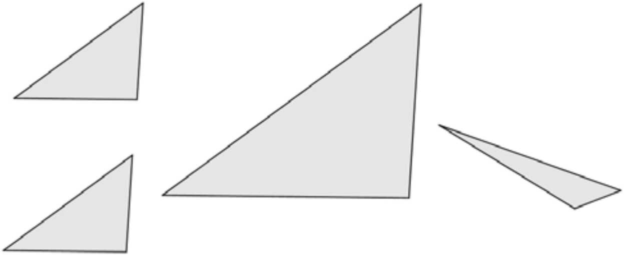
Weitere geometrische Abbildungen

Anna Wegener, Matthias Wegen, Daniel Kretschmer

15.01.2015

Affinitätsabbildungen - Motivation



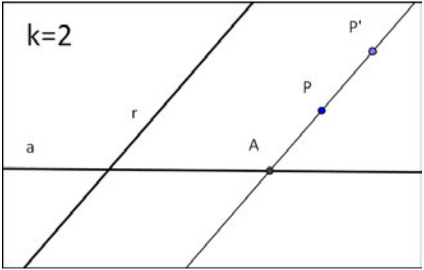
Kongruenzabbildungen	Ähnlichkeitsabbildungen	Affinitätsabbildungen
Bijektivität	Bijektivität	Bijektivität
Geradentreue	Geradentreue	Geradentreue
Längentreue	Verhältnistreue	Teilverhältnistreue
Winkeltreue	Winkeltreue	—

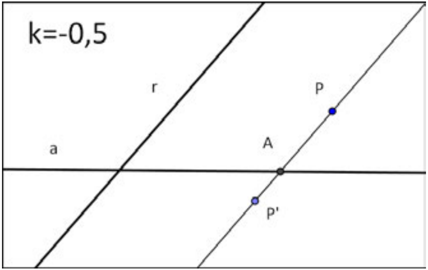
Parallelstreckungen

Es seien eine Gerade a (Achse), eine Gerade r (Richtung), die nicht parallel zu a ist und eine reelle Zahl $\mathrm{k} \neq 0$ gegeben. Die affine Abbildung $\psi(\mathrm{a}, \mathrm{r}; \mathrm{k})$ mit den Eigenschaften:

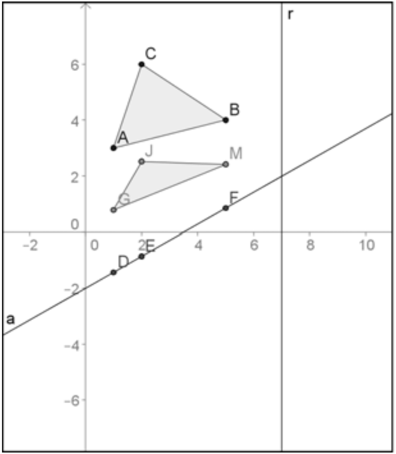
1. Die Punkte von a sind Fixpunkte, also $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$ für alle $\mathrm{A} \in \mathrm{a}$.
2. Für $\mathrm{P} \notin \mathrm{a}$ ist $\mathrm{P}' \neq \mathrm{P}$ und es gilt:
    1. $\mathrm{PP}' \| \mathrm{r}$,
    2. ist $\mathrm{PP}' \cap \mathrm{a} = \{\mathrm{A}\}$, dann ist $\overrightarrow{\mathrm{AP}'} = \mathrm{k} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

heißt Parallelstreckung.

