

# Spiegelungen und einige Anwendungen

30.10.2014

Natalie Mangels

Ulrike Beelitz

# Allg. Kompetenzen im Geometrieunterricht

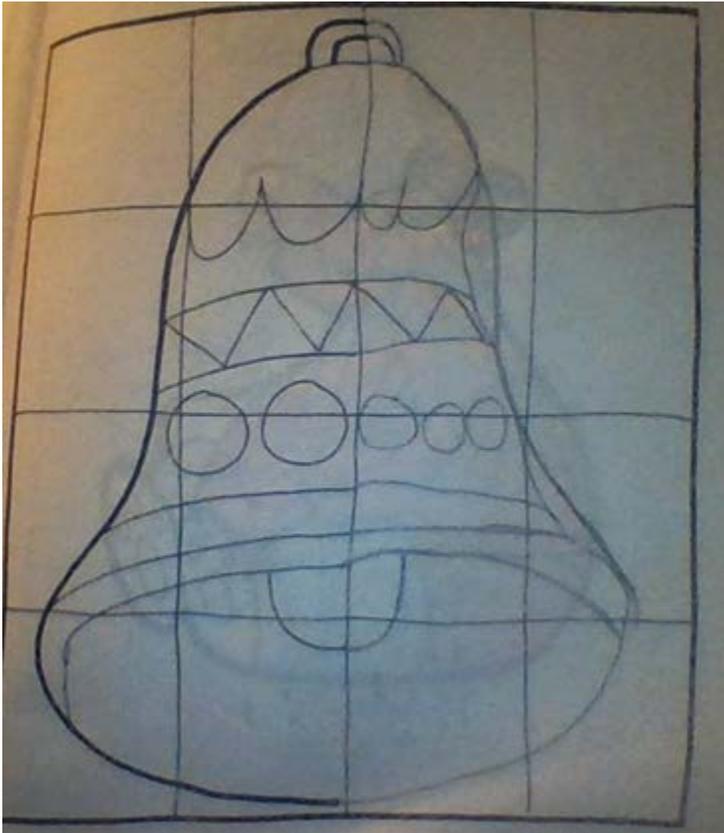
Ebene und räumliche Figuren werden analysiert, klassifiziert und durch Skizzen, Konstruktionen, Netze, Schrägbilder oder Modelle dargestellt. So wächst die Fähigkeit, geometrische Strukturen in der Umwelt zu erkennen. Durch die Darstellung geometrischer Situationen mit Hilfe von Koordinaten werden geometrische Probleme der analytischen Bearbeitung zugänglich. Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Figuren werden beschrieben und Gesetzmäßigkeiten begründet, um sie in Sachzusammenhängen zur Problemlösung zu nutzen.

# Grunderfahrungen als Kompetenzinhalte

(nach Winter 1996)

- 1) Erscheinungen der Welt, um uns aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.  
*(Anwendungen)*
- 2) Mathematische Gegenstände und Sachverhalte repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen.  
*(mathematische Theorie)*
- 3) In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen zu erwerben.  
*(Heuristische Fähigkeiten)*

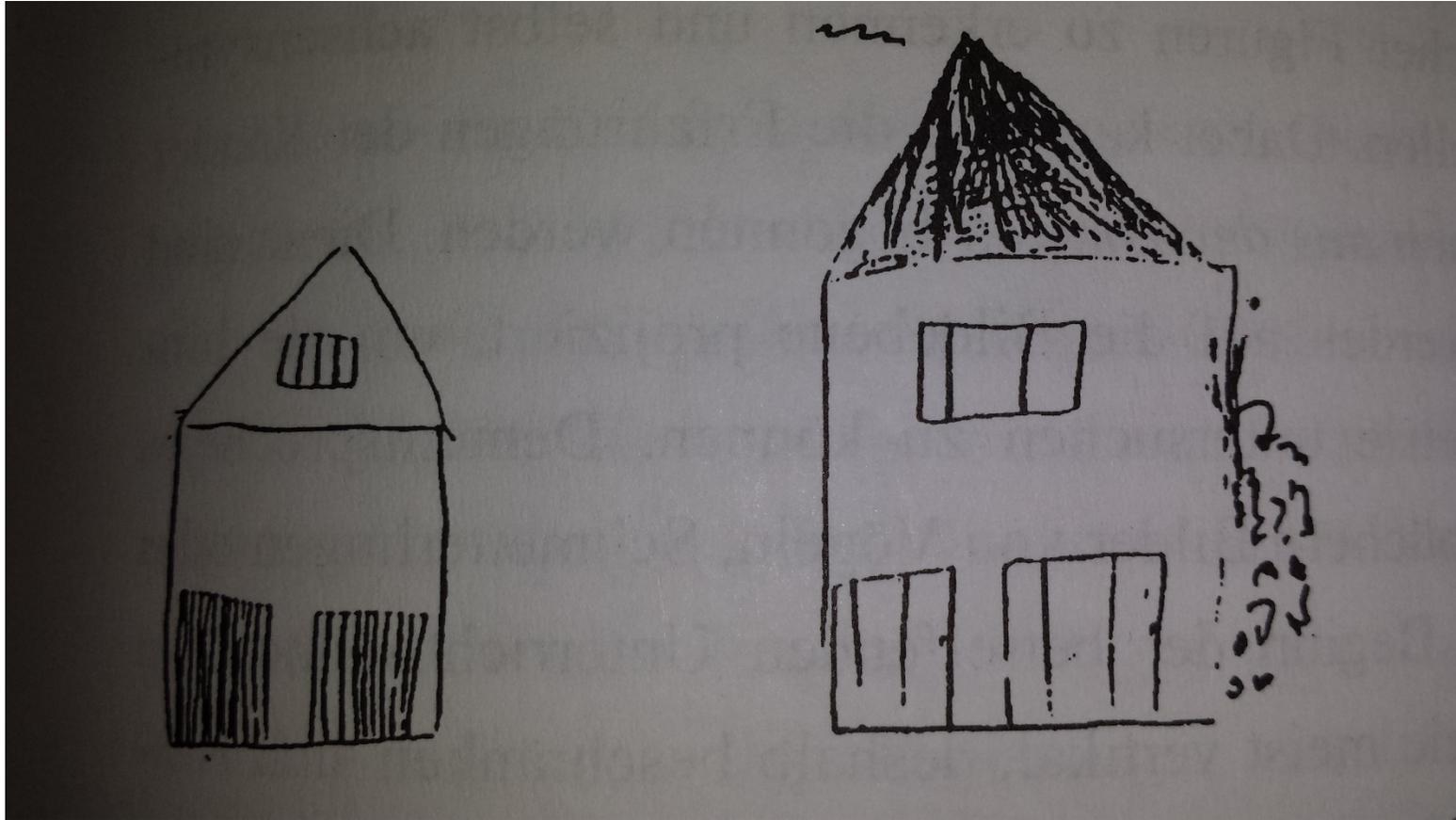
# Anwendungen Vorschule



Quelle: eigene Aufnahme

- Erste Erfahrung und Veranschaulichung der Symmetrie
- Intuitives „Weiterzeichnen“ bzw. „vervollständigen“ der Figur

