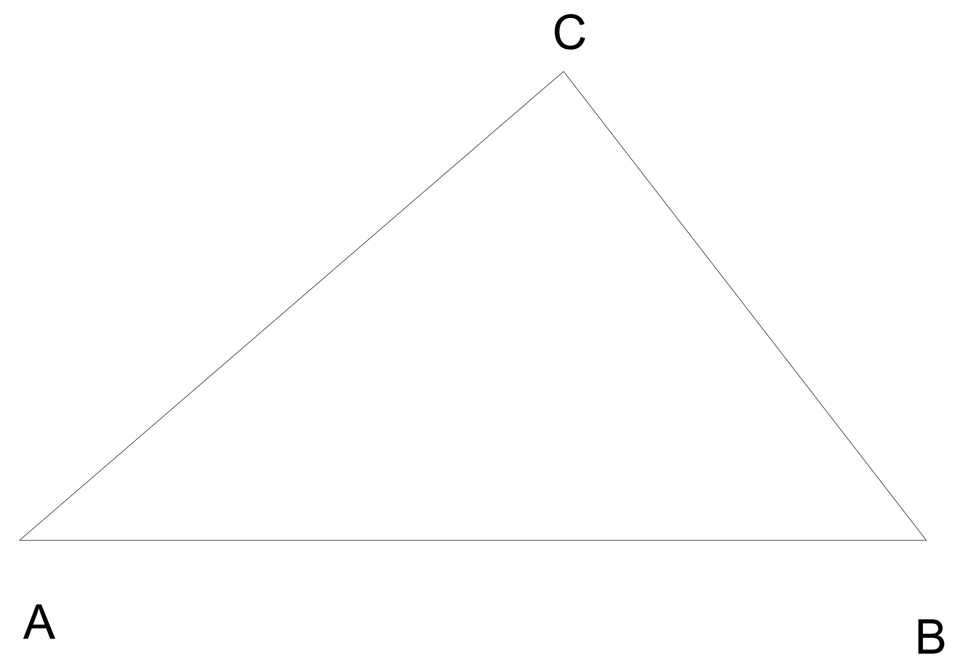
Aufgabe für alle zur Übung

Umwandlung eines Dreiecks ABC in ein flächengleiches Rechteck mittels Konstruktion.

Bearbeitung: jeder für sich oder mit Nachbar

Zeit: < 5 Minuten

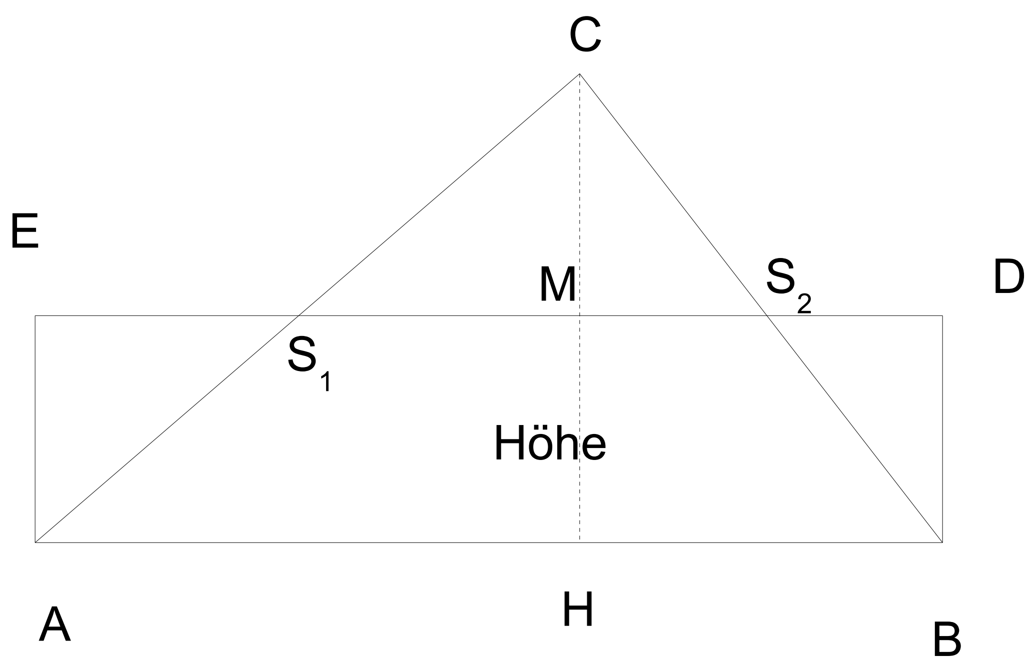
mit kurzer Präsentation der Lösung



aus H.-G- Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1

Aufgabe für alle zur Übung

Umwandlung eines Dreiecks ABC in ein flächengleiches Rechteck ABDE mittels Konstruktion



