Numerische Simulation von Differential-Gleichungen der Himmelsmechanik

Teilnehmer:
Max Dubiel (Andreas-Oberschule)
Frank Essenberger (Herder-Oberschule)
Constantin Krüger (Andreas-Oberschule)
Gabriel Preuß (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Arne Schilling (Herder-Oberschule)
Felix Willamowski (Andreas-Oberschule)

Gruppenleiter:
André Backes (Humboldt-Universität)

Die Gruppe beschäftigte sich am Beispiel der Bewegung eines Planeten um die Sonne mit dem grundlegenden Prozess, ein physikalisches Phänomen mathematisch zu analysieren mit dem Ziel einer Simulation am Computer. Wir beschäftigten uns zunächst mit dem grundlegenden Begriff der Differential-Gleichung und lernten mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren an einfachen Beispielen eine erste Möglichkeit kennen, Differential-Gleichungen auch numerisch mit Hilfe des Computers zu lösen. Dann beschäfigten wir uns intensiver mit dem Differentialgleichungssystem, welches die Bewegung eines Planeten um die Sonne beschreibt und welches aus dem Gravitations-Gesetz von Newton abgeleitet werden kann. Wir mussten einsehen, dass die numerische Lösung der Planeten-Gleichung mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens hier eine nicht zufriedenstellende Lösung liefert. Wir überlegten zusammen, wie wir unser numerisches Verfahren verbessern könnten. Somit kamen wir auf das symplektische Euler-Verfahren, welches für unser Problem einfach programmiert werden kann und dennoch ein wesentlich besseres Resultat liefert. Schließlich wollten wir verstehen, warum das symplektische Euler-Verfahren hier so gute Ergebnisse erzielt. Wir haben gelernt, dass das Differentialgleichungssystem des Planeten ein sogenanntes Hamilton-System ist und dass ein symplektisches Verfahren sehr gut zu der Hamiltonschen Struktur der Differentialgleichung passt. Die zur Differentialgleichung gehörige Hamilton-Funktion haben wir benutzt, um die berechneten

Näherungslösungen für die Bahn des Planeten und somit die Qualität des numerischen Verfahrens zu bewerten.

1 Differentialgleichungen

Definition 1 *Besteht zwischen einer Funktion und einer ihrer Ableitungen eine Beziehung in der Gestalt einer Gleichung, in der auch die unabhängigen Veränderlichen noch vorkommen können, so spricht man von einer Differentialgleichung.*

Beispiel 1 *zum Lösen einer Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} x' = x \qquad x(0) &= x_0 \\ \frac{x`}{x} &= 1 \\ \int \frac{x'}{x} &= \int 1dt \\ ln(|t|) + c = t \qquad c &\in \mathbb{R} \\ |x| + e^c &= e^t \\ |x| &= e^t * \frac{1}{e^c} \\ x(t) &= \frac{1}{e^c} e^t \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{e^c}$ konstant ist, folgern wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_0 e^t.$$

2 Numerische Verfahren zur Lösung einer Differential-Gleichung

Wir betrachten eine Differential-Gleichung der Form

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

und wollen diese mit einem numerischen Verfahren lösen. Dazu betrachten wir diskrete Zeitpunkte

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

aus dem Zeitintervall $I = [0, \infty[$, an denen wir die Funktionswerte der Lösung berechnen wollen. Unser Ziel ist es, Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ für die Funktionswerte $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \ldots$ zu berechnen. Eine Möglichkeit ist es, die Zeitpunkte äquidistant zu wählen, das heißt, es ist

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Schrittweite h nennen wir auch Diskretisierungs-Schrittweite.

Als Idee für ein numerisches Verfahren wollen wir die Ableitung der Lösung $x(t)$ an der Stelle t_i durch einen Differenzen-Quotienten approximieren. Wir nehmen an

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h}$$

also

$$f(x(t_i)) \approx \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h}$$

Aus diesem Ansatz entnehmen wir die Verfahrens-Vorschrift

$$f(x_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i + hf(x_i)$$

Wir erhalten damit das sogenannte explizite Euler-Verfahren

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Als Abwandlung dieses Verfahrens überlegen wir uns, dass der Differenzen-Quotient auch eine Approximation an die Ableitung der Lösung $x(t)$ an der Stelle t_{i+1} ist. Dann haben wir

$$\dot{x}(t_{i+1}) \approx \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h}$$

also

$$f(x(t_{i+1})) \approx \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h}$$

Aus diesem Ansatz entnehmen wir die Verfahrens-Vorschrift

$$f(x_{i+1}) = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i + hf(x_{i+1})$$

Wir erhalten damit das sogenannte implizite Euler-Verfahren

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Aufgabe:
Betrachte die Differential-Gleichung