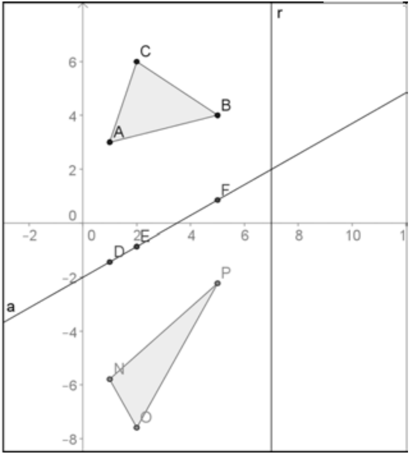




Aufgabe 2 - Übersicht

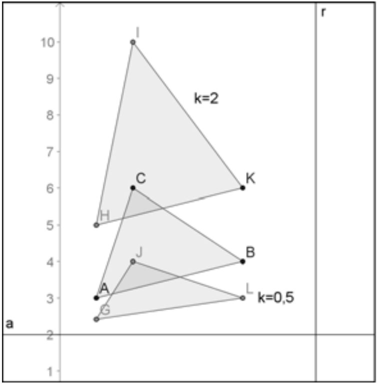


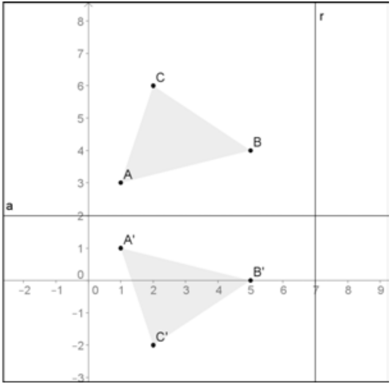
Parallelstreckung



Schrägspiegelung

Aufgabe 2 - Übersicht





orthogonale Parallelstreckung
(Streckung / Stauchung)

Spiegelung

Orthogonale Parallelstreckungen

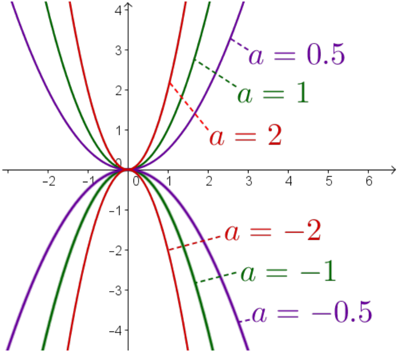
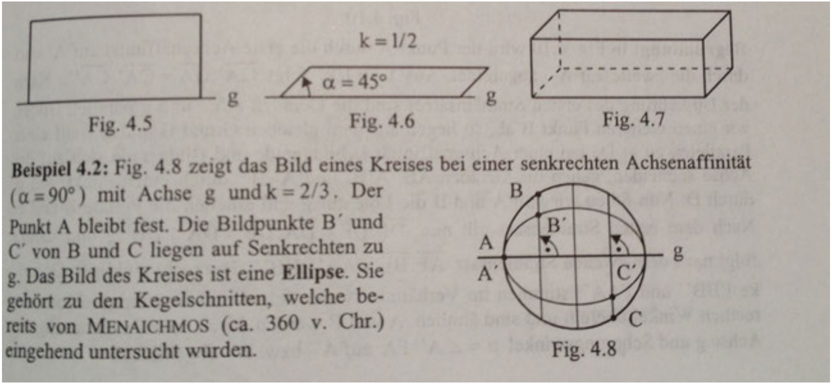


Abbildung: Parallelstreckung $\Psi(y = 0, x = 0, a)$ der quadratischen Funktion mit unterschiedlichen Streckfaktoren a

Quelle: `https://de.serlo.org/mathe/funktionen/wichtige-funktionstypen-und-ihre-eigenschaften/quadratische-funktionen-parabeln/parabeln/parabel`

Schrägbildkonstruktionen



Beispiel 4.2: Fig. 4.8 zeigt das Bild eines Kreises bei einer senkrechten Achsenaffinität ($\alpha = 90°$) mit Achse g und $k = 2/3$. Der Punkt A bleibt fest. Die Bildpunkte B´ und C´ von B und C liegen auf Senkrechten zu g. Das Bild des Kreises ist eine **Ellipse**. Sie gehört zu den Kegelschnitten, welche bereits von MENAICHMOS (ca. 360 v. Chr.) eingehend untersucht wurden.

Abbildung: Quelle: Kirsche, 1998

Beweise mit affiner Geometrie

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 vom Eckpunkt aus gesehen.

