

Verschiebung/Streckung von Funktionsgraphen

Verwenden von Schablonen zum Zeichnen von Funktionsgraphen

Idee der Koordinatentransformation

Rahmenlehrplan Berlin

P4 9/10: Situationen mit quadratischen Funktionen und Potenzfunktionen beschreiben

- zeichnen Graphen quadratischer Funktionen, beschreiben den Verlauf und deren Lage im Koordinatensystem
- beschreiben die geometrische Bedeutung der Parameter (Verschiebung, Streckung/Stauchung) in der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion

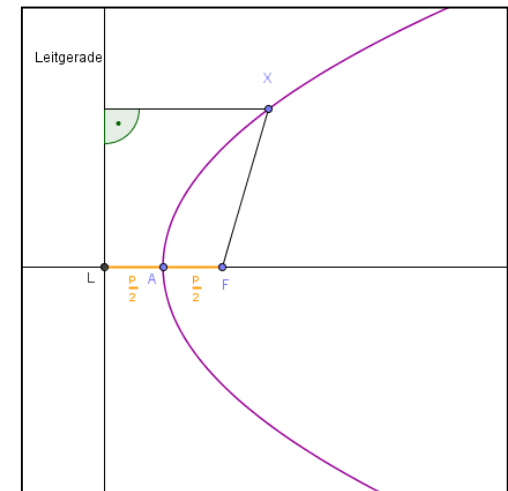
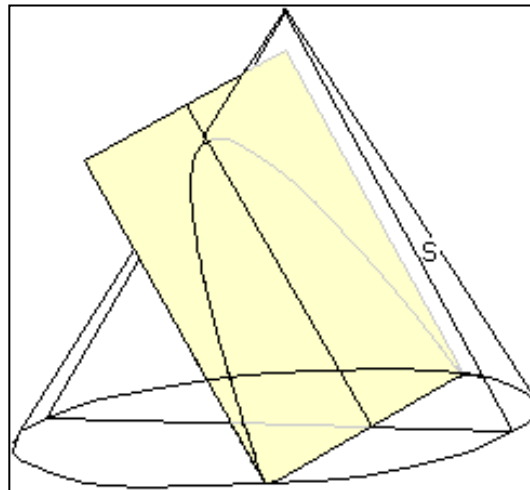
Rahmenlehrplan Berlin

P5 9/10: Mit Winkeln und Längen rechnen

- zeichnen Graphen der allgemeinen Sinusfunktion $f(x) = a \sin[b(x - c)] + d$ auf Grundlage einer geometrischen Interpretation der Parameter a , b , c und d
- beschreiben die geometrische Wirkung der Parameter a , b , c und d der allgemeinen Sinusfunktion auf den Graphen der Funktion

Definition – Parabel

Eine *Parabel* ist die Menge aller Punkte X (der Ebene), von denen jeder von einer gegebenen Geraden, der sogenannten *Leitgeraden* l , und von einem festen Punkt, dem *Brennpunkt* F , jeweils den gleichen Abstand hat. Eine *Parabel* ist ein *Kegelschnitt*.



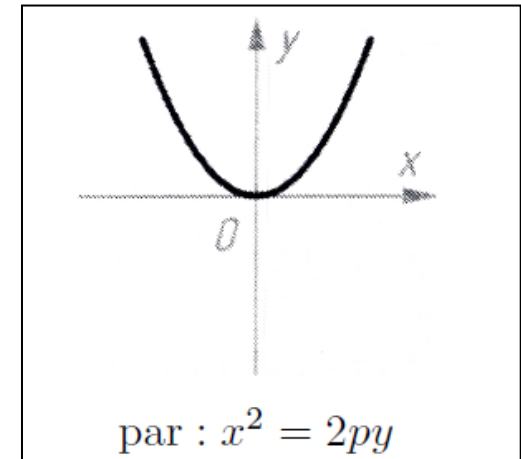
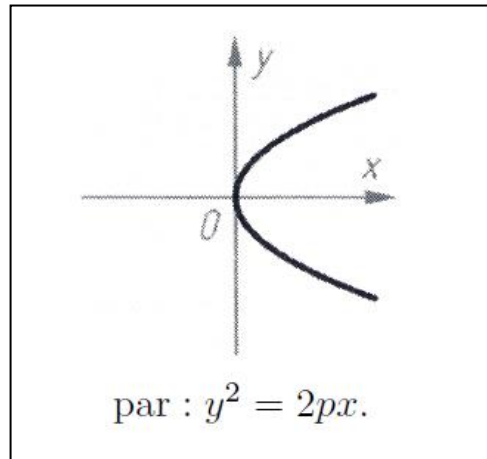
Bilder: Mathematische Basteleien – Parabeln.

Die allgemeine Gleichung einer Parabel in erster Hauptachsenlage ergibt sich durch die Definition: $y^2 = 2px$. Durch eine geeignete **Koordinatentransformation** (Drehung um $90^\circ \triangleq$ Tausch der Achsen, da $x_{\text{neu}} = -y$ und $y_{\text{neu}} = x$) ergibt sich $x^2 = 2py$. In der Schule verwenden wir $y = ax^2$.

$$\begin{aligned}x_{\text{neu}} &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y_{\text{neu}} &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}x &= x_{\text{neu}} \cos \alpha - y_{\text{neu}} \sin \alpha \\y &= x_{\text{neu}} \sin \alpha + y_{\text{neu}} \cos \alpha\end{aligned}$$



Bilder: Erlacher: Kegelschnitte.