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = x_0$$

Betrachte die explizite Lösung und überlege dir, dass

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

gilt. Zur numerischen Lösung der Gleichung betrachte eine Diskretisierungs-Schrittweite h und untersuche, welche Werte das explizite und das implizite Euler-Verfahren liefert.
Untersuche die Frage, ob für die Werte x_i der beiden Verfahren auch die Eigenschaft

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$$

gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
x' &= -x & x \neq 0 \\
\frac{x'}{x} &= -1 \\
\int \frac{x'}{x} dt &= \int 1 dt \\
ln(|x|) &= t + c & c \,\epsilon\, \mathbb{R} \\
|x| &= e^{(t+c)} \\
|x| &= \frac{e^c}{e^t} \\
\lim_{x\to\infty} (|x(t)|) &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^c}{e^t} \\
\lim_{x\to\infty} (|x(t)|) &= 0
\end{aligned}$$

explizites Verfahren:

$$\begin{aligned}
x_{i+1} = x_i + hf(x_i) &= x_i - hx_i \\
= (1-h)x_i &= (1-h)^i x_0
\end{aligned}$$

$\lim_{i\to\infty} (x_{i+1}) = \lim_{i\to\infty} ((1-h)^{i+1} x_0) = 0$ gilt genau dann, wenn $(1-h)$ vom Betrage her kleiner als 1 ist. Somit muss gelten $|1-h| < 1 \Rightarrow 0 < h < 2$.

implizites Verfahren:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} = x_i + hf(x_{i+1}) &= x_i - hx_{i+1} \\
(1+h)x_{i+1} &= x_i \\
x_{i+1} = \frac{1}{h+1}x_i &= \left(\frac{1}{h+1}\right)^{i+1} x_0
\end{aligned}
$$

$\lim_{i\to\infty} x_{i+1} = \lim_{i\to\infty} (\frac{1}{h+1})^{i+1} x_0 = 0$ gilt genau dann, wenn $(\frac{1}{h+1})$ vom Betrage her kleiner als 1 ist. Da $h > 0$ bereits in den Voraussetzungen festgelegt ist, gilt somit $|(\frac{1}{h+1})| < 1 \Rightarrow h > 0$. Man erkennt sofort, dass beim impliziten Euler-Verfahren keine Einschränkungen für die Schrittweite h bestehen und man hat einen Anhaltspunkt, dass dieses Verfahren besser als das explizitie Euler-Verfahren sein könnte.

3 Die Differentialgleichung zur Berechnung der Planetenbewegung

Um die Berechnung der elliptischen Bahnen von Planeten vornehmen zu können, ist ein Gleichungssystem notwendig, das alle erforderlichen Komponenten enthält. Daher wählten wir als Ausgangspunkt das Gravitationgesetz

$$\vec{F} = -\frac{\gamma M m}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Mit Zerlegung der Kraft sowie der Richtung in ihre Komponenten erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = -\frac{\gamma M m}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Durch die Nutzung des Grundgesetzes der Mechanik, welches besagt, dass $\vec{F} = m\vec{a}$ und die 2. Ableitung vom Weg nach der Zeit gleich der Beschleunigung ist, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = -\frac{\gamma M}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} x \\[2ex]
\ddot{y} = -\frac{\gamma M}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} y
\end{cases}
$$

Da wir nun ein Differentialgleichungssystem (DGS) 2. Ordnung haben, welches wir nicht lösen können, haben wir uns einen kleinen ,,Trick” überlegt, wodurch wir dieses Gleichungsystem zu einem System 1. Ordnung umwandeln:

$$\begin{cases} v = \dot{x} \\ w = \dot{y} \\ \dot{v} = \ddot{x} \\ \dot{w} = \ddot{y} \end{cases}$$

Durch Einsetzen unserer Gleichungen erhalten wir somit das 4-dimensoniale Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Wobei $\gamma \cdot M$ für die Lösung des DGS keine Rolle spielt und deshalb vernachlässigt wird.

$$\begin{cases} \dot{v} &= -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ \dot{w} &= -\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ \dot{x} &= v \\ \dot{y} &= w \end{cases}$$