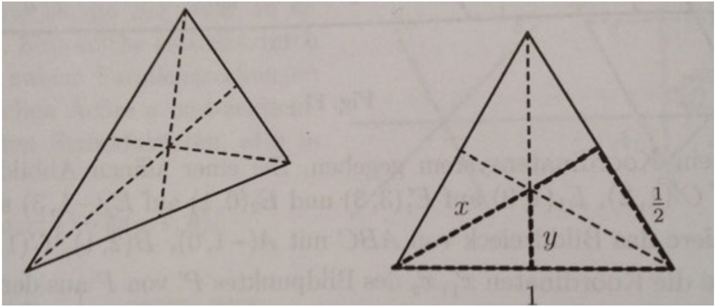


Abbildung: Quelle: Scheid, Schwarz (2009)

Definition

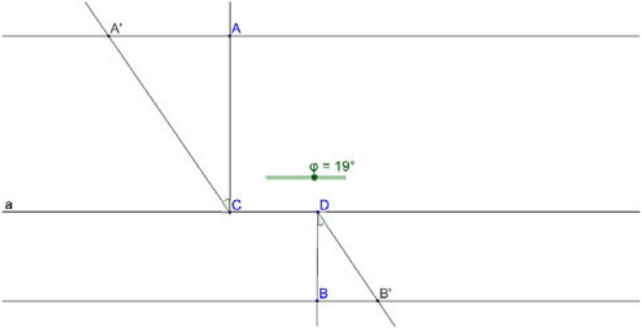
Definition

Die Verkettung zweier Parallelstreckungen $\psi(\mathrm{a}, \mathrm{r}; \mathrm{k}_1) \circ \psi(\mathrm{a}, \mathrm{s}; \mathrm{k}_2)$ mit gleicher Achse a und zueinander reziprokem Streckfaktor $\mathrm{k}_1 \cdot \mathrm{k}_2 = 1$ heißt *Scherung*.

Definition

Abbildungsvorschrift

Durch die Scherungsachse a und den $\text{Scherungswinkel } \varphi$ ist die Scherung eindeutig bestimmt.



Definition

Veranschaulichung mit *Geogebra*

Scherung eines Quadrats an der x- und y-Achse

Definition

Übung

Arbeitsblatt, 1. Aufgabe Scherung

Führe an dem gegebenen Quadrat die Verkettung einer Scherung an der x-Achse mit einer Scherung an der y-Achse für einen Scherungswinkel von jeweils $\varphi = 45^\circ$ *durch!*

Definiton

Eigenschaften

- Scherungen sind geradentreu und streckentreu.
- Schneidet eine Gerade die Achse a in dem Punkt S, so geht auch die Bildgerade durch S.
- Geraden, die zur Achse parallel sind, sind Fixgeraden.
- Parallele Geraden haben parallele Bildgeraden.
- Das Teilverhältnis von drei Punkten einer Geraden bleibt bei einer Scherung unverändert.

Darstellung

Parameterdarstellung

Setze $\tan\varphi = \mathrm{m}$

- Scherung an x-Achse in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x' &= x + m \cdot y \\ y' &= y \end{aligned}$$

- Scherung an y-Achse in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + m \cdot x \end{aligned}$$

Darstellung

Vektordarstellung

Setze $\tan\varphi = \mathrm{m}$

- Scherung an x-Achse in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Scherung an y-Achse in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Darstellung

Übung

Arbeitsblatt, 2. Aufgabe Scherung

Stelle für die Dreiecke $\triangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ *und* $\triangle \mathrm{A}''\mathrm{B}''\mathrm{C}''$ *jeweils die Scherungsmatrix auf. Hinweis: Es handelt sich nur um Scherungen an der x- bzw. y-Achse, keine Verkettung.*
Berechne für alle Dreiecke den Flächeninhalt. Wie verhalten sie sich zueinander?

Besondere Eigenschaften

Besondere Eigenschaften

Scherungen sind weder

- winkeltreu
- längentreu
- längenverhältnistreu

aber...

Besondere Eigenschaften in $\mathbb{R}^2$

Theorem

Der Flächeninhalt von Vielecken ist bei einer Scherung invariant.

Beweis.

- Betrachte $\triangle \mathrm{ABC}$ mit Grundseite parallel zu $\mathrm{Scherungsachse\ a}$.
- Nach Konstruktionsvorschrift folgt, dass Grundseite und Höhe von $\triangle \mathrm{ABC}$ und $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ gleichlang sind.
- $\Rightarrow$ Flächengleichheit von $\triangle \mathrm{ABC}$ und $\triangle A'B'C'$.
- Andere Dreiecke sind in derartige Dreiecke zerlegbar.
- Jedes Vieleck lässt sich in derartige Dreiecke zerlegen
- $\Rightarrow$ Vielecke bleiben bei Scherung flächentreu

$\square$

Besondere Eigenschaften in $\mathbb{R}^3$

Theorem

Der Volumen von Körpern ist bei einer Scherung invariant.

