Kurven

Zusammenhänge und Lösungsverfahren

Teilnehmer:

Lisa Fritsche	Andreas-Oberschule, Berlin
Lukas Gehring	Geschwister-Scholl-Gymnasium, Löbau
Roland Pugliese	Herder-Oberschule, Berlin
Julian Risch	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Daniel Ritter	Gymnasium Tegernsee, Tegernsee
Andrei Sterin	Theodor-Heuss-Gymnasium, Hagen

Gruppenleiter:

Andreas Filler	Humboldt-Universität zu Berlin
Carsten Falk	Humboldt-Universität zu Berlin

Kurven sind schön und ihre Eigenschaften sind mathematisch interessant.

Durch Parameterdarstellungen lassen sich Kurven beschreiben, deren graphische Darstellung vielfältige Formen zutage fördert. Wenn der Parameter dabei als Zeit interpretiert wird, lassen sich zudem Animationen erstellen, auf die jedoch in diesem Bericht verzichtet werden muss.

Ansonsten werden im Folgenden Kurveneigenschaften wie die Bogenlänge oder Tangentialvektoren betrachtet. Die Krümmung von Kurven spielte in unserer Gruppe ebenso eine Rolle wie auch zyklische Kurven (Zykloiden).

1 Parameterdarstellungen von Kurven

1.1 Einige Beispiele

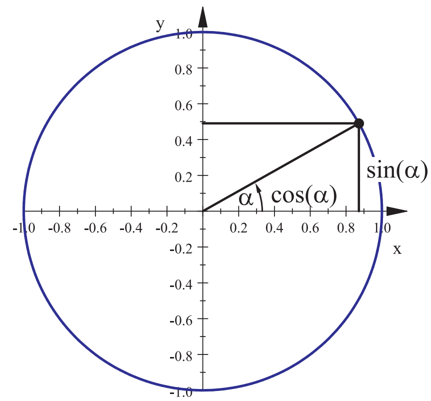
1.1.1 Der Einheitskreis

Ausgehend vom Einheitskreis, bei dem $r = 1$ gilt, entspricht

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \mathrel{\widehat{=}} x$$
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \mathrel{\widehat{=}} y$$

Ein Punkt auf dem Kreisbogen hat die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= r \cdot \cos(\alpha) \\ y(\alpha) &= r \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \qquad \alpha \in [0; 2\pi)$$



Das r deutet darauf hin, dass es sich bereits um eine Verallgemeinerung der Formel handelt.

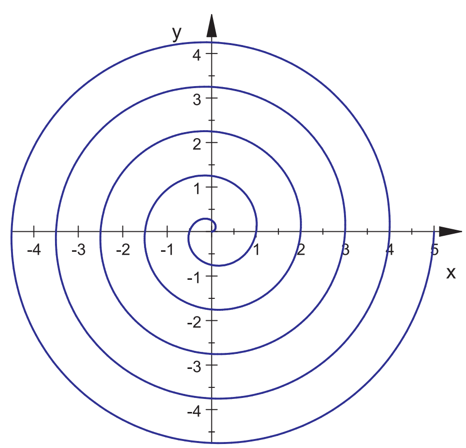
Durch Ersetzen von α durch $2\pi t$ erhält man eine andere Parametrisierung, wobei t der Zeit entspricht und physikalisch betrachtet der Vorgang ist, bei dem in $I = [0; 1)$ durch eine Menge von Punkten ein Kreis im mathematisch positiven Sinn aufgebaut wird.

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned} \qquad t \in [0; 1)$$

1.1.2 Archimedische Spirale

Durch Veränderung der Radiusfunktion in Abhängigkeit von t entstehen weitere Gebilde. Setzt man beispielsweise $r(t) = r_0 \cdot t$ entsteht die Archimedische Spirale. Für $t = [0, \infty)$ wird die Spirale unendlich lang, wobei der Windungsabstand konstant bleibt.