M sei Mittelpunkt auf Höhe

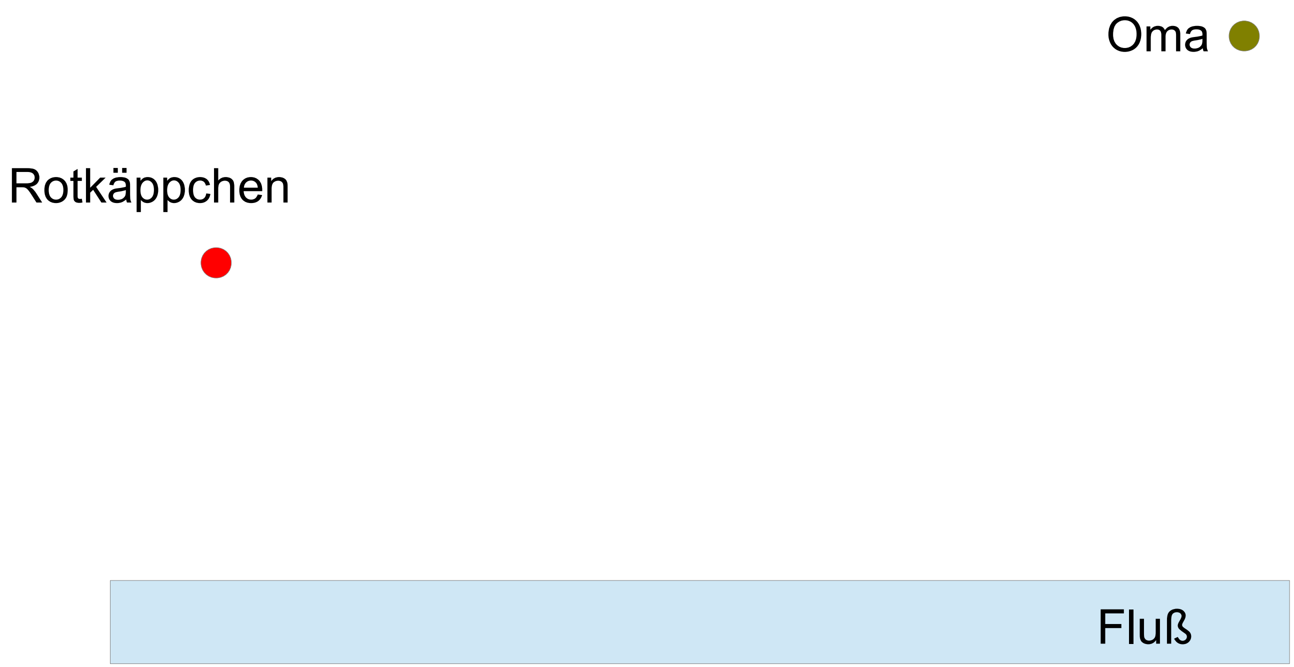
aus H.-G- Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1

Das alles war wieder ohne Kontext – keine Erfahrungswelt!

Escher?

Beispielaufgabe 1 – der Klassiker, eine Aufgabe für alle

Rotkäppchen soll der Oma Wasser aus dem Fluß bringen. Da schon der Wolf wartet, muß Rotkäppchen den kürzesten Weg finden. Kannst du den kürzesten Weg konstruieren?



Ist das ein Konstruktions-, Modellierungs-, Optimierungs- oder Beweisproblem?
Und welche Ziele verbinden sich mit dieser Aufgabe?
Kurz nachdenken jeder für sich und Meinung äußern.

Beispielaufgabe 1 – der Klassiker, eine Aufgabe für alle

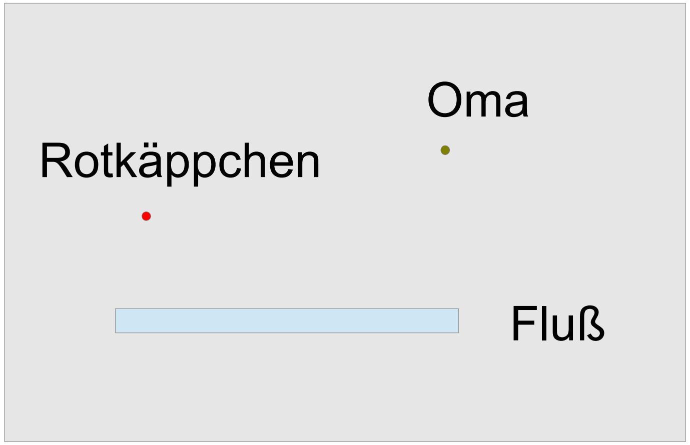
Ziele des Problemlösens (Wittmann) - Aspekt der Anwendungsorientierung und Kreativität

innermathematisch:

- erkennen mathematischer Fragestellungen
- Fragestellungen formulieren können
- geeignete Modelle und Vorgehensweisen kennen und einsetzen

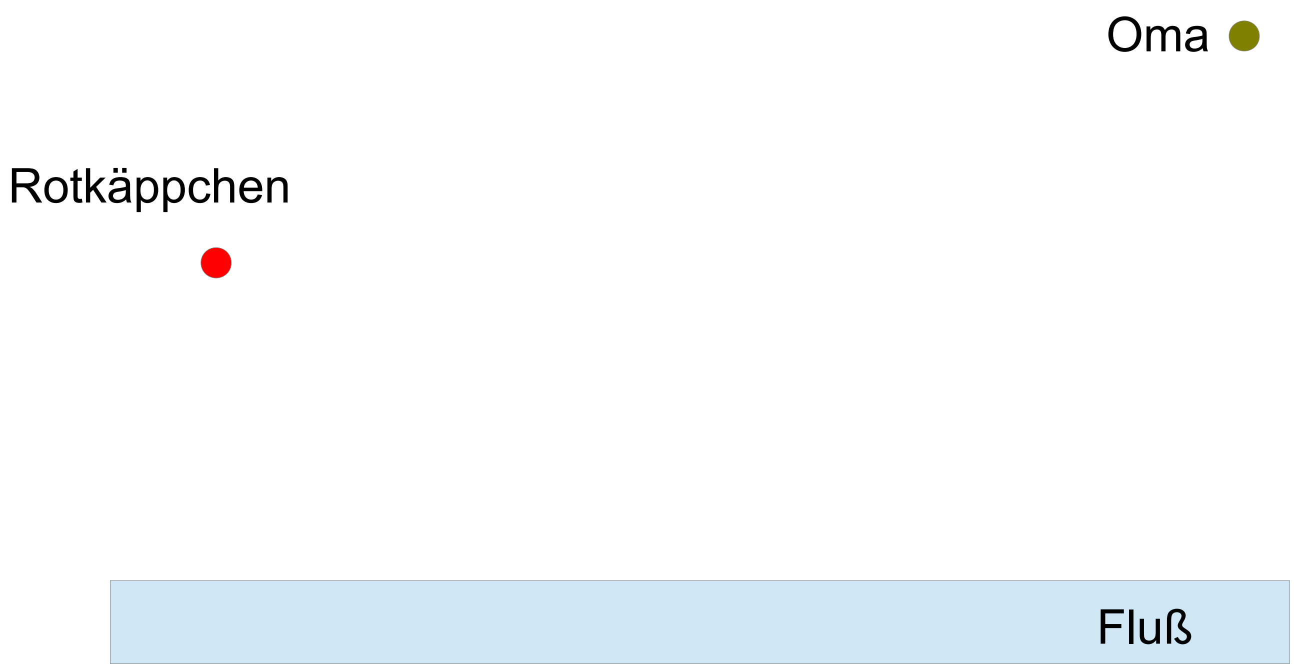
nicht mathematikbezogen:

- in Gruppen arbeiten
- Lösungen präsentieren
- eigenes Handel reflektieren und beschreiben
- Anstrengungsbereitschaft und Durchhaltevermögen
- Vertrauen in eigene Leistungsvermögen gewinnen



Beispielaufgabe 1 – der Klassiker, eine Aufgabe für alle

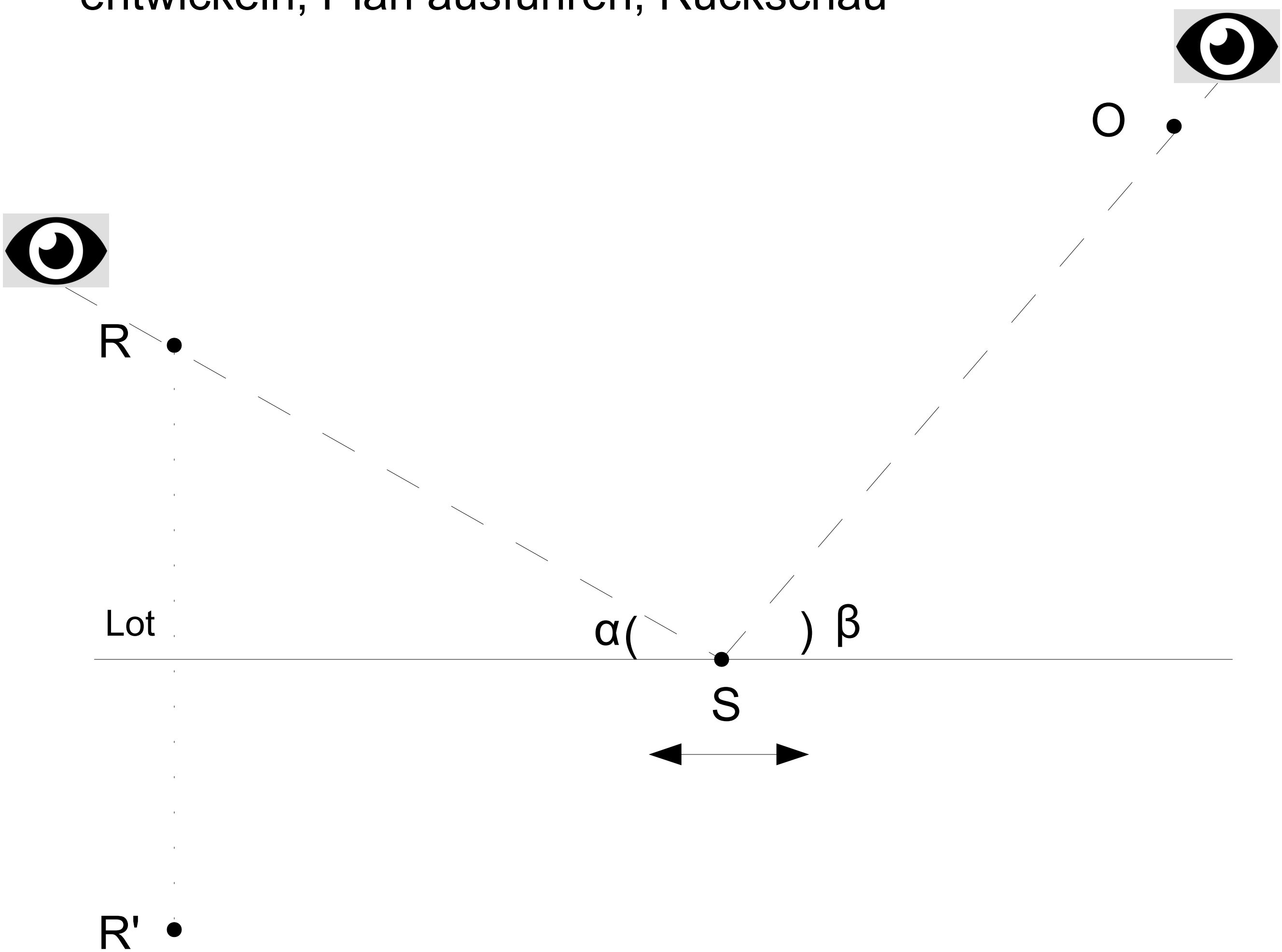
Rotkäppchen soll der Oma Wasser aus dem Fluß bringen. Da schon der Wolf wartet, muß Rotkäppchen den kürzesten Weg finden. Kannst du den kürzesten Weg konstruieren?



Wie kann ich diese Aufgabe lösen, welche Strategien wende ich an?
Zeit: < 2 Minuten zum Nachdenken, jeder für sich

Beispielaufgabe 1 – der Klassiker, eine Aufgabe für alle

Schritte zum Problemlösen nach Wittmann: Verstehen des Problems, Lösungsplan entwickeln, Plan ausführen, Rückschau