Veranschaulichung mittels *Geogebra*.

$\square$

Anwendungen

Anwendungen

Da die Scherung eine flächentreue Abbildung ist, lassen sich Fragestellungen, bei denen es um den Vergleich von Flächeninhalten geht, oft elegant mit Hilfe von Scherungen lösen.

Anwendung

Übung

Arbeitsblatt, 3. Aufgabe Scherung

Beweise den Satz des Pythagoras mit Hilfe der Scherung und Drehung. Gib eine genaue Konstruktionsvorschrift an, die die Scherungsachsen, Scherungswinkel und Drehungswinkel benennt.

Anwendung in $\mathbb{R}^2$

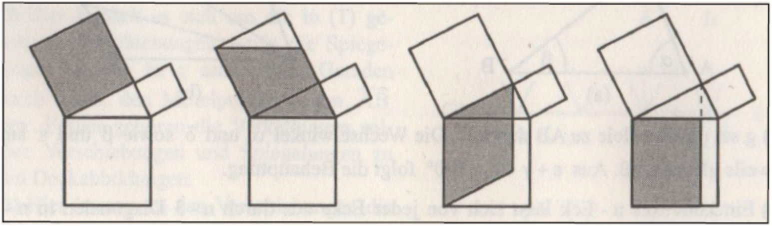


Abbildung: *Beweis des Kathetensatzes mit einer Scherung, Drehung und wieder Scherung*

Anwendung in $\mathbb{R}^3$

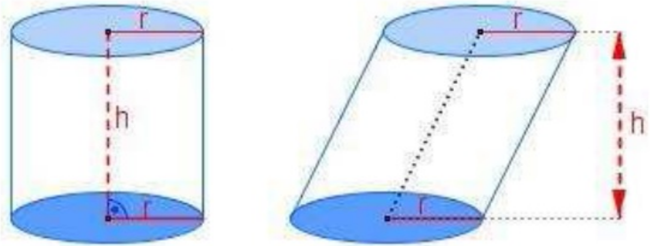


Abbildung: *Satz des Cavalieri verdeutlicht die Volumentreue der Scherung in* $\mathbb{R}^3$

Anwendung in der Physik

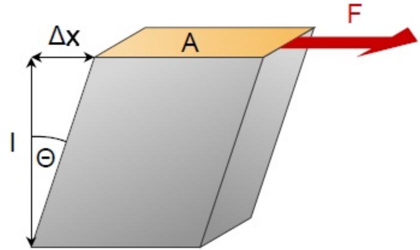


Abbildung: *Verformung eines Körpers unter Einwirkung einer* Scherkraft F*. Der* Scherwinkel θ *ergibt sich aus der* Scherspannung $\tau = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ *und dem* Schermodul G *zu* $\tan\theta = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}\cdot\mathrm{A}}$.

Mittagspause

Thema 2

Konstruktion

1. Wähle einen Punkt M und zeichne einen Kreis K beliebigen Radius r mit M als Zentrum!
2. Wähle einen Punkt P außerhalb von K und zeichne die Halbgerade von M durch P!
3. Zeichne beide Tangenten von P an K!
4. Fälle je ein Lot von M auf beide Tangenten und zeichne die Gerade durch die entstehenden Schnittpunkte!
5. Bezeichne den Schnittpunkt jener Schnittpunktgeraden und der Halbgeraden $|\mathrm{MP}$ mit Q!

Abbildung

Welche Abbildung bildet den Punkt Q auf den Punkt P ab?

Welche Eigenschaften hat die beschriebene Abbildung?

Inversion

Definition

Eine Kreisspiegelung bzw. Inversion ist eine geometrische Abbildung $\psi_{\mathrm{K}}(\mathrm{M}, \mathrm{r})$ der Ebene $\mathrm{E} \setminus \{\mathrm{M}\}$ auf sich selbst. Sie wird durch den Mittelpunkt $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ und den Radius $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$ ihres Inversionskreises K bestimmt.

- Jedem von M verschiedenen Punkt P der Ebene wird auf der Halbgeraden $|\mathrm{MP}$ ein Punkt P' zugeordnet, wobei gilt, dass $\overline{\mathrm{MP}} \cdot \overline{\mathrm{MP}'} = \mathrm{r}^2$.