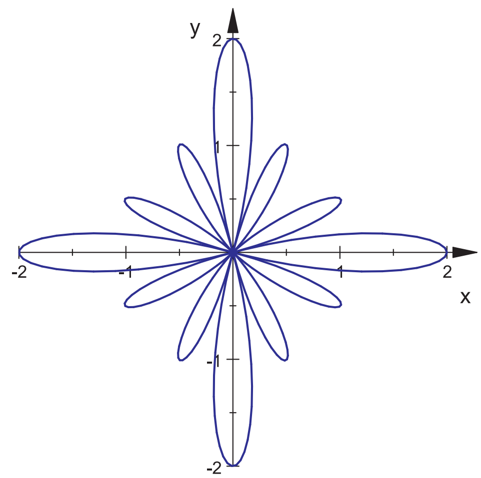
$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot t \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r \cdot t \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned} \qquad t \in [0; \infty)$$



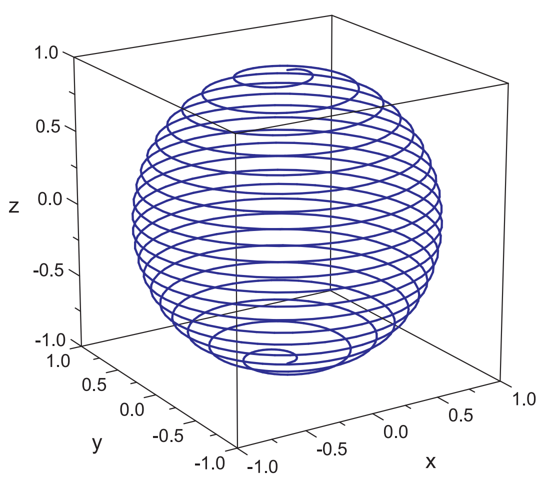
1.1.3 Weitere Beispiele

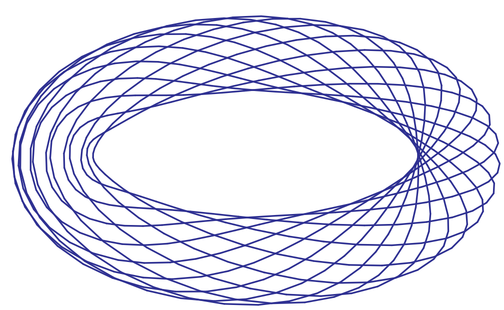
Hier eine besonders schöne Blume, die durch Zusammensetzen trigonometrischer Funktionen als Radiusfunktion entstanden ist.

$$\begin{aligned} x(t) &= (\cos(8\pi t) + \cos(16\pi t)) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= (\cos(8\pi t) + \cos(16\pi t)) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$



Auch dreidimensionale Gebilde sind möglich. Dazu wird eine dritte Funktion z(t) benötigt. Zwei Beispiele:





$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\sqrt{1-\tfrac{t}{10}}\right)^2 \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= \left(\sqrt{1-\tfrac{t}{10}}\right)^2 \cdot \sin(2\pi t) \\ z(t) &= \frac{t}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= (5+\sin(42\pi t))\cos(26\pi t) \\ y(t) &= (5+\sin(42\pi t))\sin(26\pi t) \\ z(t) &= \cos(42\pi t) \end{aligned}$$

1.2 Jordan-Kurve

Im Folgenden seien nun einige Begriffe genau definiert.

Eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Jordan-Kurve*, wenn folgendes gilt:

- Es gibt ein $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $C = \mathrm{im}(f)$,
- f ist stetig in I.

C heißt *regulär*, falls für eine Parametrisierung f gilt:
$f'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in I$

1.3 Tangentenvektoren

Sei $f(t)$ eine Parametrisierung einer Kurve. Dann gilt:

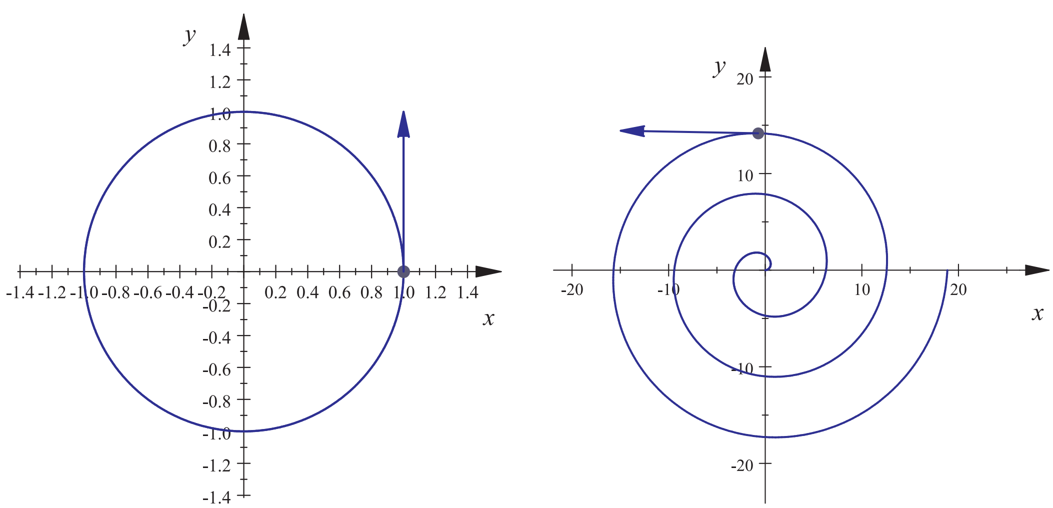
$$f'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Es gilt:

$$f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung ist hierbei ein Vektor. Der Ableitungsvektor steht tangential zur Kurve.