Obwohl die Parabel ein Sonderfall unter den Kegelschnitten ist, spielt sie doch im täglichen Leben eine große Rolle:

- Parabol-Antennen und Parabol-Spiegel (parallel einfallende Strahlen sammeln sich im Brennpunkt)
- Wurfparabeln und Parabelflüge

Für die Schule hat sie den großen Vorteil (im Gegensatz zu Kreis, Ellipse und Hyperbel) mit Hilfe von Polynomen 2. Grades beschrieben werden zu können.

Normalparabel – Schablone

Mit einer Parabelschablone kann der Graph der Normalparabel $f(x) = x^2$ ohne Wertetabelle gezeichnet werden.

Verwenden der Schablone:

1. Koordinatensystem zeichnen
2. Scheitelpunkt markieren
3. Schablone anlegen
4. Parabel zeichnen

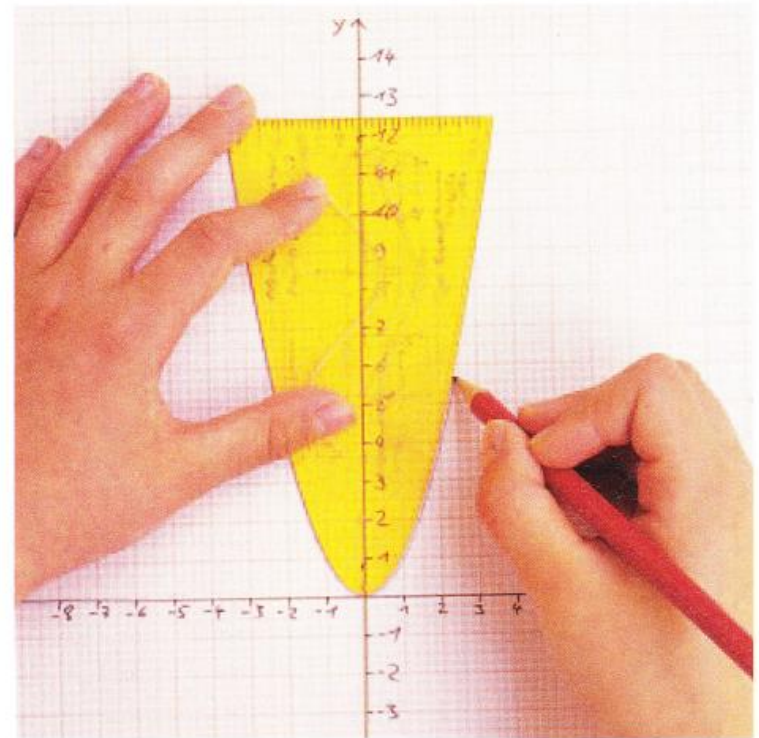


Bild: Zahlen und Größen – Klasse 9.

Verschieben von quadratischen Funktionen:

$$S(0/e): \quad f(x) = x^2 + e$$

$$S(-d/0): \quad f(x) = (x + d)^2$$

$$S(-d/e): \quad f(x) = (x + d)^2 + e$$

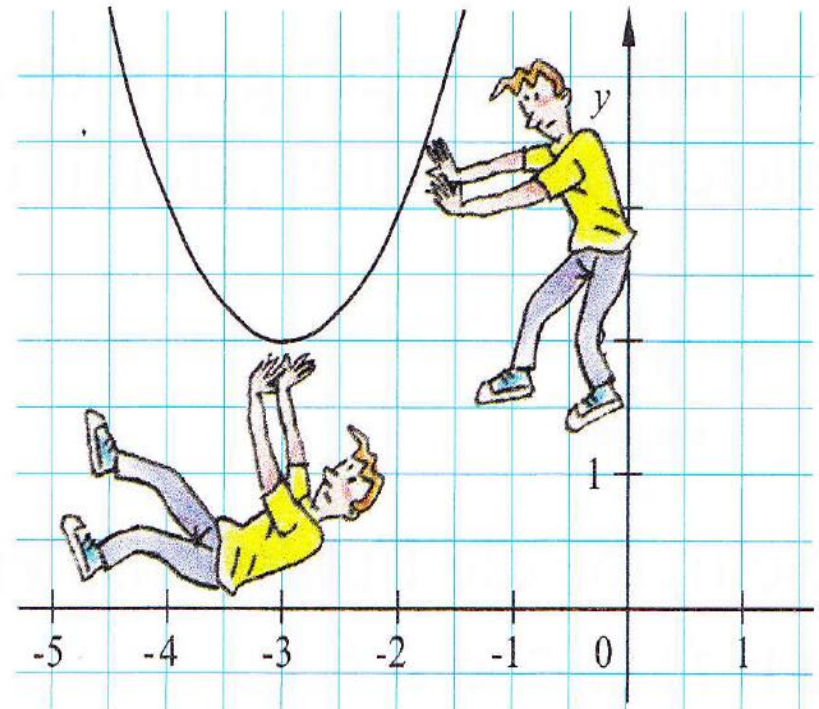


Bild: Mathematik plus – Klasse 9.