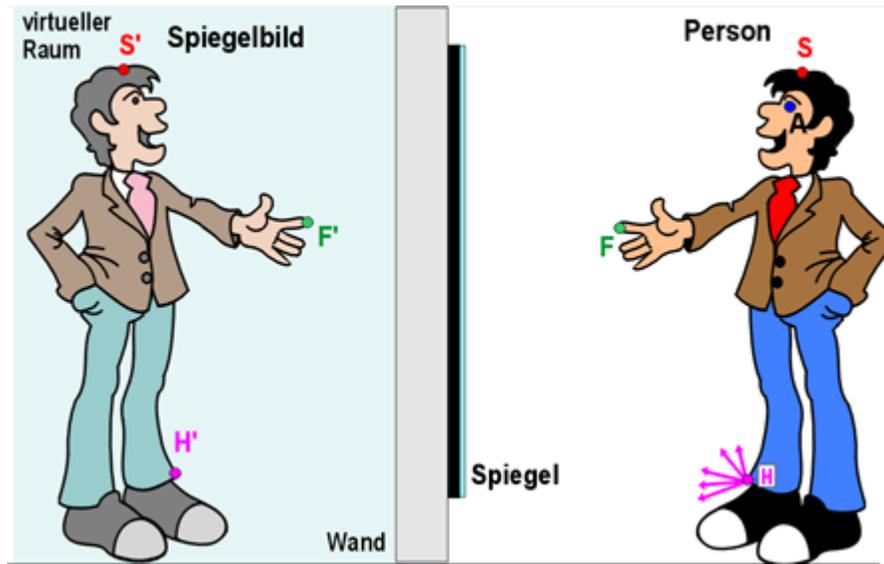
# Bezug zur Symmetrie



Quelle: Didaktik der Geometrie

# Anwendung Grundschule

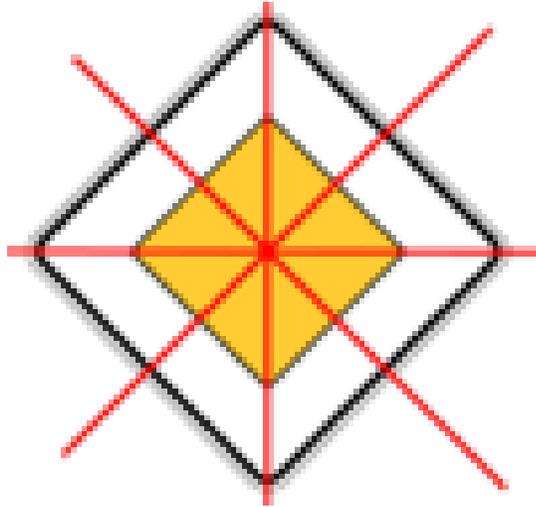
## *Bildentstehung am ebenen Spiegel*



Quelle: [unterrichtsmaterialien.de/pop003f](http://unterrichtsmaterialien.de/pop003f)

- Heranführung einer realen Situation im geometrischen Kontext.
- Geometrische Strukturen in der Umwelt erkennen.
- Eigenschaften einer Spiegelung werden herausgearbeitet.

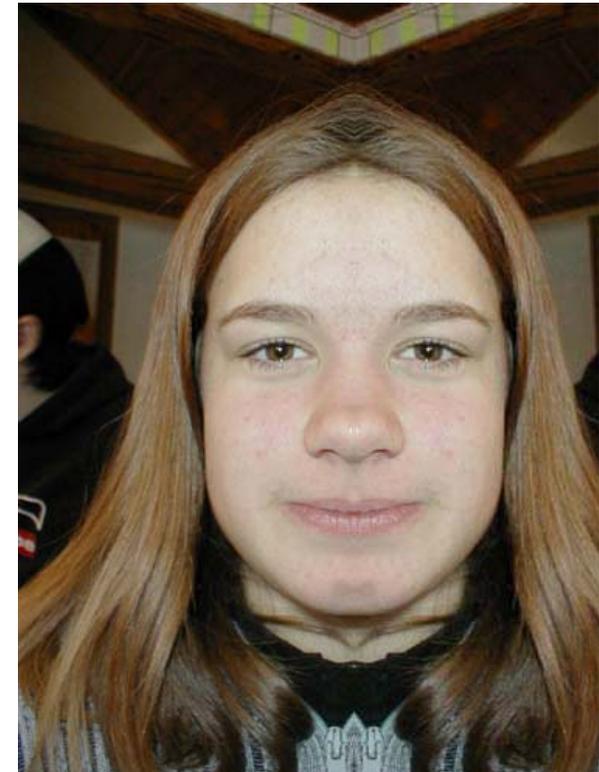
# Anwendung Grundschule



- Heranführung einer realen Situation im geometrischen Kontext.
- Geometrische Strukturen in der Umwelt erkennen.
- Eigenschaften der Symmetrie werden herausgearbeitet.

Quelle:  
[http://wikis.zum.de/dmuw/Lernpfade/Symmetrie/Symmetrie\\_in\\_der\\_Umwelt/Station\\_2](http://wikis.zum.de/dmuw/Lernpfade/Symmetrie/Symmetrie_in_der_Umwelt/Station_2)

# Symmetrie vs. Spiegelung in der Grundschule



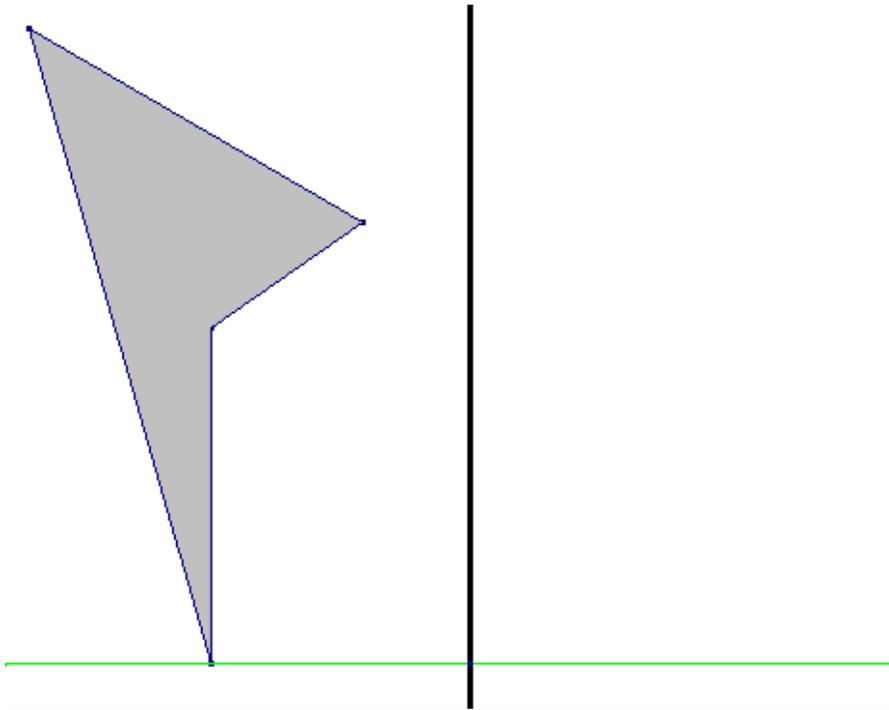
Quelle:

<http://www.maplan.ch/spiegelungen/>

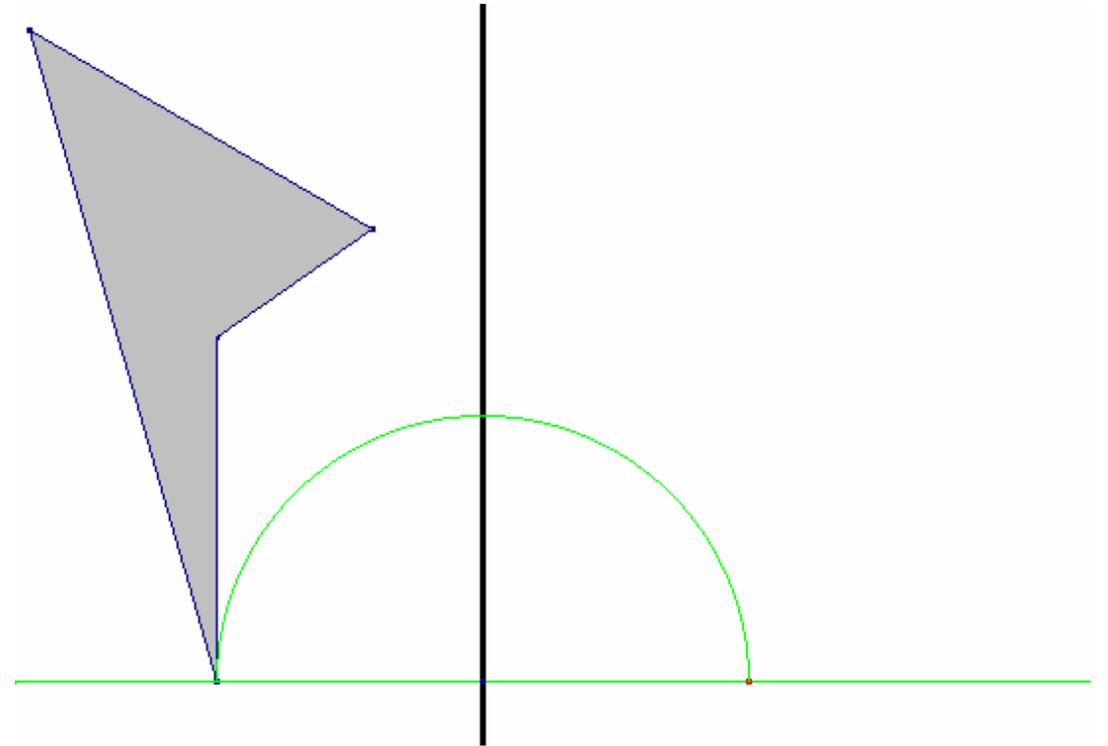
# Wichtige Begriffe

- Spiegelung = Vorgang, der ein (neues) Bild mit Hilfe einer Spiegelachse produziert.
  - Symmetrie = Eigenschaft einer Figur bzw. Relation zw. mehreren Figuren.
- *Begriffe müssen klar voneinander unterschieden werden*

# Achsen Spiegelung Konstruktion

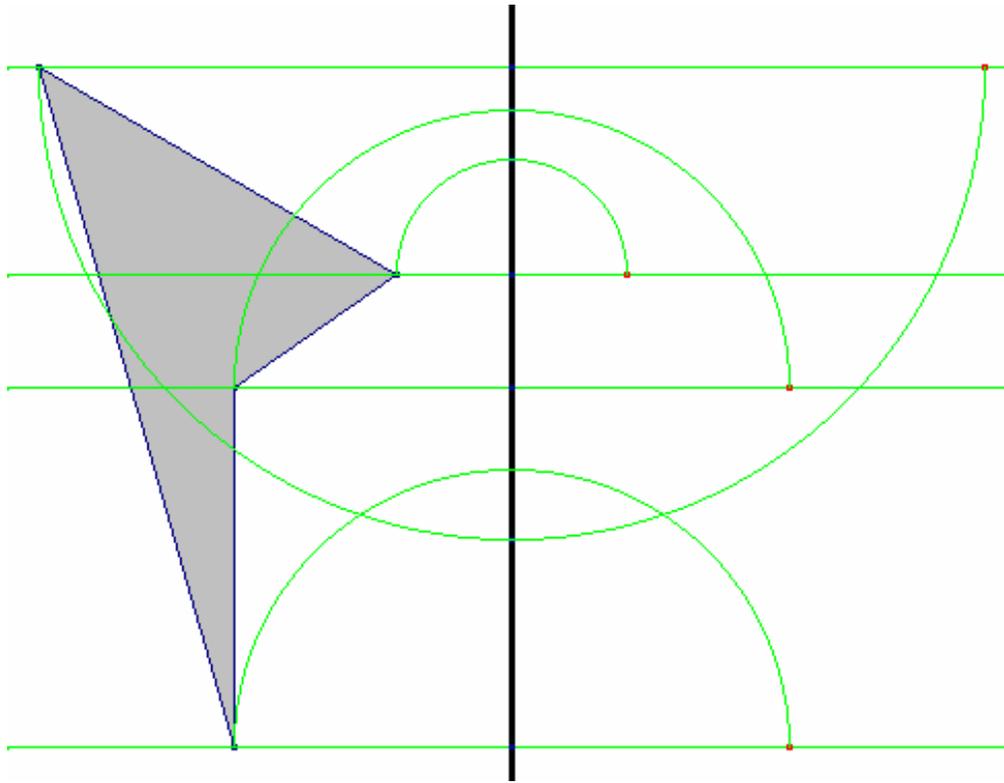


Zeichne eine Senkrechte (=Lot) auf die Symmetrieachse  $s$ , welche durch den Punkt  $A$  geht.

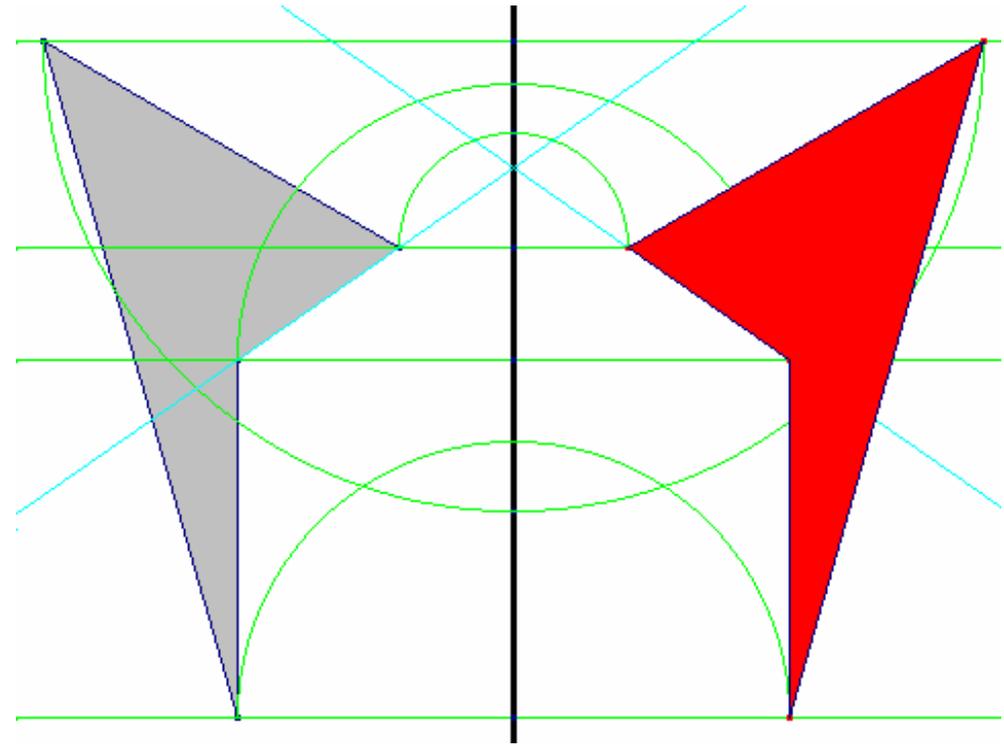


Nimm den Abstand von der Symmetrieachse  $s$  zum Punkt  $A$  in den Zirkel. Trage ihn auf die andere Seite ab. So entsteht der Bildpunkt  $A'$ .