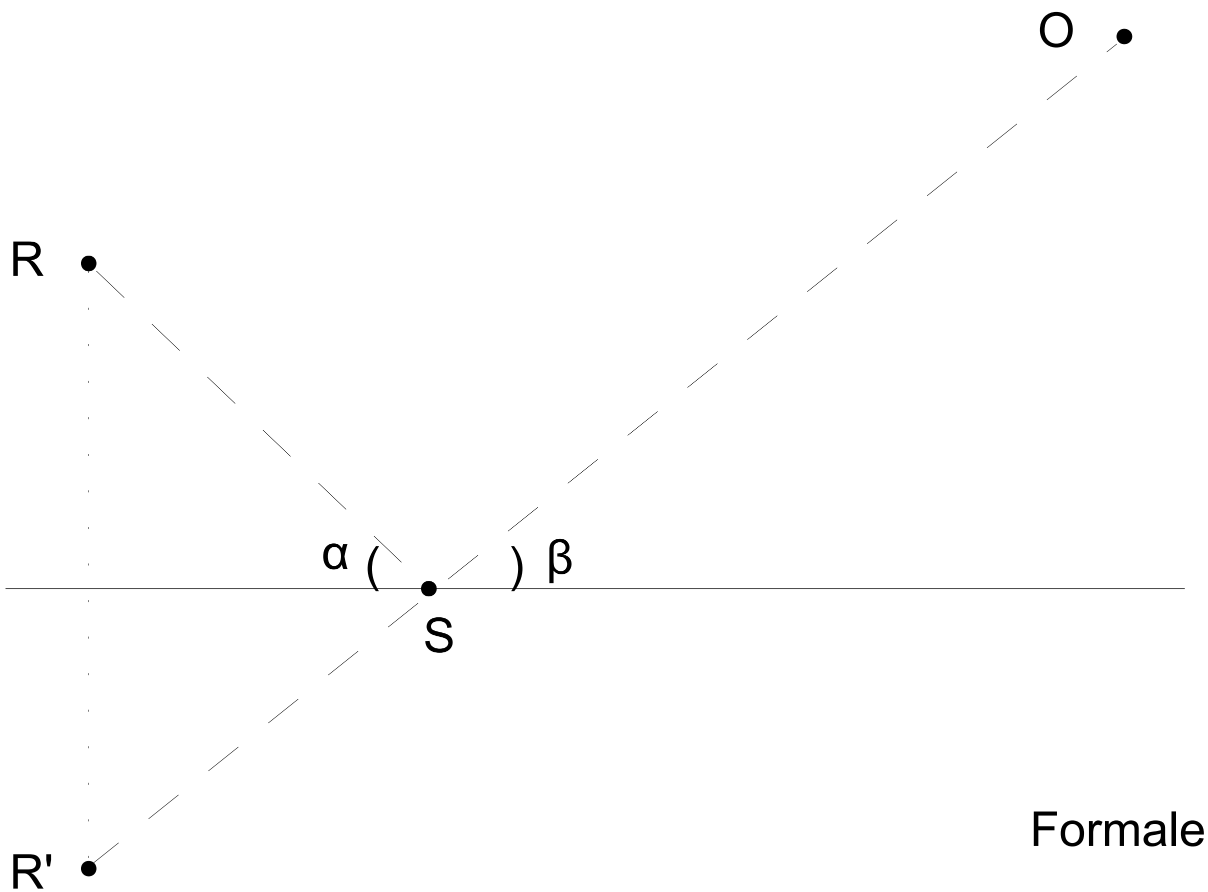
Heuristische Strategien:

Übertragung in ein Modell,
Hilfslinien einzeichnen,
Punkte benennen,
Gleichlange Objekte suchen

Reflexion am Spiegel,
Spiegekbild,
Reflexionsgesetz aus der Physik,
α = β Satz von Fermat
(Klasse 8 hatte/hat Optik)