Streckung/Stauchung von quadratischen Funktionen:

$$f(x) = ax^2$$

$a = 1$ Normalparabel

$a = -1$

$a > 1$ gestreckte Parabel

$a < -1$

$0 < a < 1$ gestauchte Parabel

$-1 < a < 0$

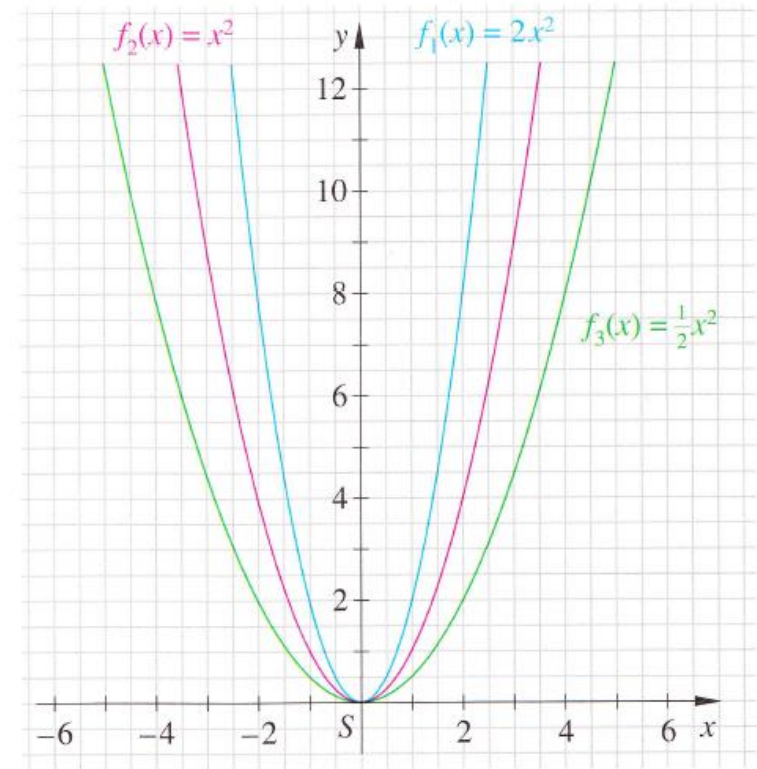
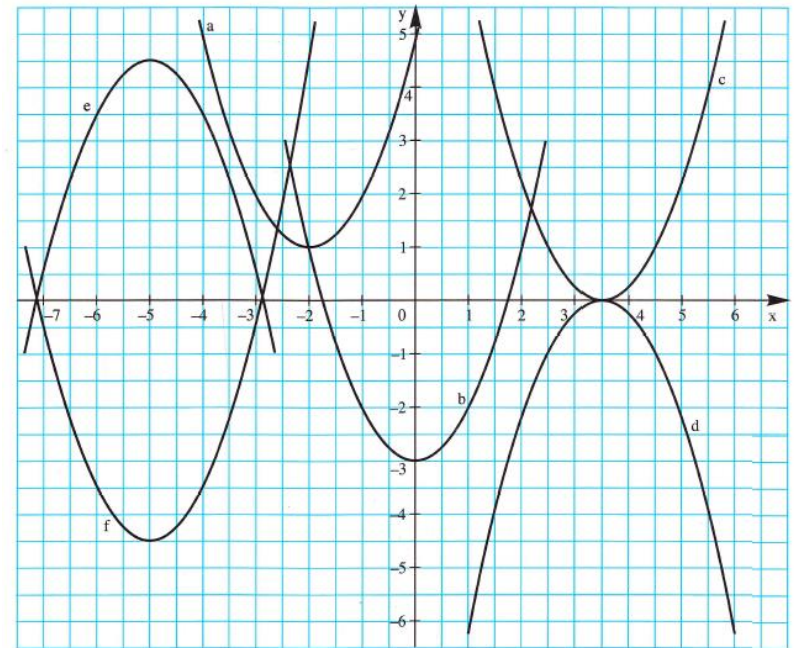


Bild: Zahlen und Größen – Klasse 9.

1.) Ermittle zu den Funktionsgraphen a bis f jeweils eine zugehörige Funktionsgleichung.

Hinweis:

Die abgebildeten Graphen sind Normalparabeln.



Quelle: Mathematik – entdecken · verstehen · anwenden, Klasse 9.

