Deckabbildungen, Ornamente und Parkettierungen

Thomas Grell und Emilia Fuchs

27. November 2014

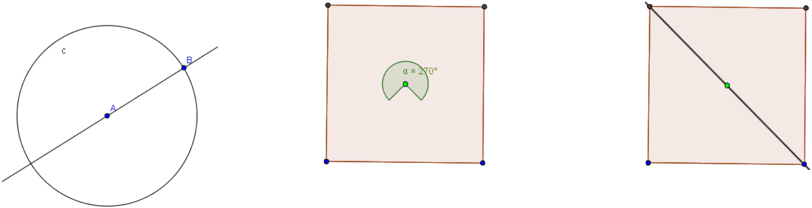
Inhaltsverzeichnis

Deckabbildungen

Definition

Sei h eine Kongruenzabbildung der Ebene E und $F \subseteq E$ eine Figur in der Ebene. Wenn $h(F)=F$ ist, d.h. wenn F invariant unter h ist, dann nennt man F h-symmetrisch, und h eine Deckabbildung (Symmetrieabbildung) von F.

Beispiele

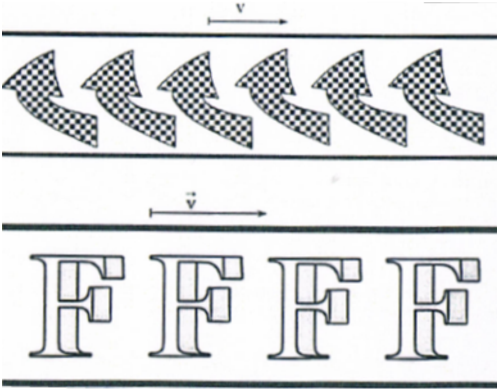


Ornamente

Man nennt eine geometrische Figur Bandornament mit der Grundfigur F, wenn sie aus der Grundfigur auf eine der folgenden Weisen erzeugt wird:

1. Gegeben sind unendlich viele zueinander parallele Geraden, mit gleichem Abstand. Das Bandornament besteht aus allen Bildern, die durch Hintereinanderausführung von Spieglungen von F an diesen Geraden erzeugt werden.
2. Gegeben ist ein Verschiebungsvektor v. Das Bandornament besteht aus allen Bildern, die durch Verschiebung um ein ganzzahliges Vielfaches von v erzeugt werden.
3. Gegeben ist eine Schubspiegelung. Das Bandornament besteht aus allen Figuren, die entstehen, wenn die Schubspiegelung bzw. ihr Inverses mehrfach hintereinander auf die Grundfigur angewendet werden.

Beispiele



Parkettierung

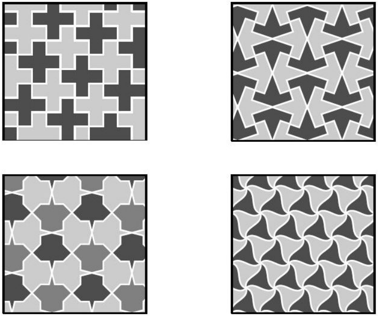
Definition

Unter einem Parkett verstehen wir Mengen von Polygonflächen, deren Vereinigung jeden Punkt der Ebene enthält, und deren paarweise Durchschnitte entweder leer sind oder nur aus Randpunkten beider beteiligter Polygone bestehen. Die Polygonflächen heißen Parkettsteine oder Fliesen. Ein Parkett heißt normal, wenn keine Fliesenecke innerer Seitenpunkt einer anderen Fliese ist.

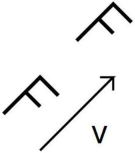
Überblick

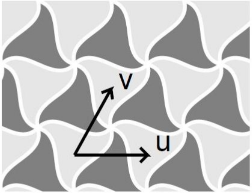
- lückenlose, überschneidungsfreie Überdeckung oder Pflasterung der Ebene mit kongruenten Figuren/„Kacheln“
- kein schematisiertes Lösungsverfahren
- Wissen über: Symmetrie und Kongruenzabbildungen
- Kreativität, enaktive und symbolische Darstellungsebene, Erkennen mathematischer Fragestellungen, mögliche Problemlösestrategien.