Hilfsmittel: Spiegel, Schnur

Beispielaufgabe 1 – der Klassiker, eine Aufgabe für alle



Begründung

Rückschau

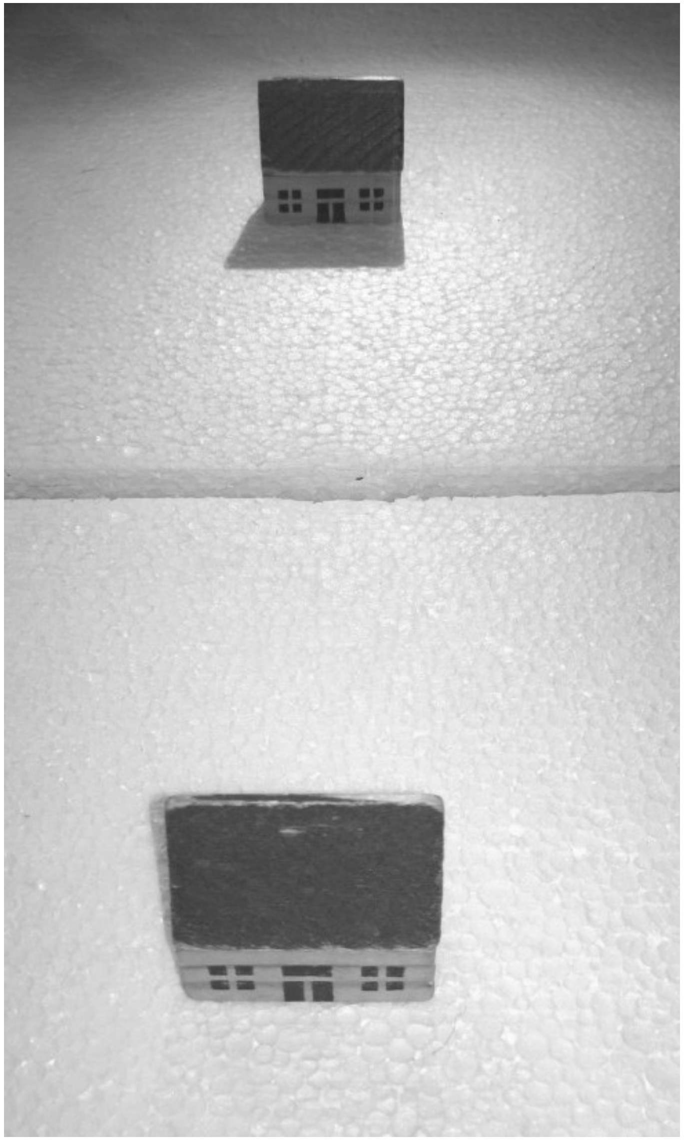
Formalen Beweis aufschreiben

Aufgaben für alle – Minigolf und Araber

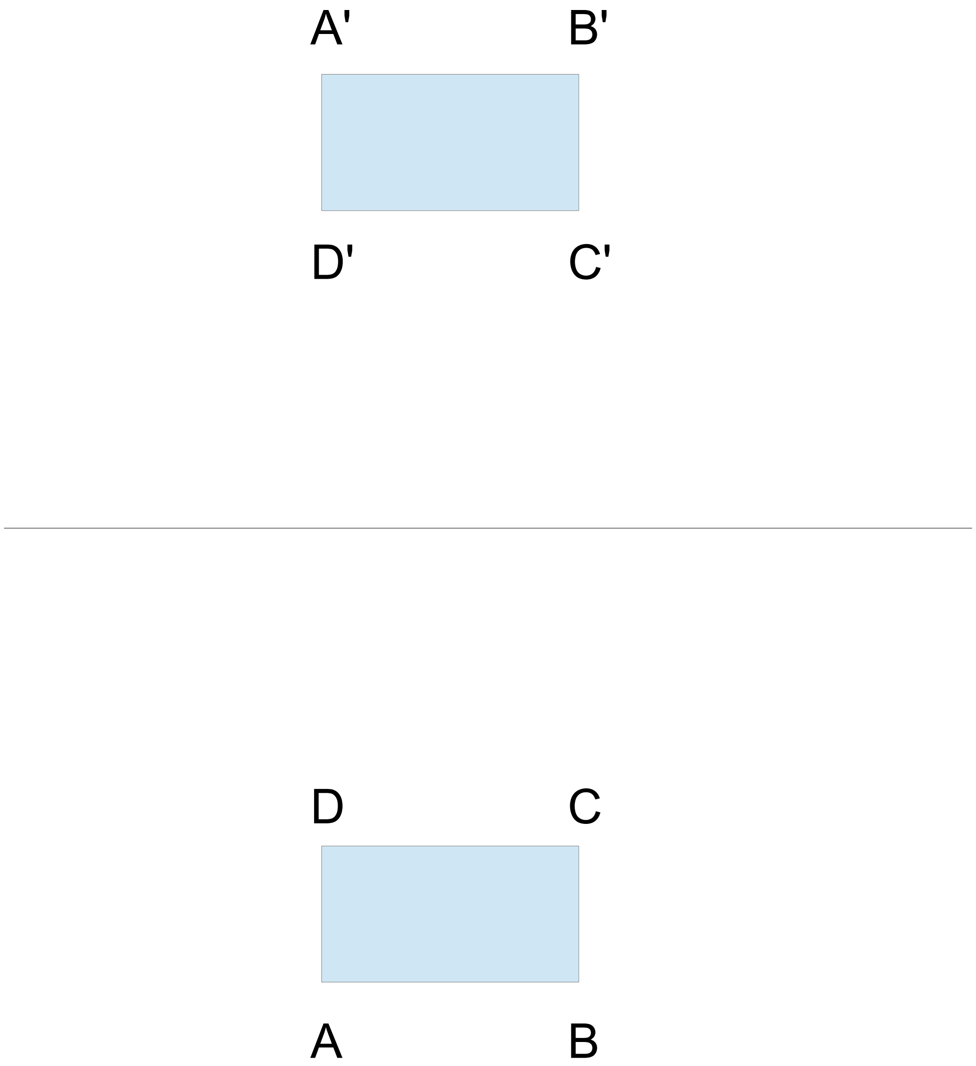
Arbeit in Gruppen mit 4 – 5 Studis
Bearbeitungszeit < 15 Minuten
mit Präsentation der Lösungen

Waren das Aufgaben aus der Erfahrungswelt?

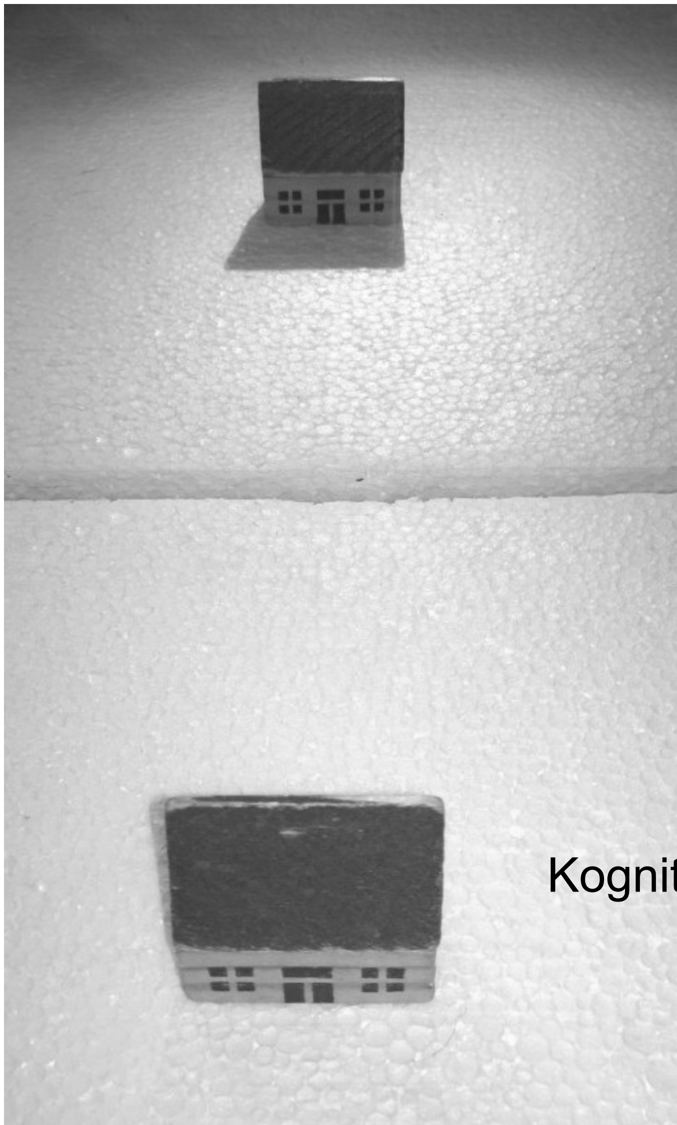
Klassiker vs. Realität
„Stimmt das mit der Spiegelung auch real?“