Tangentenvektor an Kreis und Spirale



1.4 Die Bogenlänge

Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve, $I = (t_a, t_e) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $t_0, \ldots, t_n$ eine Einteilung von I mit $t_{i+1} - t_i = t_{j+1} - t_j$ für alle i, j. Dann gilt für die Bogenlänge S:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Es gilt $s'(t) = |f'(s)|$.

Man bezeichnet eine Parametrisierung einer Funktion f als Parametrisierung nach der Bogenlänge, wenn $|f'(s)| = 1$ für alle s.

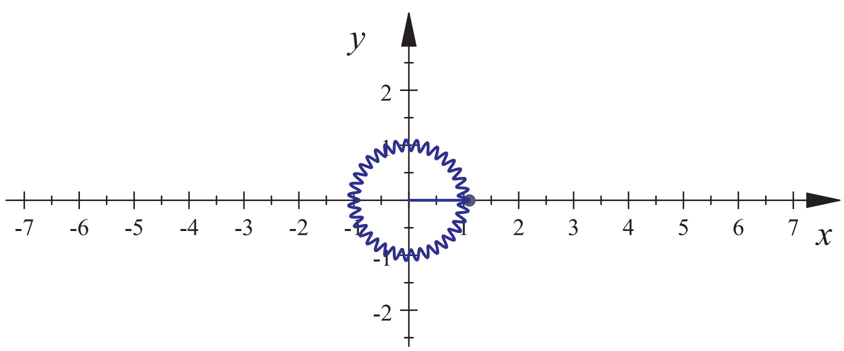
Gilt $|f'(s)| = 1$, so folgt: Die Bogenlänge zwischen $f(s_1)$ und $f(s_2)$ beträgt $s_2 - s_1$.

2 Zykloiden

2.1 Abrollen eines Kreises auf einer Ebene

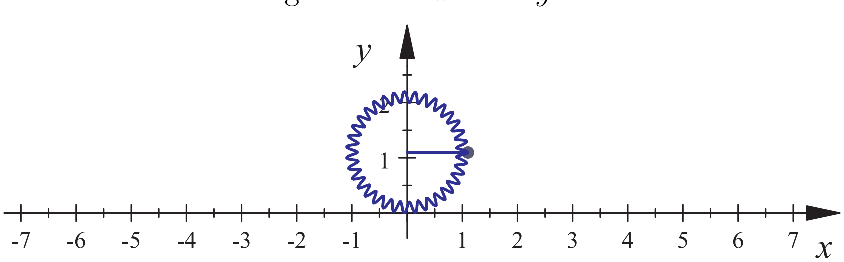
Unter einer Zykloiden versteht man diejenige Kurve, die ein Punkt auf einem abrollenden Kreis beschreibt.

Um diese Kurve zu parametrisieren, beginnen wir zunächst mit der bereits bekannten Parameterdarstellung des Kreises und simulieren dessen Rotation durch die Bewegung des betreffenden Punktes auf dessen Umfang, also auf der parametrisierten Kurve. Im Folgenden sei stets $t \in [0; 1[$.



$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Um den Kreis, dessen Mittelpunkt sich durch oben genannte Parameterdarstellung im Koordinatenursprung befindet, später seine Rollbewegung oberhalb der x-Achse vollführen zu lassen, addieren wir zunächst jeweils die Koordinaten des Mittelpunktes zu den bereits gennanten x- und y-Koordinaten des Punktes:



$$\begin{aligned} x(t) &= x_m + r \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= y_m + r \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

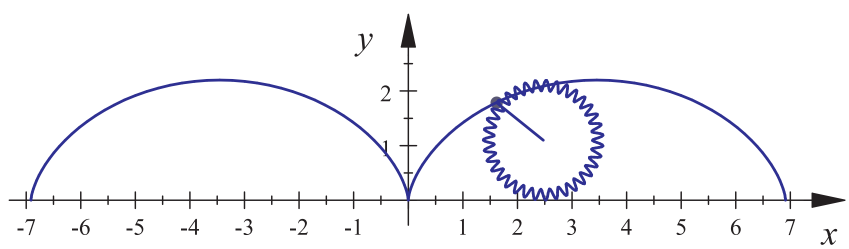
Doch wie verändern sich x_m und y_m während der Rollbewegung, durch welche Funktionen werden sie beschrieben?