Beispiele



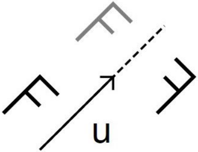
Translationssymmetrie

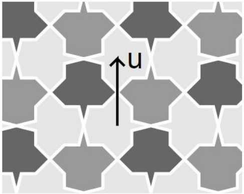




Translationssymmetrie

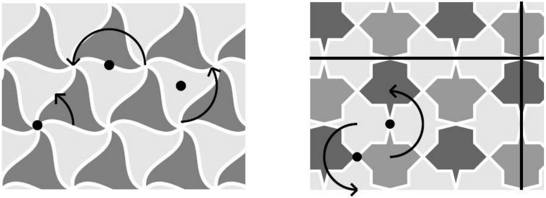
Gleitspiegelsymmetrie





Gleitspiegelsymmetrie

Dreh- und Spiegelsymmetrie



Dreh- und Spiegelsymmetrie

Gruppe

Definition

Eine Menge G mit einer inneren Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ *heißt eine Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- $\circ$ *ist assoziativ*
- *Es existiert ein neutrales Element* $e \in G$ *mit* $e \circ a = a \circ e = a$ *für alle* $a \in G$.
- *Zu jedem Element* $a \in G$ *gibt es ein inverses Element* $a^{-1} \in G$ *mit* $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Untergruppe

Definition

Es sei G eine Gruppe mit innerer Verknüpfung $\circ$. Eine Teilmenge $H \subset G$ heißt Untergruppe von G, wenn gilt:

- $a, b \in H \Rightarrow a \circ b \in H$
- $e \in H$
- $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Schränkt man die Verknüpfung $\circ$ auf H ein, so ist H selbst eine Gruppe.

Gruppe der Kongruenzabbildungen

Unendliche Gruppe

Sei K die Menge aller Kongruenzabbildungen, die die Ebene E auf sich selbst abbilden. Die Verknüpfung $\circ$ sei die Hintereinanderausführung von Abbildungen. Dann ist K mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe.

Warum ist das eigentlich so und welche anderen unendlichen Gruppen fallen euch noch ein?

Die Symmetriegruppe

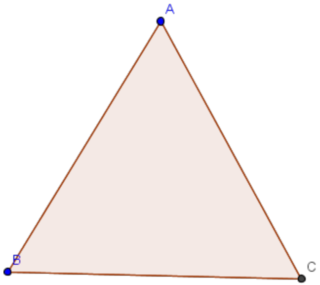
Definition

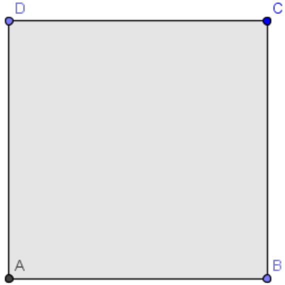
Die Menge aller Deckabbildungen einer Figur F in der Ebene E mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung heißt Symmetriegruppe der Figur F.

Wie kann man die Beziehung der Symmetriegruppe und der Gruppe der Kongruenzabbildungen Gruppentheoretisch beschreiben?

Was verbindet den Begriff Symmetriegruppe mit dem der symmetrischen Gruppe?

- Um sich die Deckabbildungen einer Figur besser vorstellen zu können werden häufig die Eckpunkte permutiert.
- Die symmetrische Gruppe ist die Menge aller Permutationen der Zahlen $\{1, \cdots, n\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung.
- Die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe über der Menge $\{1, \cdots, n\}$.


A
B
C


D
C
A
B

Anmerkungen zu Symmetrie

Definition

Eine ebene geometrische Figur ist symmetrisch, wenn es mindestens eine nichttriviale Deckabbildung gibt.

Mit Bezug auf die Deckabbildungen spricht man von Achsensymmetrie, Dreh- oder Rotationssymmetrie, Translationssymmetrie.

Anmerkungen:

1. Symmetrie im Raum kann analog definiert werden. Dies wird jedoch in der Grundschule nicht angesprochen.
2. Symmetrie bezeichnet mathematisch also nicht nur das Phänomen, dass eine Figur symmetrisch ist, sondern auch die Abbildung, die dem Phänomen zugrunde liegt.