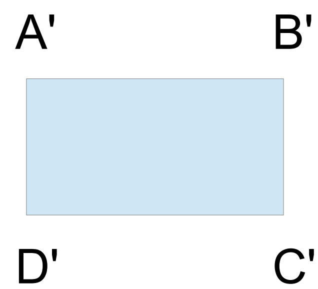
a) Haus im Spiegel



Klassiker vs. Realität
„Stimmt das mit der Spiegelung auch real?“

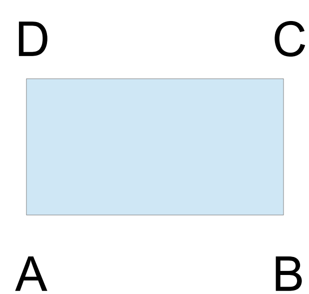


a) Haus im Spiegel

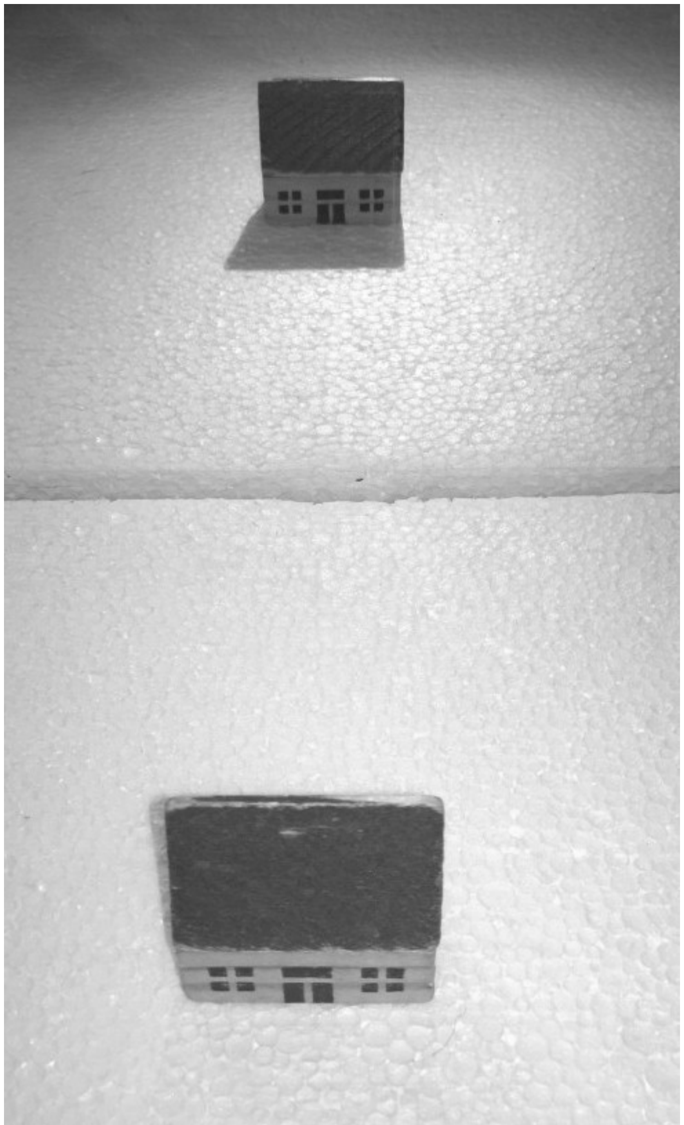


Devil oder *Deep Sea*

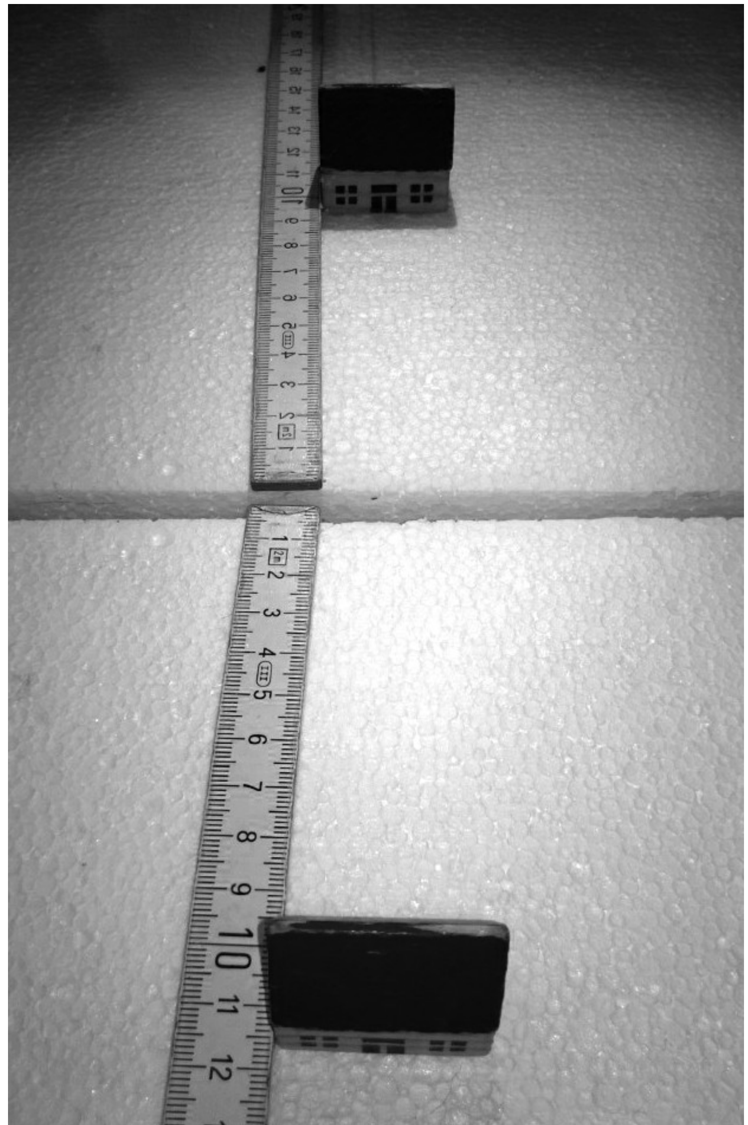
Kognitiver Widerspruch?