Lösungen:

$$a: \quad f(x) = (x + 2)^2 + 1$$

$$b: \quad f(x) = x^2 - 3$$

$$c: \quad f(x) = (x - 3,5)^2$$

$$d: \quad f(x) = -(x - 3,5)^2$$

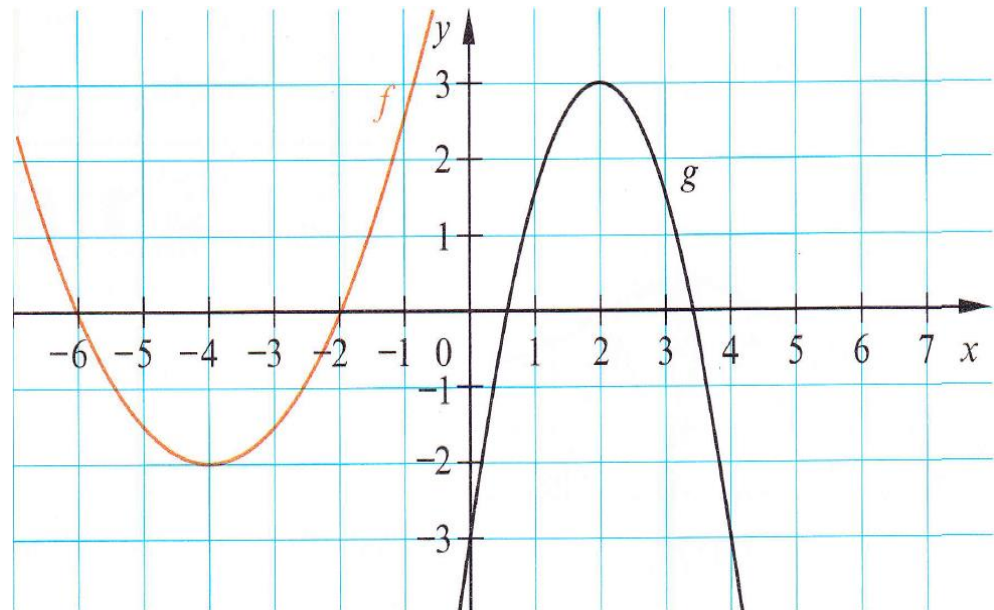
$$e: \quad f(x) = -(x + 5)^2 + 4,5$$

$$f: \quad f(x) = (x + 5)^2 - 4,5$$

2.) Ermittle zu den Funktionsgraphen f und g jeweils eine zugehörige Funktionsgleichung.

Hinweis:

Die abgebildeten Graphen sind keine Normalparabeln.



Quelle: Mathematik plus – Klasse 9.

Lösungen:

$$f : \quad f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2$$

$$g : \quad f(x) = -\frac{3}{2}(x - 2)^2 + 3$$

3.) Beschreibe den Funktionsgraphen und dessen Lage im Koordinatensystem anhand seiner Parameter.

$$f(x) = -0,2(x - 2,5)^2 + 2,75$$

Quelle: Zahlen und Größen – Klasse 9.

Lösung:

um 2,5 Einheiten in Richtung x-Achse verschoben

gestaucht

$$f(x) = -0,2 (x - 2,5)^2 + 2,75$$

nach unten geöffnet

um 2,75 Einheiten in Richtung y-Achse verschoben

4.) Welche Verschiebungen (Streckungen/Stauchungen) führen den Graphen von f in den Graphen von g über?

$$f(x) = x^2 + 2x + 7$$

$$g(x) = 2x^2 - 4x + 17$$

Quelle: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Lösung:

$$\rightarrow f(x) = (x + 1)^2 + 6 \text{ und } g(x) = 2(x - 1)^2 + 15$$

$$\rightarrow S_f(-1|6) \text{ und } S_g(1|15)$$

→ Streckung um Faktor 2

→ 9 Einheiten in Richtung der y-Achse

→ 2 Einheiten in Richtung der x-Achse

Sinusfunktion – Schablone

In einer Parabelschablone ist im Allgemeinen auch eine Schablone zum Zeichnen einer Sinus- und Kosinus-Funktion enthalten. Damit kann der Graph dieser Funktionen auch ohne Wertetabelle gezeichnet werden.

Nachteil:

Die Funktionsgraphen in der Schablone sind sehr klein, da sie aus dem Einheitskreis ($r = 1\text{cm}$) entstehen. Deshalb finden sie im Vergleich zur Parabelschablone im Schulalltag eher selten Gebrauch.

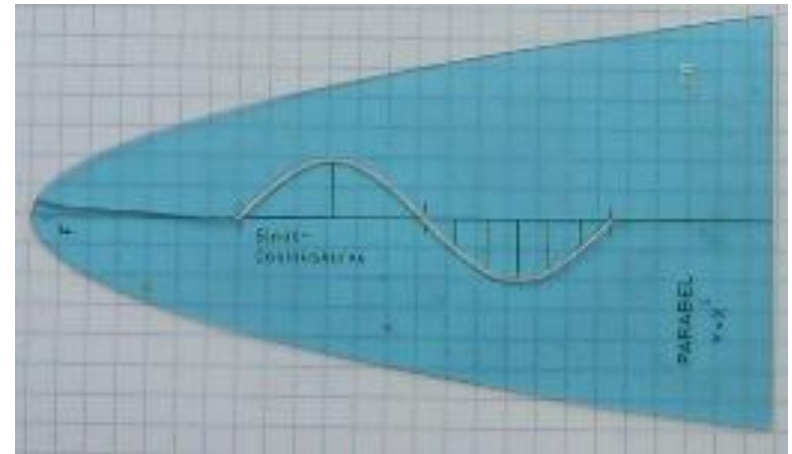


Bild: Mathematische Basteleien – Parabeln.