Umgang mit Gruppen im Unterricht 60er/70er Jahre:

Zum Beispiel die Durchführen von Deckabbildungen an materialisierten geometrischen Objekten oder Ausfüllen von Verknüpfungstafeln.

Nutzen:
Aufschluss über Eigenschaften (Symmetrien) des untersuchten Objekts und Beziehungen zu benachbarten Gebilden: Zum Beispiel Gliederung der Vierecke.

Inhalte des Rahmenlehrplan

Schülerinnen und Schüler

- beschreiben Achsen-, Dreh- und Punktsymmetrie an Figuren und überprüfen sie auch durch Falten und Drehen.
- stellen symmetrische Figuren her (auch durch Ausschneiden, Falten, Drehen, und Abzählen von Gitterpunkten)
- konstruieren Abbilder einfacher Figuren durch Achsenspiegelung, Punktspiegelung und Drehung
- führen mit Figuren Parallelverschiebungen durch (auch durch Herstellung von Schablonen)
- **vervollständigen Parkettierungen und entwerfen Parkettierungen**

Kompetenzerwerb

Hinweise zum Erwerb der Kompetenzen im Unterricht:

- Der handlungsorientierte Umgang mit geometrischen Formen steht in diesem Modul im Vordergrund.
- Schülerinnen und Schüler arbeiten selbstständig und gestalten größere Ausarbeitungen z. B. Parkettierungen auch in Gruppen.
- Zur Anwendung der Kongruenzabbildungen eignen sich auch Spiele und Wettbewerbe.

Sachbezüge:
Ebene symmetrische Figuren in der Lebenswelt, z. B. Ziffern, Buchstaben in Druckschrift, Muster, Parkettierungen z. B. von Maurits Cornelis Escher (1898-1972)

Diskussion

- Gruppentheorie im Mathematik Unterricht?
- Welchen Nutzen oder Vorteil hat die Behandlung der Symmetriegruppe neben der Gruppe der Kongruenzabbildungen für den Mathematik Unterricht?

Aufgaben

Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks

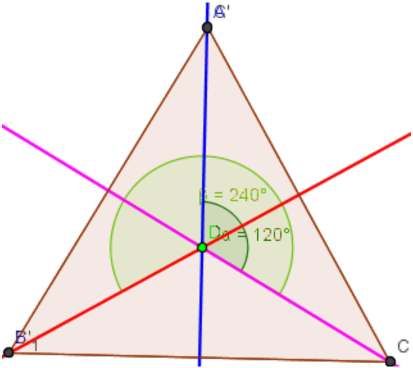


Abbildung: Bild1

Alle Deckabbildungen:

D_{120}

D_{240}

D_0

S_{g_A}

S_{g_B}

S_{g_C}

Symmetriegruppe des gleichschenkligen Dreiecks

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_{g_A}	S_{g_B}	S_{g_C}
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}	S_{g_A}	S_{g_B}	S_{g_C}
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0	S_{g_B}	S_{g_C}	S_{g_A}
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}	S_{g_C}	S_{g_A}	S_{g_B}
S_{g_A}	S_{g_A}	S_{g_C}	S_{g_B}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_{g_B}	S_{g_B}	S_{g_A}	S_{g_C}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_{g_C}	S_{g_C}	S_{g_B}	S_{g_A}	D_{240}	D_{120}	D_0

Literaturverzeichnis

[1] Siegfried Bosch.
Lineare Algebra.
Springer Verlag, 2008.

[2] R. Deissler.
Einführung in die Geometrie.
Technical report, PH-Freiburg, 2005.

[3] Hans-Joachim Gorski & Susanne Müller.
Leitfaden Geometrie.
GWV Fachverlag GmbH, 2005.

[4] Christian Nelius.
Vorlesungsskript Grundzüge der Algebra WS 05 06.
Technical report, Universität Paderborn, 2005.

[5] Hans Schupp.
Figuren und Abbildungen.
Franzbecker, 1998.

[6] Martin Stein.
Einführung in die Mathematik II.
Spektrum Akademischer Verlag, 1997.

[7] Alex V. Kontorovich und Jefrey C. Lagarias.
Stochastic Models for the 3x + 1 and 5x + 1 Problems.
Technical report, Brown University, University of Michigan, 2009.