Eigenschaften

- Eine Kreisspiegelung ist eine bijektive Abbildung.
- Die Verkettung einer Kreisspiegelung mit sich selbst ergibt die identische Abbildung der Ebene auf sich.
- Die Punkte des Inversionskreises sind Fixpunkte der Abbildung.
- Eine Kreisspiegelung vertauscht Inneres und Äußeres des Inversionskreises.
- Eine Kreisspiegelung ist winkel- bzw. winkelmaßtreu und zykeltreu.

GRUPPENARBEIT Inversionsbilder

Gruppe 1:

Untersucht die Inversionsbilder von Geraden!

Gruppe 2:

Untersucht die Inversionsbilder von Kreisen!

BEACHTET ALLE MÖGLICHEN FÄLLE!

Inversion bestimmen

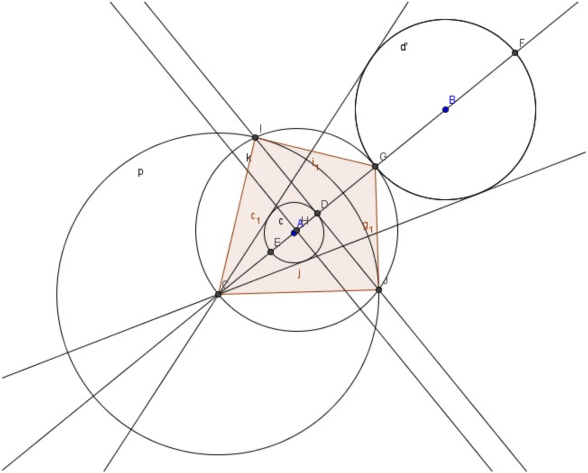


Abbildung: Bestimmung einer Inversion

Inversion bestimmen

Bestimmt zu zwei sich nicht schneidenden oder berührenden Kreisen $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ den Inversionskreis, der K_1 in K_2 überführt!

Formuliere eine Konstruktionsvorschrift!

Verkettung

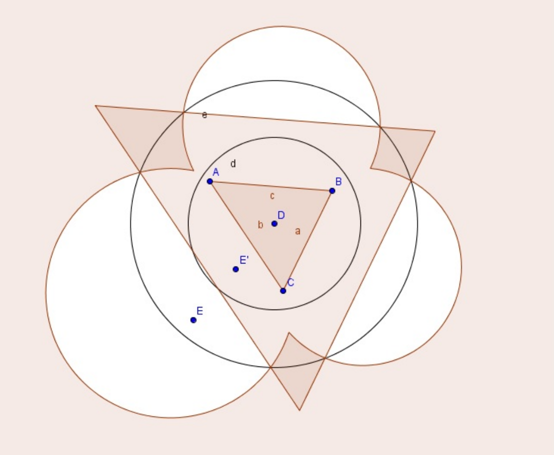


Abbildung: Verkettung konzentrischer Kreisspiegelungen

Verkettung

Wählt ein beliebiges Polygon und zeichnet zwei konzentrische Inversionskreise verschiedenen Radius! Spiegelt das Polygon an einem Inversionskreis und spiegelt das Bildpolygon wiederum am zweiten Inversionskreis!

Welche geometrische Abbildung resultiert daraus?

Welche Eigenschaften hat die Abbildung?

Kreisspiegelung im Unterricht

- Der Fehlvorstellung, dass geometrische Abbildungen z.B. allgemein geradentreu sind, wird vorgebeugt.
- Die Kreisspiegelung besitzt Eigenschaften, die von Achsen- und Punktspiegelung bzw. Streckungen bekannt sind.
- Das Verständnis der Kreisspiegelung fordert das Verständnis elementarer Sätze der ebenen Geometrie.
- Kreisspiegelungen zeigen fortgeschrittene Wechselwirkung zwischen geometrischen Figuren auf.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit

Quellen

- *Figuren und Abbildungen*,
  Hans Schupp, Franzbecker, Hildesheim 1998
- *Elemente der Geometrie*,
  Scheid/Schwarz, Spektrum Verlag, Heidelberg 2009
- *Einführung in die Abbildungsgeometrie*,
  Kirsche, Teubner, Leipzig 1998