Sinusfunktion $f(x) = A \sin[B(x - C)] + D$

A: Amplitude

B: Periode $\frac{2\pi}{B}$

C: Verschiebung in x-Richtung

D: Verschiebung in y-Richtung

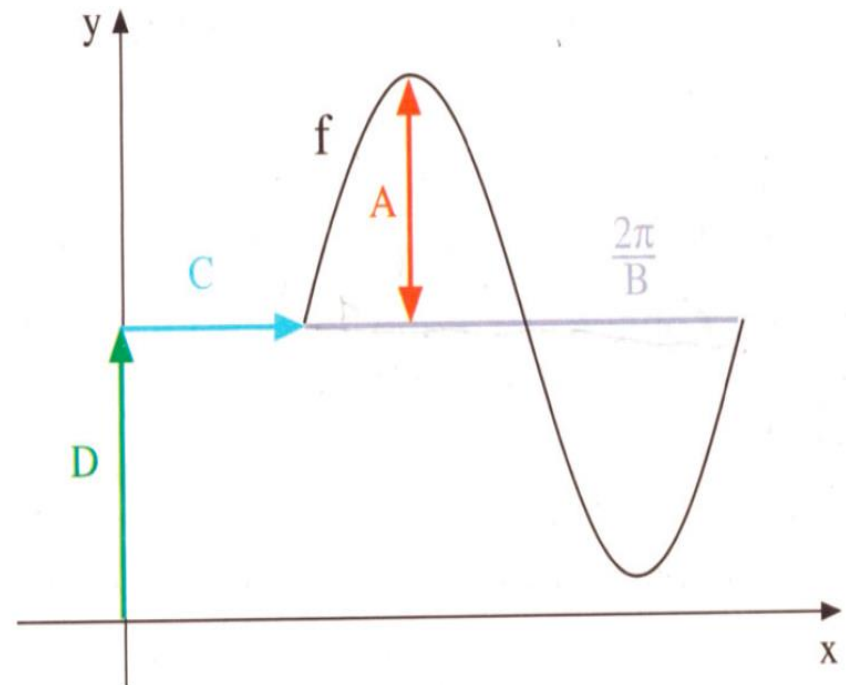


Bild: Mathematik 11 – Einführungsphase.

5.) Ordne den Graphen A bis I die zugehörige Funktionsgleichung zu.

1: $f(x) = -4 \cos(x - \pi)$

2: $f(x) = 4 \cos(x - 0,5\pi)$

3: $f(x) = 2 \cos(0,5x)$

4: $f(x) = 3 \cos(x + 2\pi) + 1$

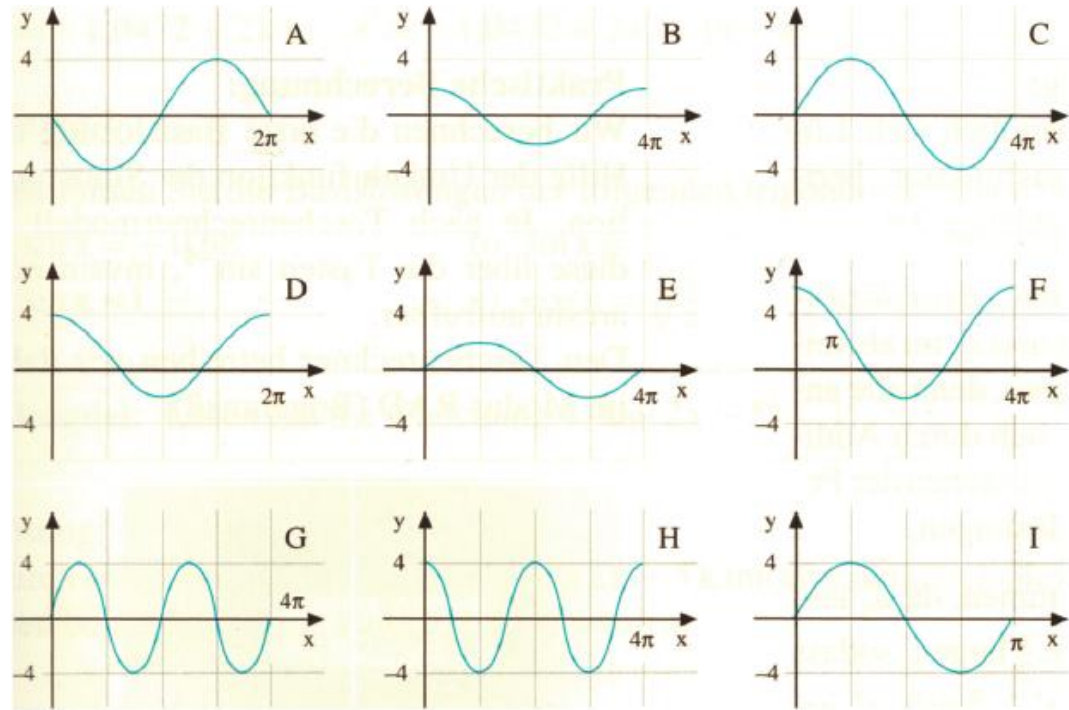
5: $f(x) = 4 \sin(x + \pi)$

6: $f(x) = 4 \sin(0,5x)$

7: $f(x) = 2 \sin(0,5x)$

8: $f(x) = 4 \sin(2x)$

9: $f(x) = 4 \cos(0,5x) + 2$



Quelle: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Rahmenlehrplan

quadratische
Funktionen

Sinusfunktion

Exkurs

Quellen

Lösungen:

$$A \rightarrow 5$$

$$B \rightarrow 3$$

$$C \rightarrow 6$$

$$D \rightarrow 4$$

$$E \rightarrow 7$$

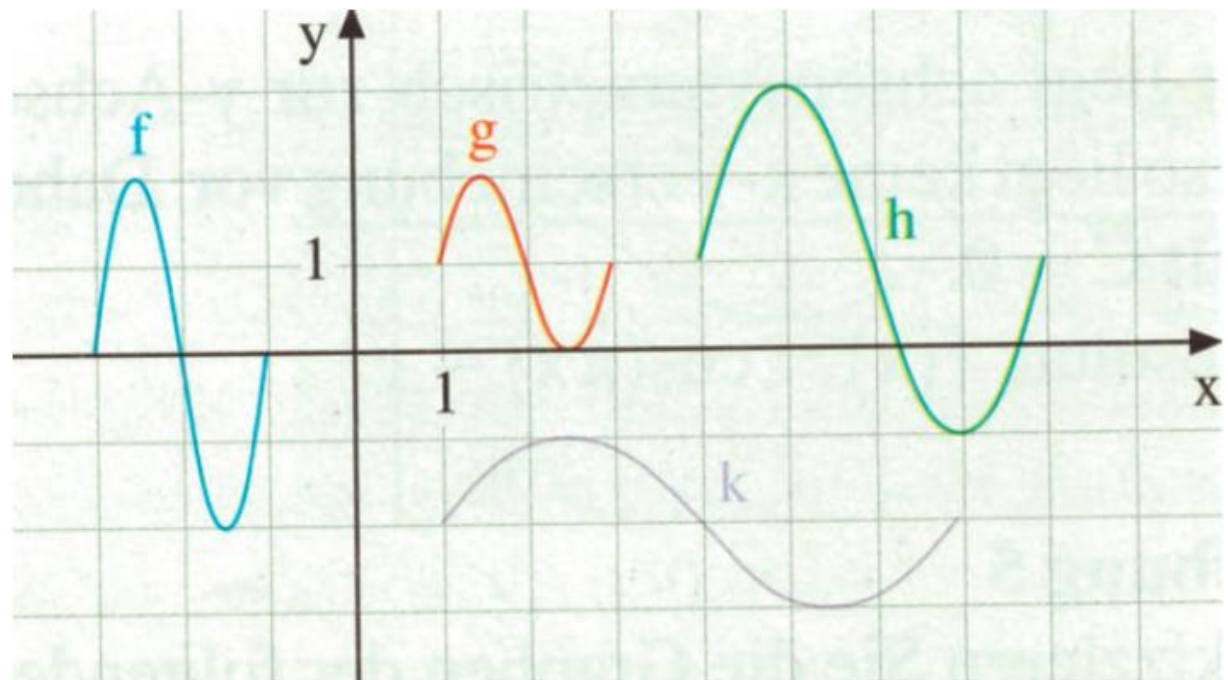
$$F \rightarrow 9$$

$$G \rightarrow 2$$

$$H \rightarrow 1$$

$$I \rightarrow 8$$

6.) Ermittle zu den Funktionsgraphen f, g, h und k jeweils eine zugehörige Funktionsgleichung.



Quelle: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Lösungen:

$$f(x) = 2 \sin [\pi (x+3)]$$

$$g(x) = \sin [\pi (x-1)] + 1$$

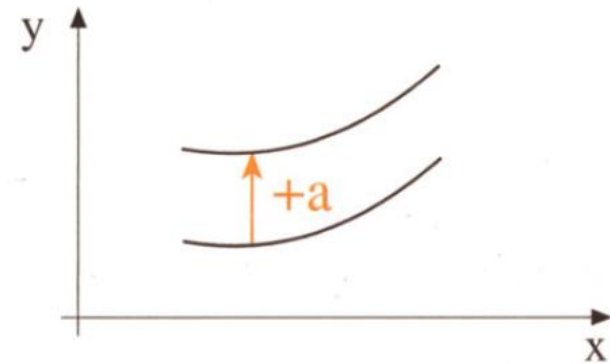
$$h(x) = 2 \sin [0,5\pi (x-4)] + 1$$

$$k(x) = \sin [1/3 \pi (x-1)] - 2$$

Verschiebung beliebiger reeller Funktionen:

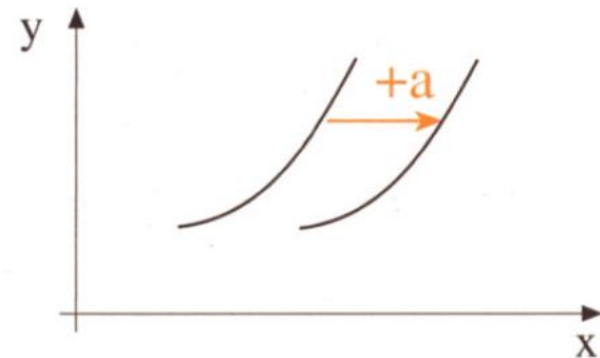
$$g(x) = f(x) + a$$

Verschiebung um $a \in \mathbb{R}$ in Richtung der y-Achse



$$g(x) = f(x - a)$$

Verschiebung um $a \in \mathbb{R}$ in Richtung der x-Achse



Bilder: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Streckung beliebiger reeller Funktionen:

$$g(x) = a \cdot f(x)$$

Streckung mit dem Faktor $a \in \mathbb{R}$ in
vertikaler Richtung
($a < 0$: Spiegelung an der x-Achse)

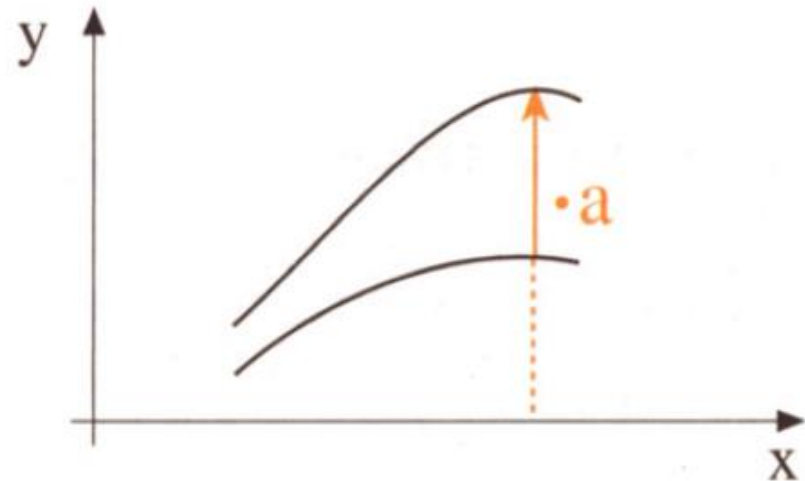


Bild: Mathematik 11 – Einführungsphase.

7.) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D = \mathbb{R}_+$.

Bestimme die Funktionsgleichung g zu dem um -2 in Richtung der x -Achse und um 3 in Richtung der y -Achse verschobenen Graphen.

Bestimme Definitions- und Wertebereich von g .

Quelle: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Lösung:

$$\rightarrow g(x) = \sqrt{x+2} + 3$$

$$\rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$$

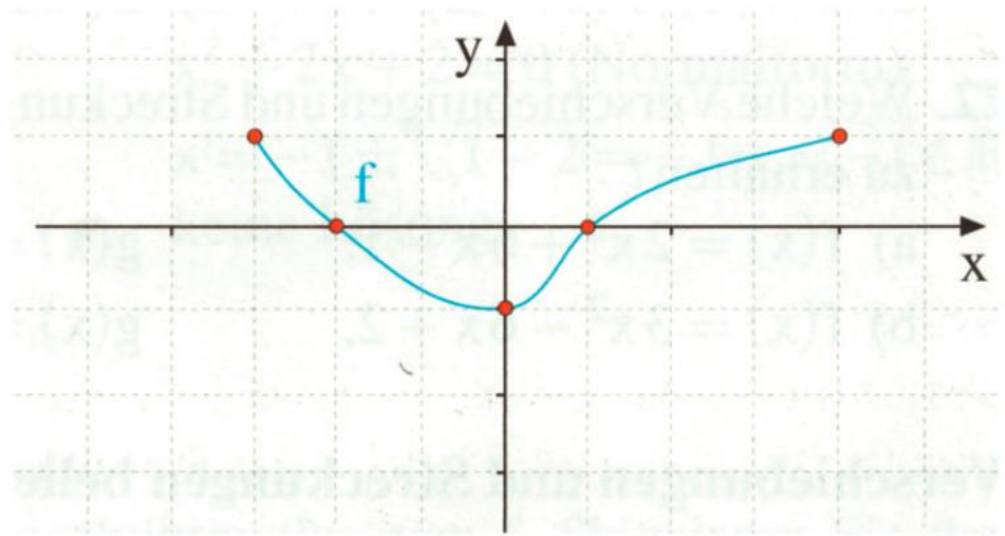
$$\rightarrow W = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 3\}$$

8.) Skizziere den Graphen der Funktionen g, h und k anhand des abgebildeten Graphen der Funktion f.