Dieses DGS wäre nun konkret zu lösen. Da dies jedoch ziemlichen Aufwand bedeuten würde, wollen wir es ,,nur" numerisch lösen. Durch die bereits im Vorherigen beschriebenen numerischen Verfahren besitzen wir auch die nötigen Mittel für dieses Unterfangen. Somit passen wir die Euler-Verfahren unserem Problem an und erhalten folgende Verfahrens-Vorschriften:

$$explizit \begin{cases} v_{i+1} &= v_i - h\frac{x_i}{(\sqrt{x_i^2+y_i^2})^3} \\ w_{i+1} &= w_i - h\frac{y_i}{(\sqrt{x_i^2+y_i^2})^3} \\ x_{i+1} &= x_i + hv_i \\ y_{i+1} &= y_i + hw_i \end{cases}$$

$$implizit \begin{cases} v_{i+1} &= v_i - h\frac{x_{i+1}}{(\sqrt{x_{i+1}^2+y_{i+1}^2})^3} \\ w_{i+1} &= w_i - h\frac{y_{i+1}}{(\sqrt{x_{i+1}^2+y_{i+1}^2})^3} \\ x_{i+1} &= x_i + hv_{i+1} \\ y_{i+1} &= y_i + hw_{i+1} \end{cases}$$

Nach der Entwicklung dieser Verfahren ließen wir die Ergebnisse am Computer grafisch darstellen und stellten fest, dass selbst bei optimalen Werten das explizite Euler-Verfahren einen zunehmenden Fehler aufwies, der zur Folge hatte, dass der Planet von seiner Bahn ins Unendliche abdriftete (siehe Anhang). Da uns das implizite Verfahren zu schwer zu lösen war (es ist ein nichtlineares 4-dimensionales GLS 1. Ordnung, welches durch das Newton-Verfahren hätte gelöst werden können), entwickelten wir somit eine neue Methode, welche aus einer Kombination des expliziten und implizitien Euler-Verfahrens entstand.

Dieses Verfahren heißt symplektisches Euler-Verfahren und lieferte deutlich bessere Werte (siehe Anhang).

$$symplektisch \begin{cases} v_{i+1} &= v_i - h\frac{x_i}{(\sqrt{x_i^2+y_i^2})^3} \\ w_{i+1} &= w_i - h\frac{y_i}{(\sqrt{x_i^2+y_i^2})^3} \\ x_{i+1} &= x_i + hv_{i+1} \\ y_{i+1} &= y_i + hw_{i+1} \end{cases}$$

Die Visualisierung der verschiedenen numerischen Verfahren hielten wir nicht für ausreichend, so dass wir eine mathematische Kontrolle für die Qualität der verschiedenen Verfahren entwickelten. Dabei stießen wir ,,zufällig" auf die sogenannte Hamilton-Funktion, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$H(x;y) \in \mathbb{R} \qquad H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -\dot{x} = \frac{dH}{dy}(x;y) & x \in \mathbb{R}^n \\ \\ \dot{y} = \frac{dH}{dx}(x;y) & y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Diese Eigenschaften der Hamilton-Funktion führen zu einer Besonderheit, die in unserem Fall natürlich sehr von Vorteil ist:
Wir setzen eine Lösung des DGS in die Hamilton-Funktion ein und leiten diese ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[H(x(t);(y(t))] &= \frac{dH}{dt}\Big(x(t);(y(t)\Big) \cdot \dot{x}(t) + \frac{dH}{dy}\Big(x(t);(y(t)\Big) \cdot \dot{y}(t) \\ &= \dot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{x}(t)\dot{y}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wie man erkennen kann, ist die Hamilton-Funktion somit für alle Lösungen des DGS konstant, da die erste Ableitung der Hamilton-Funktion gleich 0 ist. Da diese Konstante durch die Startwerte x_0, w_0 festgelegt wird, haben wir eine Möglichkeit, die Qualität unserer numerischen Verfahren zu bestimmen. Dazu müssen wir die zugehörige Hamilton-Funktion für unser Beispiel bestimmen und die jeweiligen Werte in diese Funktion einsetzen. Daher berechnen wir nun unsere benötigte Hamilton-Funktion:

$$\begin{cases} \dot{v} &= -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = -\frac{dH}{dx} \\ \\ \dot{w} &= -\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = -\frac{dH}{dy} \\ \\ \dot{x} &= v = \frac{dH}{dv} \\ \\ \dot{y} &= w = \frac{dH}{dw} \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen lässt sich unsere Hamilton-Funktion ganz einfach bilden:

$$H(x, y, v, w) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Physikalisch gesehen gibt uns die Hamilton-Funktion die gesamte Energie des Systems an und muss deshalb auch nach dem Energieerhaltungssatz konstant sein.

4 Symplektische Abbildungen $\leftrightarrow$ symplektisches Euler-Verfahren

Im $\mathbb{R}^2$ ordnet eine symplektische Abbildung einer Fläche A einer Fläche B zu, die den selben Flächeninhalt hat. Diese Eigenschaft ist analog zu dem zweiten Keplerschen-Gesetz: In selben Zeiten werden gleich große Flächen überstrichen (siehe Anhang). Unsere Iterationsvorschrift ist also symplektisch und wird deshalb symplektisches Eulerverfahren genannt.

Anhang