# Achsen Spiegelung Konstruktion

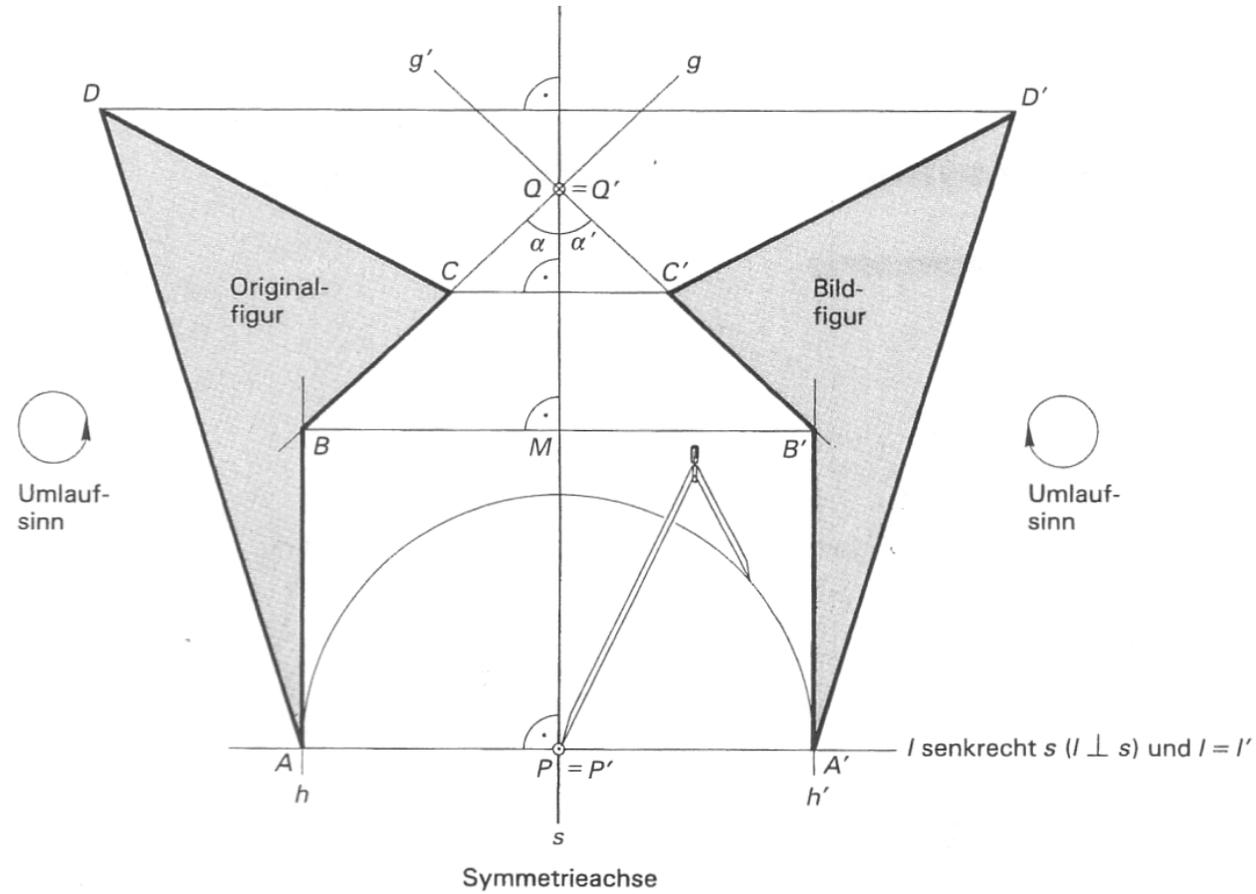


Die Schritte 1 und 2 wiederholst du für jeden Eckpunkt.  
(Alternative für Schritt 2: Parallel verschieben)



Jetzt kannst du alle Bildpunkt miteinander verbinden und bist fertig.

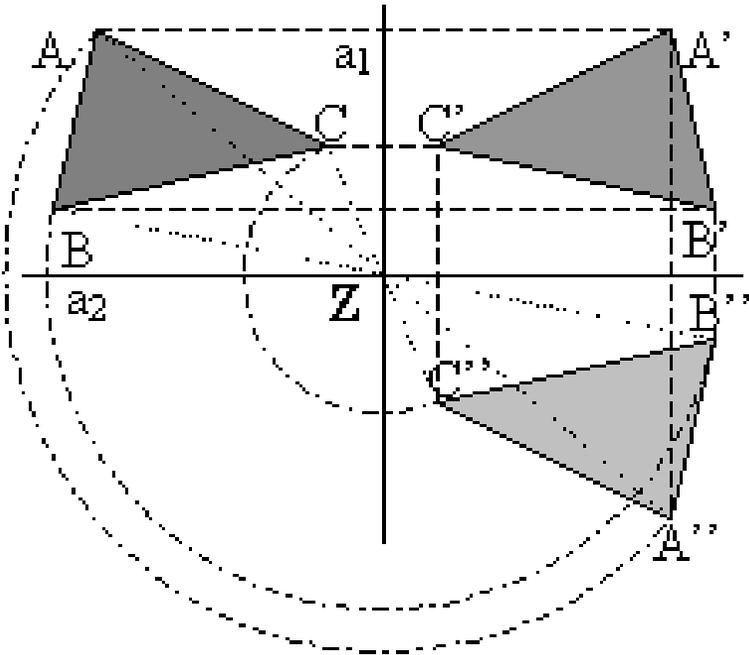
# Achsen Spiegelung



# Aufgabe:

- Konstruiert auf mindestens 2 verschiedene Weisen eine Punktspiegelung.
- Entwerft jeweils eine Konstruktionsvorschrift.
- Welche Begriffe sind in diesem Zusammenhang für Schüler hilfreich?
- Welche Probleme könnten auftreten?

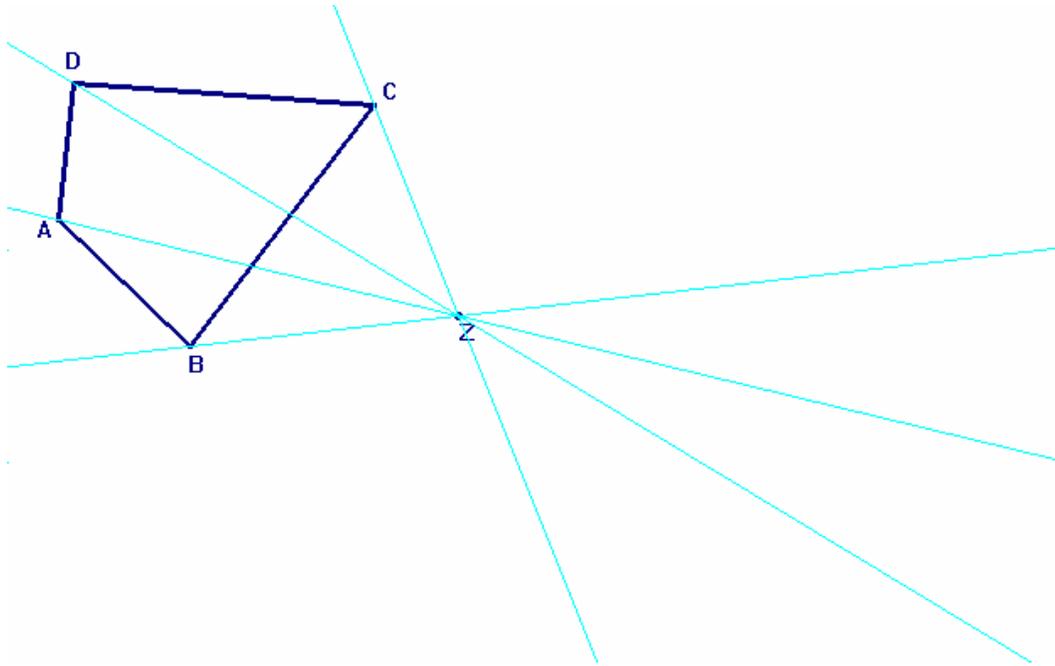
# Von Achsen Spiegelung zur Punktspiegelung



