Vorlesung Elementargeometrie Sommersemester 2003
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Mathematik und ihre Didaktik
Dr. A. Filler

# Axiomensystem der ebenen euklidischen Geometrie (nach Kolmogorov)

## I. Inzidenzaxiome

I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.

I/2 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

I/3 Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.

I/4 Es existieren (mindestens) drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören.

## II. Abstandsaxiome

II/1 Zu zwei beliebigen Punkten $A$ und $B$ gibt es eine nichtnegative reelle Zahl $d$ mit $d = 0$ gdw. $A = B$.
(Diese Zahl wird als Abstand $|AB|$ der Punkte $A$ und $B$ bezeichnet.)

II/2 Für zwei beliebige Punkte $A$ und $B$ gilt $|AB| = |BA|$.

II/3 Für drei beliebige Punkte $A$, $B$ und $C$ gilt $|AB| + |BC| \geq |AC|$.
Falls $A$, $B$ und $C$ auf einer Geraden liegen, so gilt eine der drei Gleichungen
$|AB| + |BC| = |AC|$,
$|AC| + |CB| = |AB|$,
$|BA| + |AC| = |BC|$;
ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so liegen $A$, $B$ und $C$ auf einer Geraden.

## III. Anordnungsaxiome

III/1 Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $a$ und jedem Punkt $O$ der Ebene existiert auf jedem Strahl mit dem Anfangspunkt $O$ genau ein Punkt $A$ mit $|OA| = a$.

III/2 Eine beliebige Gerade $g$ teilt die Menge der ihr nicht angehörenden Punkte der Ebene in zwei nichtleere, disjunkte Mengen derart, dass

a) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die verschiedenen Mengen angehören, die Gerade $g$ schneidet und

b) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die derselben Menge angehören, die Gerade $g$ nicht schneidet.

## IV. Bewegungsaxiom

Def.: Als **Bewegungen** werden Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnet, die Abstände beliebiger Punktepaare unverändert lassen.

IV. Wenn der Abstand zweier Punkte $A$ und $B$ positiv und gleich dem Abstand zweier Punkte $C$ und $D$ ist, dann gibt es genau zwei Bewegungen, die $A$ auf $C$ und $B$ auf $D$ abbilden. Eine Halbebene bezüglich der Geraden $AB$ wird bei jeder dieser beiden Bewegungen auf eine andere Halbebene bezüglich $CD$ abgebildet.

Def.: Zwei Punktmengen $M_1$ und $M_2$ heißen zueinander **kongruent**, falls eine Bewegung existiert, die $M_1$ auf $M_2$ abbildet.

## V. Parallelenaxiom

V. Zu jeder Geraden $g$ und zu jedem nicht auf $g$ liegenden Punkt $A$ gibt es höchstens eine Gerade, die durch $A$ verläuft und zu $g$ parallel ist.