Klassiker vs. Realität
„Stimmt das mit der Spiegelung auch real?“

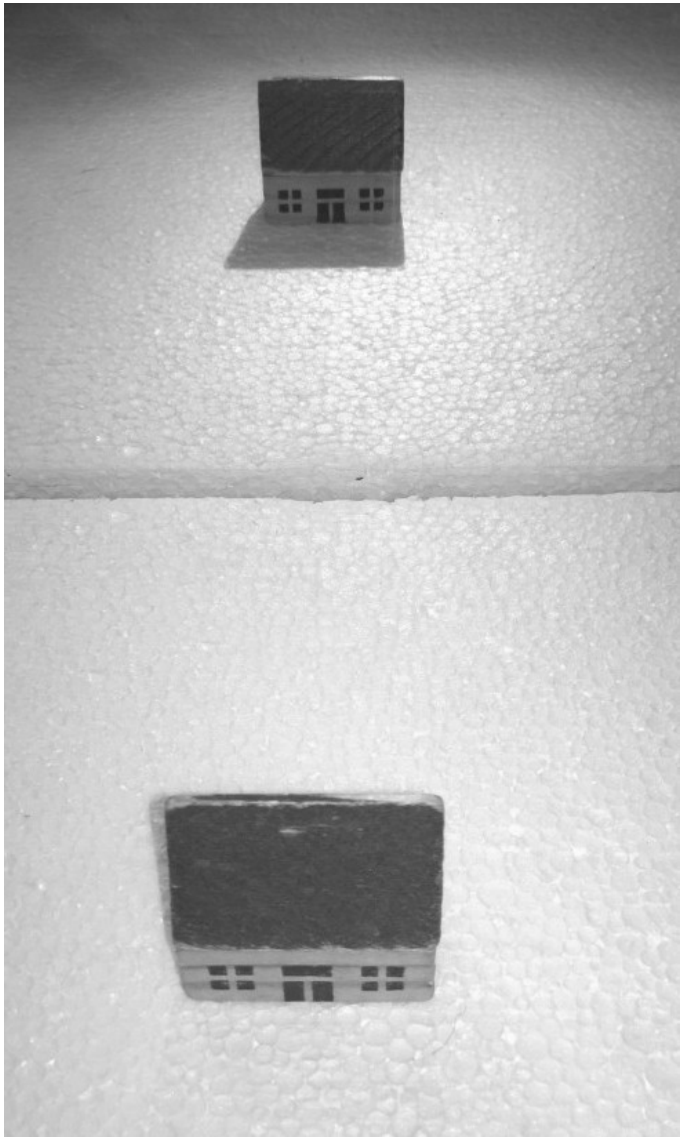


a) Haus im Spiegel

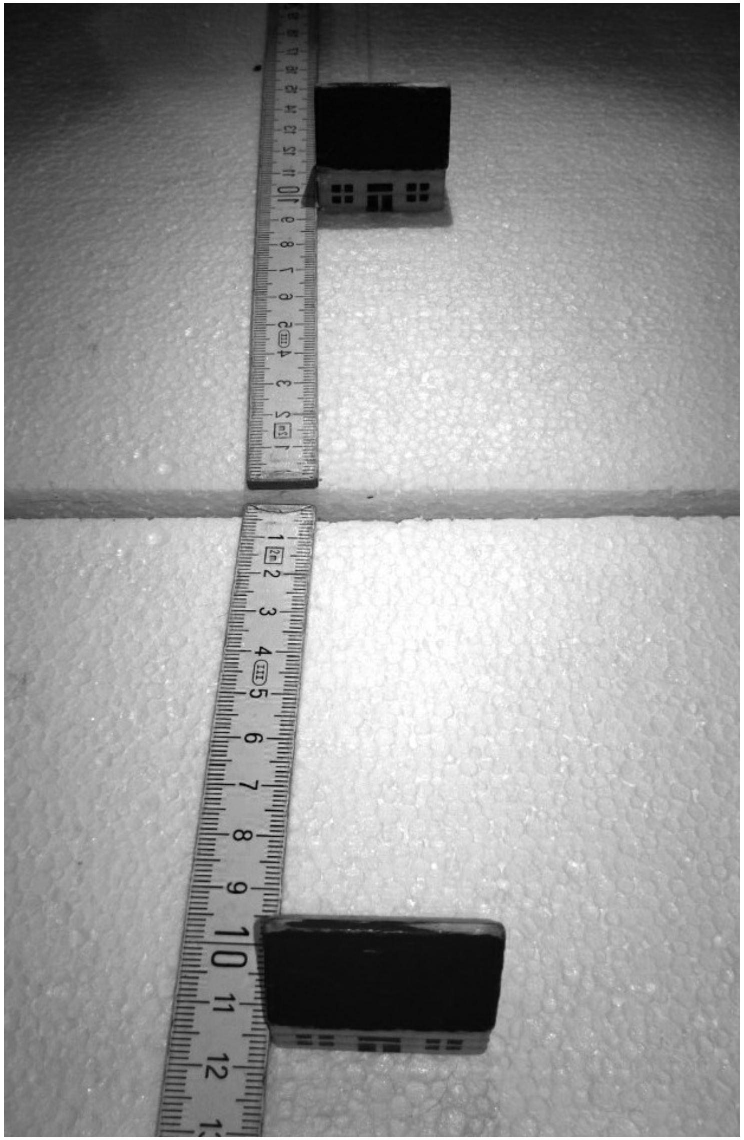


b) jeweils mit Abstand zum Spiegel

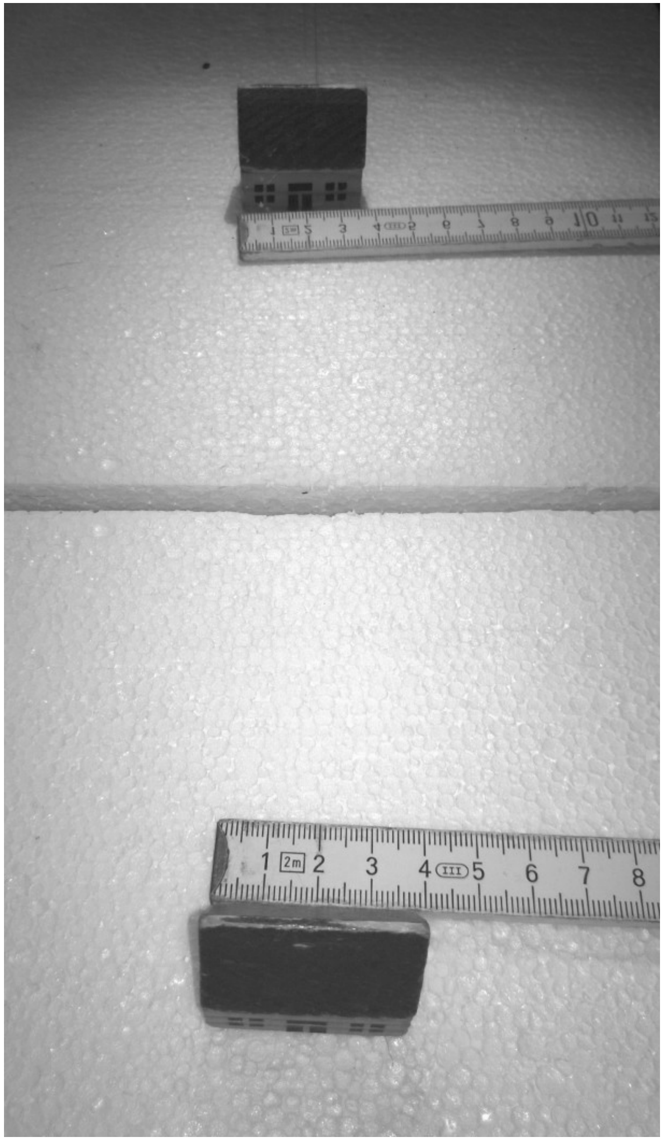
Klassiker vs. Realität
„Stimmt das mit der Spiegelung auch real?“



a) Haus im Spiegel

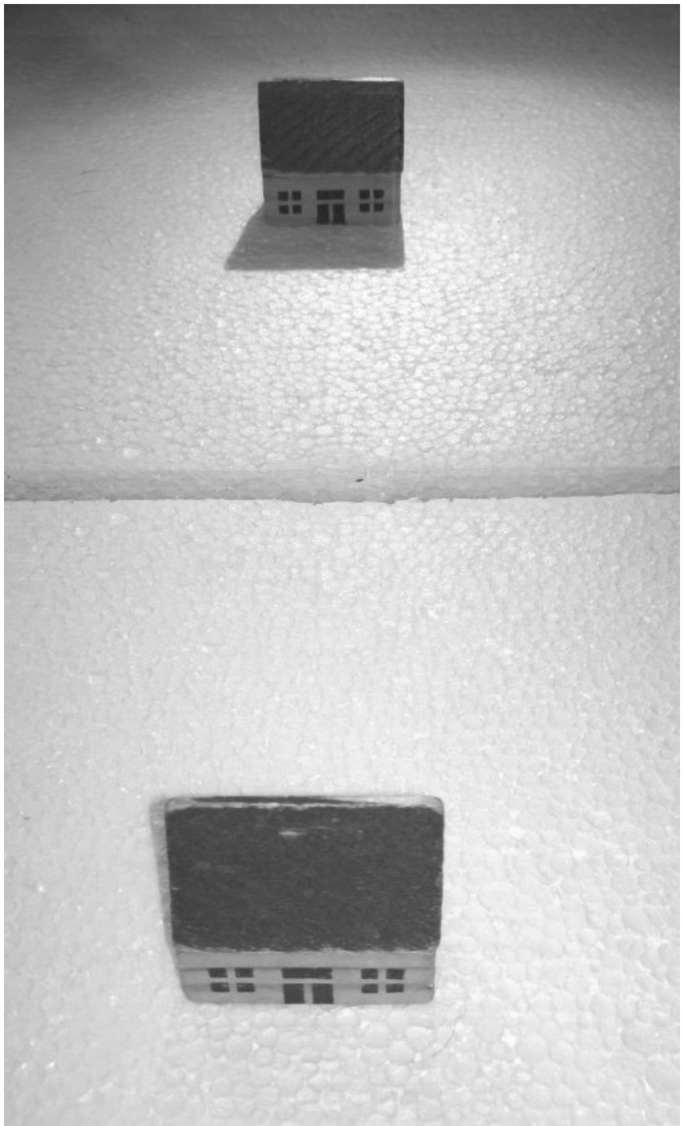


b) jeweils mit Abstand zum Spiegel



c) jeweils mit Hausbreite

Klassiker vs. Realität
„Stimmt das mit der Spiegelung auch real?“


a) mit Spiegel