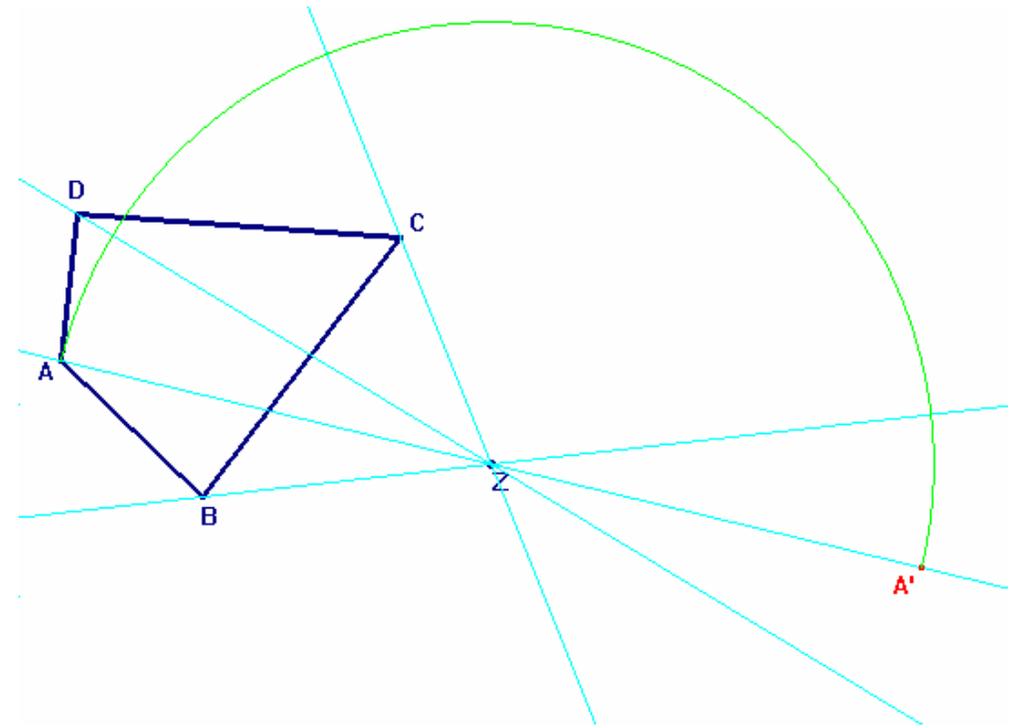
- Eine Punktspiegelung kann durch eine Zweifachspiegelung an in Z zueinander senkrechten Achsen oder eine  $180^\circ$ -Drehung um Z ersetzt werden.

Quelle: <http://www.ellroth.de/3-4-Dateien/image002.gif>

# Punktspiegelung Konstruktion

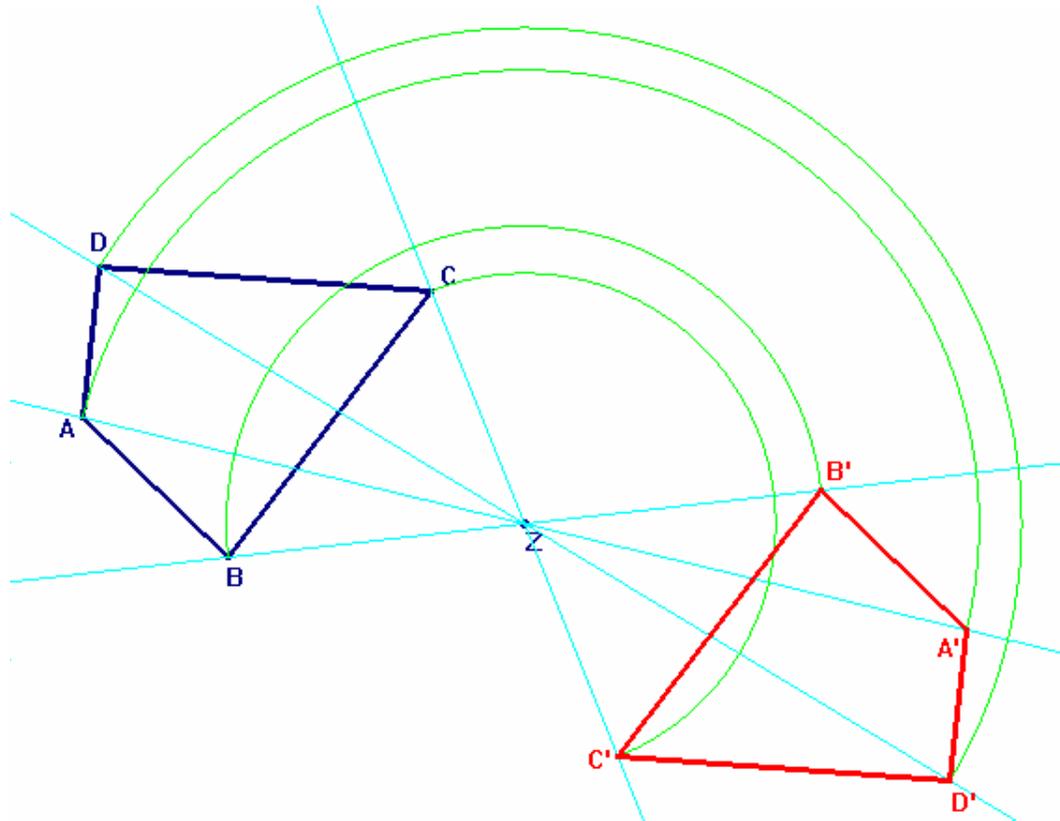


Verbinde das Symmetriezentrum Z mit allen Eckpunkten der Originalfigur (Zeichne diese Verbindungen als Geraden ein!)



Mit dem Zirkel trägst du die Entfernung der Eckpunkte der Originalfigur zu Z auf die andere Seite ab (Hier gezeigt für AZ). So erhältst du den jeweiligen Bildpunkt.

# Punktspiegelung Konstruktion



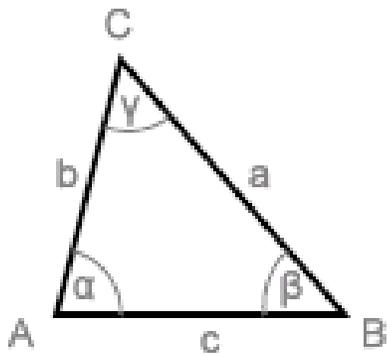
Auf diese Weise erhältst du alle Bildpunkte, diese kannst du verbinden. Markiere die Lösung rot.

Bei der Punktspiegelung kannst du, sobald du einen Bildpunkt gefunden hast, mit Parallelverschieben weiterarbeiten (AB ist parallel zu A'B', BC ist parallel zu B'C' und so weiter).

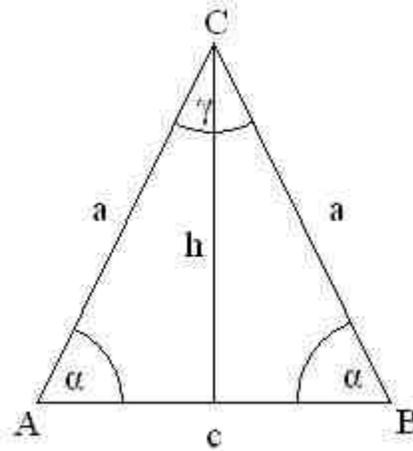
Beispiele entnommen:

<http://www.andiraez.ch/schule/DossierSymmetrie.pdf>

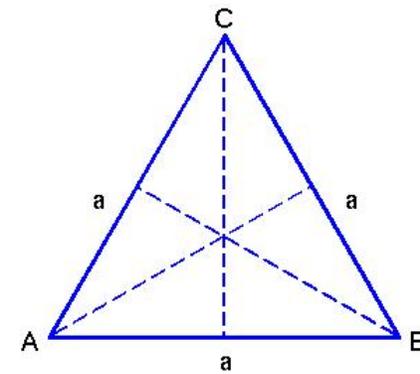
# Klassifizierung von Dreiecken



Keine Symmetrieachse



1 Symmetrieachse

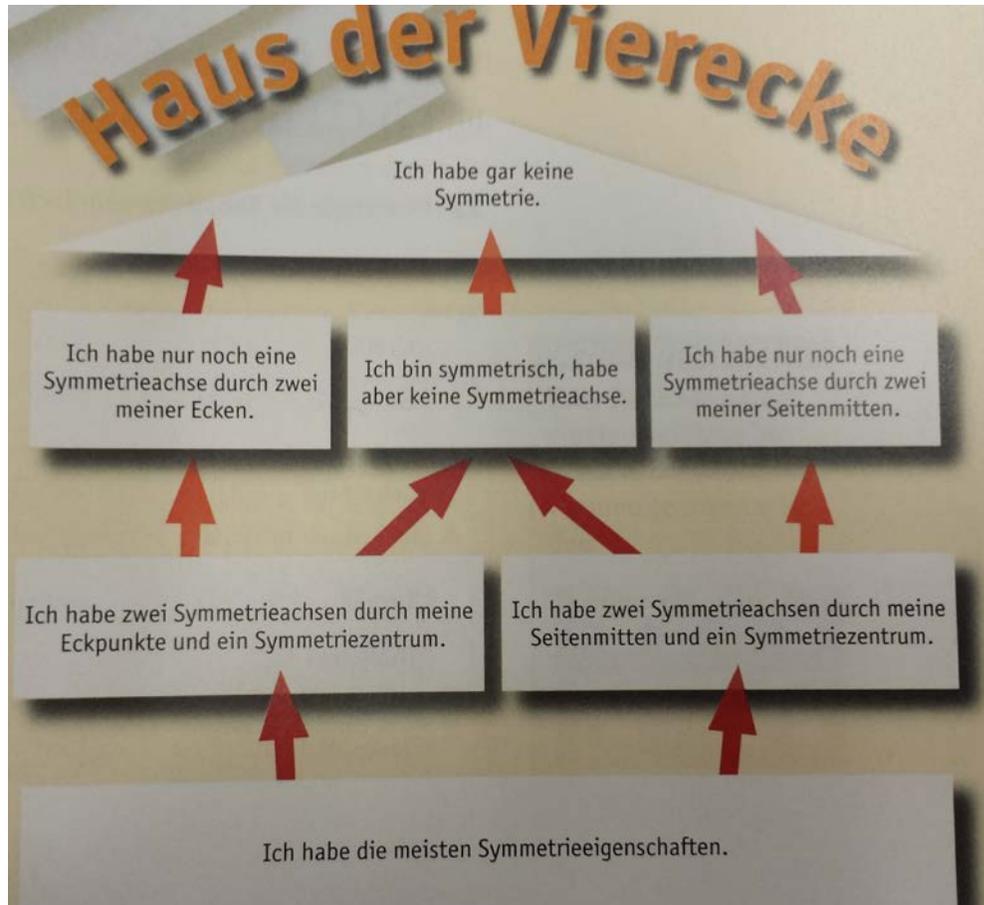


3 Symmetrieachsen

# Aufgabe:

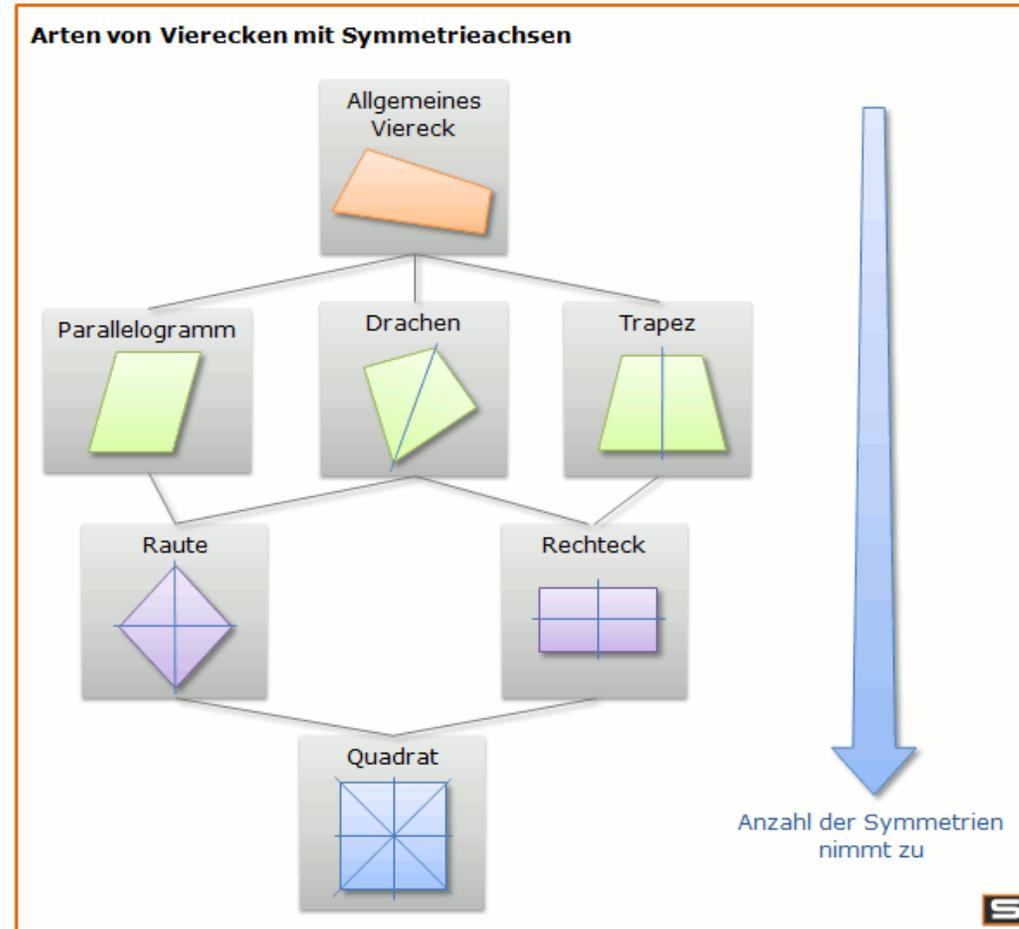
- Überlegt Euch, wie man Vierecke nach Symmetrie klassifizieren kann.
- Erstellt dazu ein entsprechendes Schema.
- Welches Ziel verfolgt diese Aufgabe?
- Wie lässt sich diese Aufgabe im Unterricht gestalten?

# Klassifizierung von Vierecke



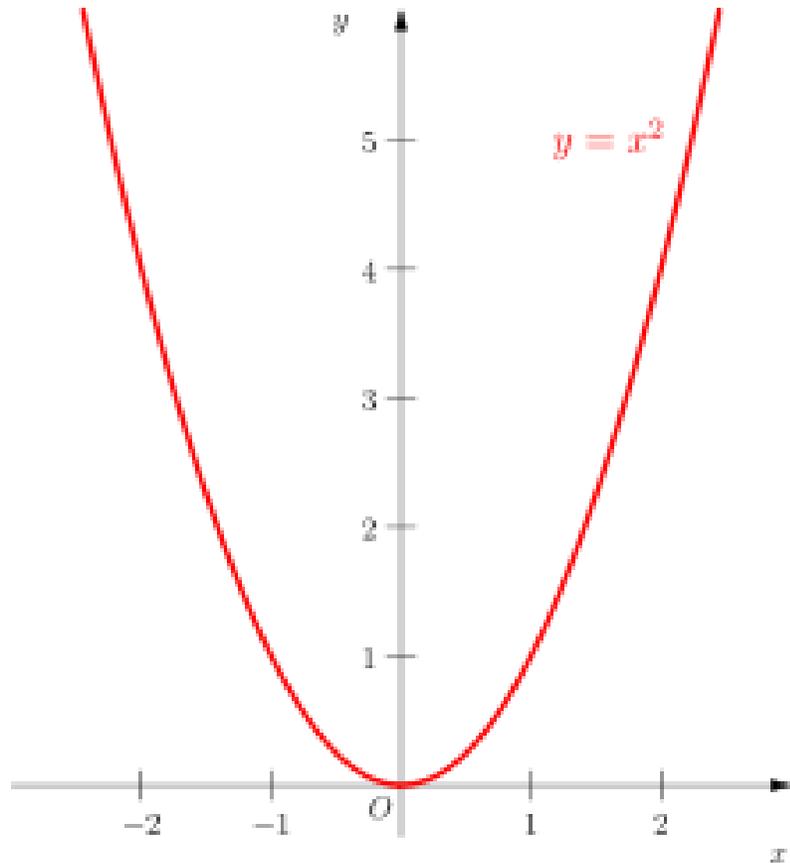
- Klassifizieren der Vierecke nach Symmetrie
- Schüler ordnen Vierecke selbstständig zu