a.) $g(x) = f(x) - 3$

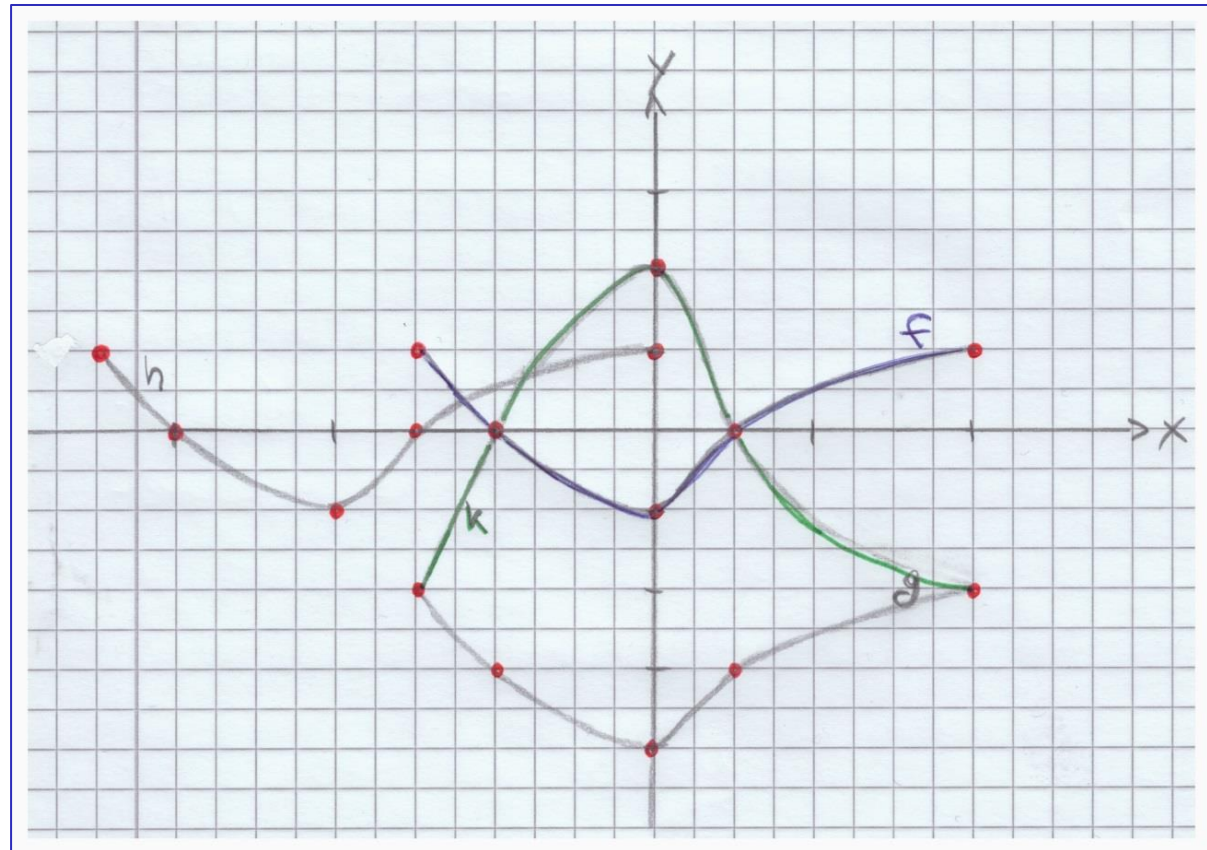
b.) $h(x) = f(x + 2)$

c.) $k(x) = -2 \cdot f(x)$



Quelle: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Lösung:



Ausblick auf Kurvendiskussionen:

9.) Gegeben sei die ganzrationale Funktion

$$f(x) = x^4 - 3,25x^2 + 2,25.$$

Welche Verschiebung längs der Achsen muss durchgeführt werden, sodass die verschobene Funktion g genau drei Nullstellen besitzt?

Quelle: Mathematik 11 – Einführungsphase.

Lösung:

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete, achsensymmetrische Funktion vierten Grades.

- Funktion besitzt einen Hochpunkt und zwei Tiefpunkte
- Funktion muss also um den y-Wert ihres Hochpunktes auf die x-Achse verschoben werden
- Hochpunkt liegt bei $H(0|2,25)$
- Verschiebung um $-2,25$ dringt die gewünschte Lage mit drei Nullstellen und der Funktionsgleichung $g(x) = x^4 - 3,25x^2$

Quellen

- Erlacher, Evelina: Kegelschnitte.
http://www.mat.univie.ac.at/~evelina/workshops07_kegelschnitte.pdf
(abgerufen am 02.01.2015)
- Mathematik plus – Klasse 9, Gymnasium Brandenburg, Cornelsen Verlag: Berlin 2008.
- Mathematik – entdecken · verstehen · anwenden, Klasse 9, Oldenbourg Verlag: München 1995.
- Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport: Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Berlin, 2006.
https://www.berlin.de/imperia/md/content/senbildung/schulorganisation/lehrplaene/sek1_mathematik.pdf?start&ts=1420454545&file=sek1_mathematik.pdf
(abgerufen am 15.12.2014)
- Mathematische Basteleien: Parabeln.
<http://www.mathematische-basteleien.de/parabel.htm>
(abgerufen am 02.01.2015)
- Zahlen und Größen – Klasse 9, Erweiterte Ausgabe Brandenburg, Cornelsen Verlag: Berlin 2003.
- Mathematik 11 – Einführungsphase Berlin, Cornelsen Verlag: Berlin 2004.

**Danke für eure
Aufmerksamkeit!**