I Inzidenzaxiome

I 1 Zu zwei (verschiedenen) Punkten $A, B \in \mathsf{P}$ gibt es stets eine Gerade $a \in \mathsf{G}$, mit der A und B inzidieren.

I 2 Zu zwei Punkten $A, B \in \mathsf{P}$ gibt es höchstens eine Gerade $a \in \mathsf{G}$, mit der A und B inzidieren.

I 3 Auf jeder Geraden gibt es mindestens zwei Punkte.

Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

I 4 Zu je drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten $A, B, C \in \mathsf{P}$ gibt es stets eine Ebene $\alpha \in \mathsf{E}$, mit der A, B und C inzidieren.

Zu jeder Ebene $\alpha \in \mathsf{E}$ gibt es stets einen mit ihr inzidierenden Punkt $A \in \mathsf{P}$.

I 5 Zu je drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten $A, B, C \in \mathsf{P}$ gibt es höchstens eine Ebene $\alpha \in \mathsf{E}$, mit der A, B und C inzidieren.

I 6 Wenn zwei Punkte $A, B \in \mathsf{P}$ einer Geraden $a \in \mathsf{G}$ in einer Ebene $\alpha \in \mathsf{E}$ liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

I 7 Wenn zwei Ebenen $\alpha, \beta \in \mathsf{E}$ einen Punkt $A \in \mathsf{P}$ gemeinsam haben, so haben sie mindestens einen weiteren Punkt $B \in \mathsf{P}$ gemeinsam.

I 8 Es gibt wenigstens vier Punkte, die nicht alle in derselben Ebene liegen.

II Anordnungsaxiome

II 1 Wenn $(A, B, C) \in Z$, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden und es gilt auch $(C, B, A) \in Z$.

II 2 Zu zwei (verschiedenen) Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC mit $(A, C, B) \in Z$.

II 3 Unter irgend drei (verschiedenen) Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

II 4 **(Axiom von PASCH)**

Es seien $A, B, C \in \mathsf{P}$ drei nichtkollineare Punkte und g eine nicht mit A, B, C inzidierende Gerade der Ebene ABC. Wenn g dann durch einen (inneren) Punkt der Strecke $\overline{AB}$ geht, so geht sie auch durch einen (inneren) Punkt von $\overline{AC}$ oder durch einen (inneren) Punkt von $\overline{BC}$.

III Kongruenzaxiome

III 1 Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und A' ein Punkt einer Geraden a' ($a' = a$) möglich, so existiert auf einer gegebenen Seite von a' bzgl. A' genau ein Punkt B' derart, daß $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$.
Für jede Strecke $\overline{AB}$ gilt $\overline{AB} \cong \overline{BA}$

III 2 Wenn $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ und $\overline{A''B''} \cong \overline{AB}$, so $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$.

III 3 Es seien A, B, C drei (verschiedene) Punkte einer Geraden a mit B zwischen A, C,
A', B', C' drei (verschiedene) Punkte einer Geraden a' mit B' zwischen A', C'.
Wenn $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
(Streckenadditionssatz).

III 4 Wenn $\angle(h, k)$ in α, a' in α', eine Seite von a' in α' gegeben (Halbebene),
$0' \in a'$, ein von $0'$ ausgehender Strahl h' auf a',
dann existiert in α' genau ein Strahl k' mit

1) $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$ und
2) alle inneren Punkte von $\angle(h', k')$ liegen auf der gegebenen Seite von a'.

III 5 A, B, C und A', B', C' seien jeweils nichtkollineare Punkte.
Wenn $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$,
so $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ und $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

III' Bewegungsaxiome

III' 1 Wenn τ eine Bewegung ist, so ist auch τ^{-1} eine Bewegung.
Die NAF zweier Bewegungen ist eine Bewegung.

III' 2 Wenn $\boldsymbol{\tau}$ eine Bewegung ist und C zwischen A und B, so ist $\boldsymbol{\tau}(C)$ zwischen $\boldsymbol{\tau}(A)$ und $\boldsymbol{\tau}(B)$.

III' 3 Wenn eine Bewegung eine Halbgerade auf sich abbildet, dann bildet sie jeden Punkt dieser Halbgeraden auf sich ab. (d. h. jeder Punkt ist ein Fixpunkt.)

III' 4 Wenn $\left(0_1, \overline{\ell_1}, \overline{\lambda_1}\right)$ und $\left(0_2, \overline{\ell_2}, \overline{\lambda_2}\right)$ zwei beliebige Fahnen sind,
dann existiert genau eine Bewegung, die $\left(0_1, \overline{\ell_1}, \overline{\lambda_1}\right)$ auf $\left(0_2, \overline{\ell_2}, \overline{\lambda_2}\right)$ abbildet.

III' 5 Zu jeder Strecke $\overline{AB}$ existiert eine Bewegung $\boldsymbol{\tau}$ mit $\boldsymbol{\tau}(A) = B$ und $\boldsymbol{\tau}(B) = A$.

III' 6 Zu jedem Winkel $\angle(h, k)$ mit dem Scheitel O existiert eine Bewegung τ
mit $\boldsymbol{\tau}(O) = O$, $\boldsymbol{\tau}(\bar{h}) = \bar{k}$ und $\boldsymbol{\tau}(\bar{k}) = \bar{h}$.

IV Stetigkeitsaxiome

IV 1 (Archimedisches Axiom)

Zu zwei beliebigen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{C_o D_o}$ (mit $\overline{AB} < \overline{C_o D_o}$) existiert stets eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Punkte $C_1, C_2, \cdots, C_n$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \overline{C_o D_o}^+$

(2) $\overline{C_i C_{i+1}} \cong \overline{AB}$ für $i = 0, 1, 2, ..., n-1$

(3) C_i zwischen C_{i-1}, C_{i+1} ($i = 1, 2, ..., n-1$)

(4) D_o zwischen C_o, C_n, aber D_o nicht zwischen C_o, C_{n-1}

Anschaulich: Jede (noch so große) Strecke $\overline{C_o D_o}$ läßt sich durch eine endliche Anzahl von Abtragungen einer (noch so kleinen) Strecke $\overline{AB}$ "ausmessen":

IV 2 (Vollständigkeitsaxiom)

Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl λ gibt es eine Strecke $\overline{AB}$, deren Länge gleich dieser Zahl ist: $\ell(\overline{AB}) = \lambda$.

V Parallelenaxiom

Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a.
Dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchsens eine Gerade,
die durch A geht und a nicht schneidet.