# Klassifizierung von Vierecken



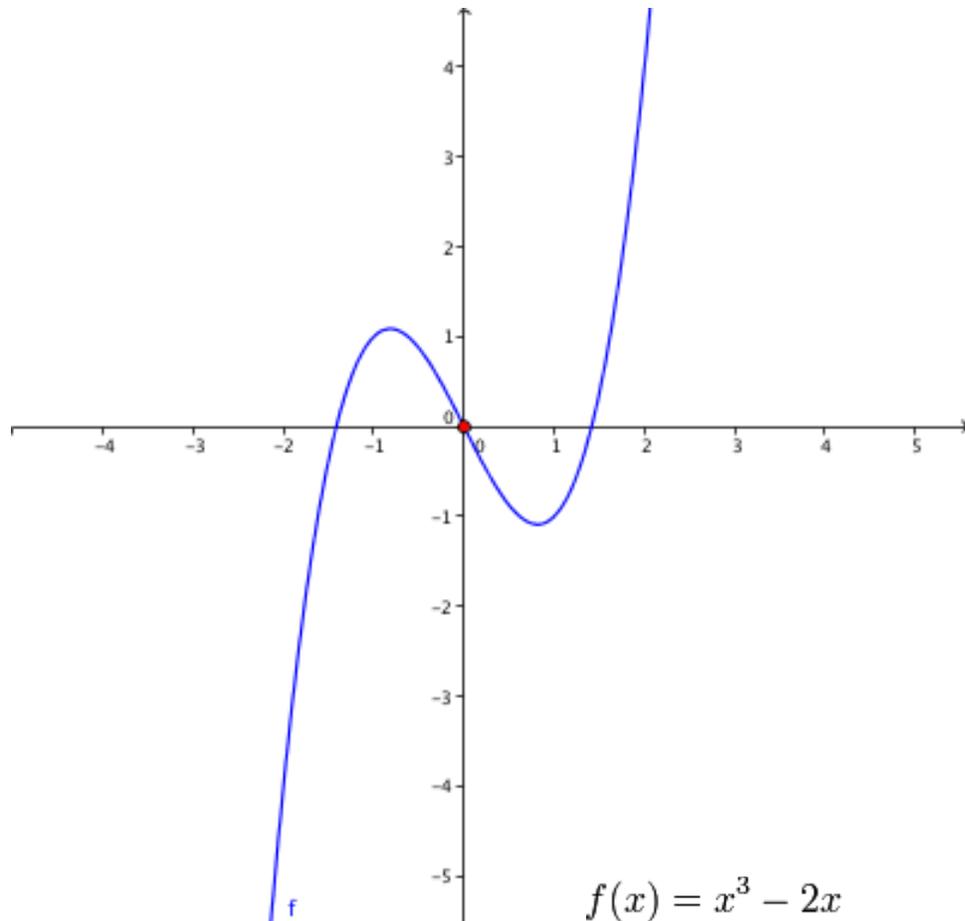
Quelle: <http://www.schulminator.com/mathematik/vierecke-und-vielecke>

# Symmetrie von Funktionen



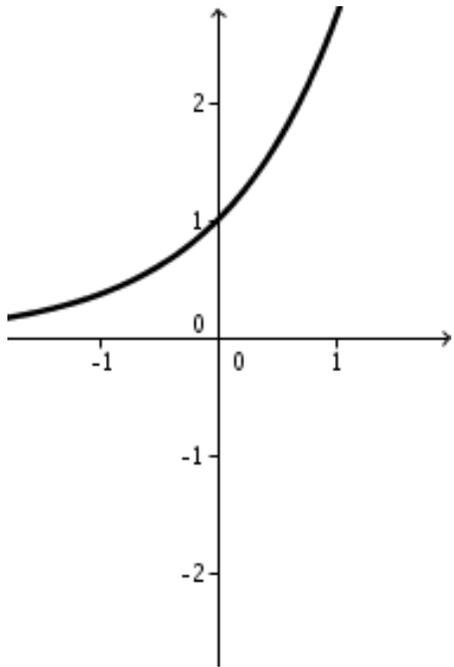
- Normalparabel =  
achsensymmetrisch (y-Achse)
- Es gilt  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x$  im  
Definitionsbereich  $D$ .

# Symmetrie von Funktionen

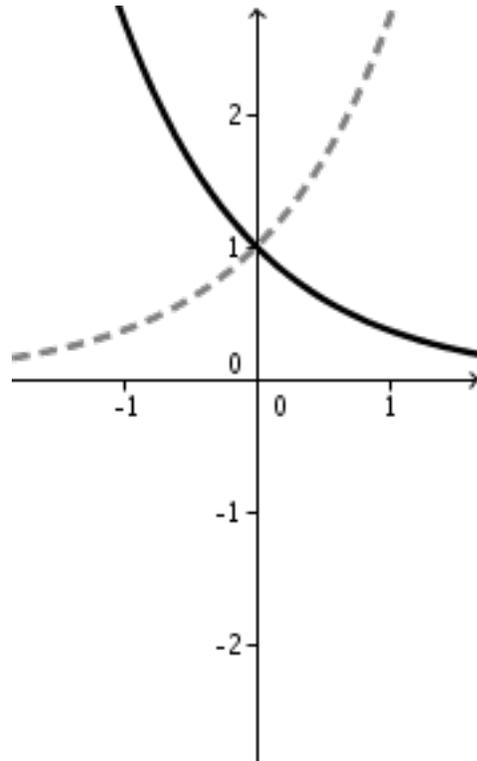


- Funktion = punktsymmetrisch (Koordinatenursprung)
- Es gilt  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x$  im Definitionsbereich  $D$ .