b) ohne Spiegel

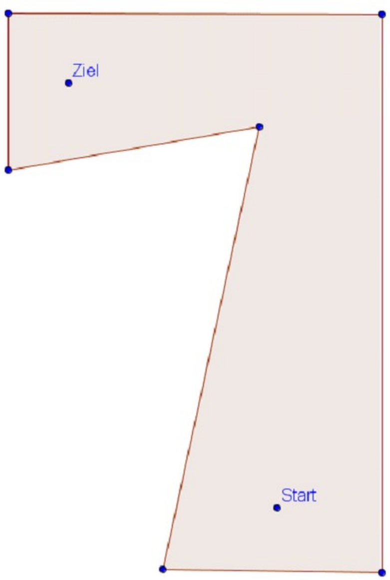
Die Diskussion ist ausdrücklich eröffnet!

Aufgabenblatt zur Übung – Minigolf und Araber

Man soll bei der Minigolfanlage den Ball vom Start-Punkt mit einemSchlag zumZiel-Punkt schlagen.

Zeige durch eine Zeichnung, dass eine Reflexion des Balls an 2 Banden dafür nicht ausreicht.

Zeige, dass eine Reflexion an 3 Banden den Ball vomStart zum Ziel befördert.



aus: http://gfs.khmeyberg.de/Klassenarbeiten-Klausuren/Mathematik/0607%20Klassenarbeit%205%20Klasse%206e.pdf