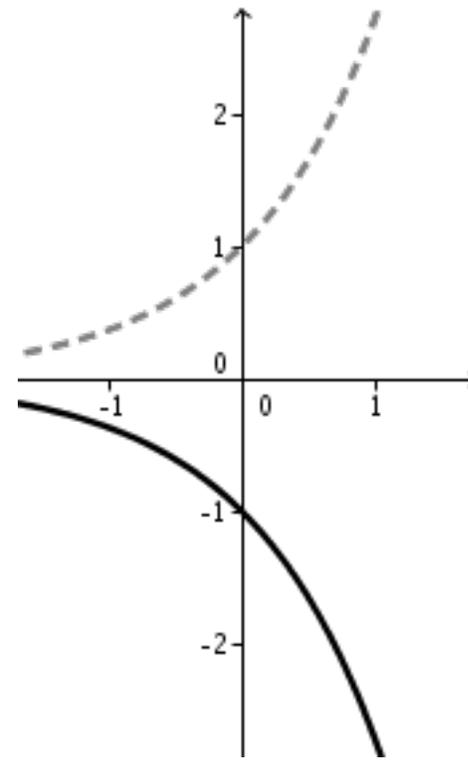
# Spiegelung von Funktionsgraphen



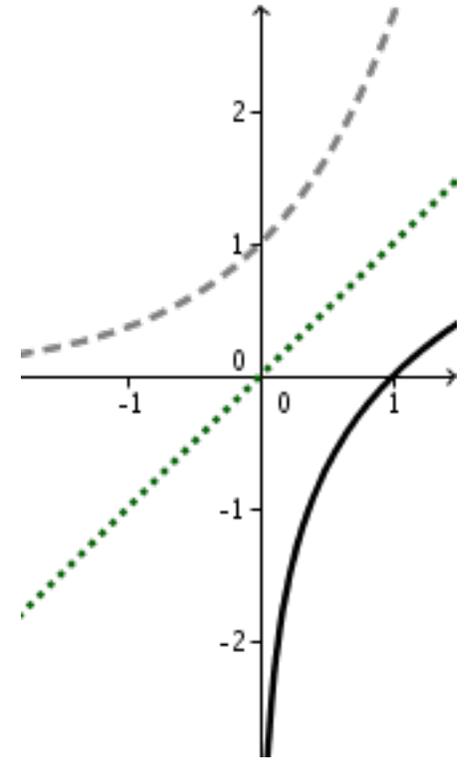
$$f(x) = e^x$$



$$g_1(x) = e^{-x}$$



$$g_2(x) = -e^{-x}$$



$$g_3(x) = f^{-1}(x) = \ln(x)$$

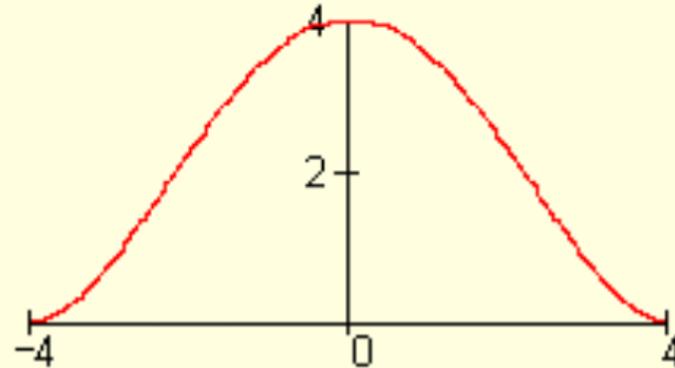
# Lösen von Aufgaben mit Symmetrie- eigenschaften der Funktionen

- Funktionswerte müssen nicht immer mühselig berechnet werden
- Extrempunkte sind einfacher identifizierbar
- Überprüfung der errechneten Werte
- Lösungen durch Argumentieren (prozessbezogene Kompetenz)
- etc.

# Anwendung

Die Abbildung zeigt den Giebel eines Barock- Hauses (Maße in m).

- a) Begründen Sie, dass es sich bei der Randfunktion um eine ganzrationale Funktion 4. Grades handelt.
- b) Bestimmen Sie den Funktionsterm.
- c) Ein Fenster der Höhe 2,25 m soll in den Giebel eingepasst werden. Wie breit kann es höchstens sein?



Quelle: [http://www.brinkmann-du.de/mathe/aufgabenportal/p3\\_gr\\_fkt\\_041/p3\\_gr\\_fkt\\_041.htm](http://www.brinkmann-du.de/mathe/aufgabenportal/p3_gr_fkt_041/p3_gr_fkt_041.htm)

# Diskussionsbedarf?

2 Beschreibe Auffälligkeiten in den Fotos und den Bildern in der Randspalte.

①



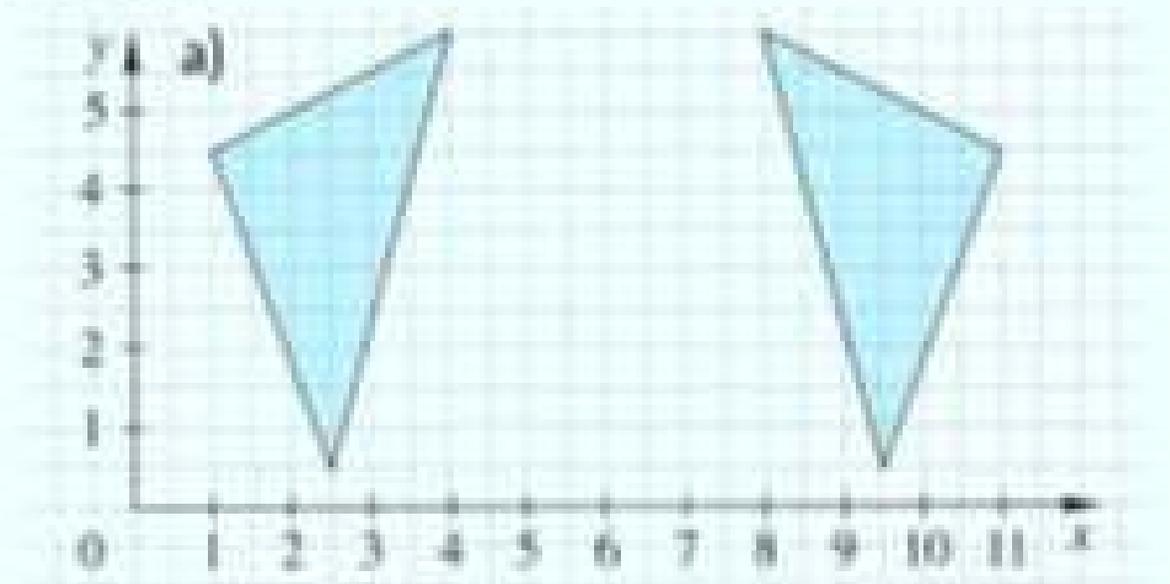
②



# Diskussionsbedarf?

## 4 Symmetrieachsen bestimmen

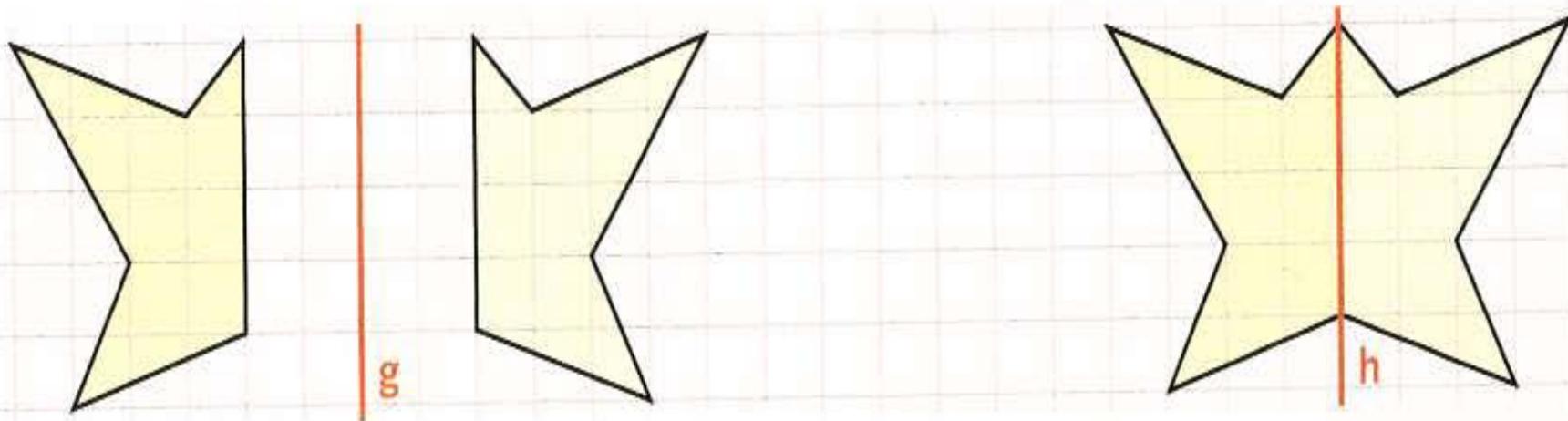
Gib die Koordinaten von Punkten an, durch welche die Spiegelachse gezeichnet werden kann. Wenn du dir nicht sicher bist, zeichne im Heft.



# Diskussionsbedarf?

## Beispiele

a) Wenn du die linke Figur in der Abbildung an der Geraden  $g$  spiegelst, entsteht die rechte. Die beiden Figuren liegen spiegelbildlich zueinander. Wenn du dieselbe Figur an der Geraden  $h$  spiegelst, so wird aus beiden Figuren zusammen eine achsensymmetrische Figur.



# Diskussionsbedarf?

Durch eine **Punktspiegelung** kann man punktsymmetrische Figuren herstellen und auch Figuren an einem Symmetriepunkt um  $180^\circ$  drehen.

## BEISPIEL 3

Punktspiegelung am Symmetriepunkt  $S$