Offensichtlich bleibt y_m während des Abrollens konstant und in unserem Beispiel, in dem sich der Kreis auf der x-Achse abrollt, gleich dem Radius r des Kreises. Da die Geschwindigkeit des Kreises über den ganzen Vorgang konstant ist, wird leicht ersichtlich, dass x_m proportional zu t sein muss. Zieht man des Weiteren in Betracht, dass während einer kompletten Umdrehung der Kreis und somit auch dessen Mittelpunkt eine Strecke von $2\pi r$ zurücklegt, ergeben sich folgende Koordinatenfunktionen :

$$\begin{aligned} x_m(t) &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \\ y_m(t) &= r \end{aligned}$$

Da sich der Punkt zum Abrollen in positive x-Richtung jedoch im Uhrzeigersinn, folglich also im mathematisch negativen Sinn drehen muss, muss vor dem Kosinus-Term ein negatives Vorzeichen stehen. Außerdem muss eine Phasenverschiebung von $-\pi/2$ sowohl bei $x(t)$ als auch bei $y(t)$ eingefügt werden, damit der Punkt seine Bahn am „untersten“ Punkt des Kreises beginnt und nicht wie bisher „ganz rechts“. Es ergibt sich folgende Parametrisierung der Zykloide:

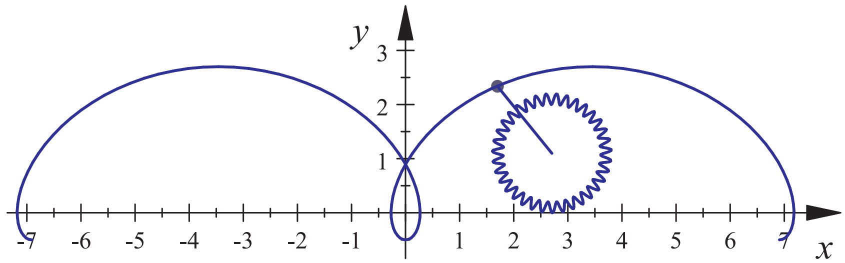
$$\begin{aligned} x(t) &= x_m - r \cdot \cos(2\pi t - \pi/2) \qquad & x_m(t) &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \\ y(t) &= y_m + r \cdot \sin(2\pi t - \pi/2) \qquad & y_m(t) &= r \end{aligned}$$

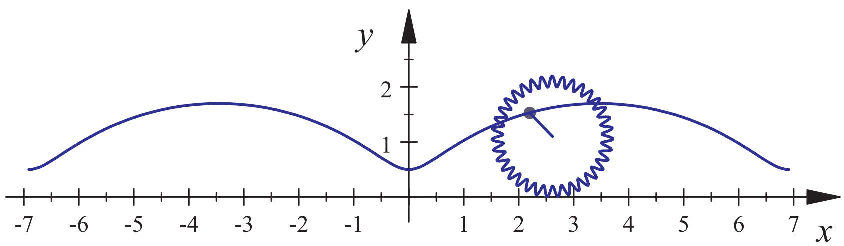


2.2 Weitere Zykloiden

Betrachtet man nun die Bahn eines Punktes außerhalb oder innerhalb des Kreises, müssen die Koordinatenfunktionen so angepasst werden, dass der Faktor r im zweiten Summanden jeweils durch den Abstand R des Punktes zum Kreismittelpunkt ersetzt wird, da sich der veränderte Abstand lediglich auf die Eigenrotation, nicht aber auf die geradlinig gleichförmige Bewegung in x-Richtung auswirkt:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m - R \cdot \cos(2\pi t - \pi/2) \qquad & x_m(t) &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \\ y(t) &= y_m + R \cdot \sin(2\pi t - \pi/2) \qquad & y_m(t) &= \text{const.} \end{aligned}$$





2.3 Epizykloiden

Weiterhin haben wir Zykloiden betrachtet, die beim Abrollen des Kreises auf einer Kreisbahn entstehen. Diese werden als Epizykloiden bezeichnet. In diesem Fall setzen wir $x_m(t) = (R + r) \cdot \cos(2\pi t)$ und $y_m(t) = (R + r) \cdot \sin(2\pi t)$ an, da der Mittelpunkt nun seinerseits eine Kreisbahn mit dem Radius der Summe der beiden Einzelradien beschreibt.

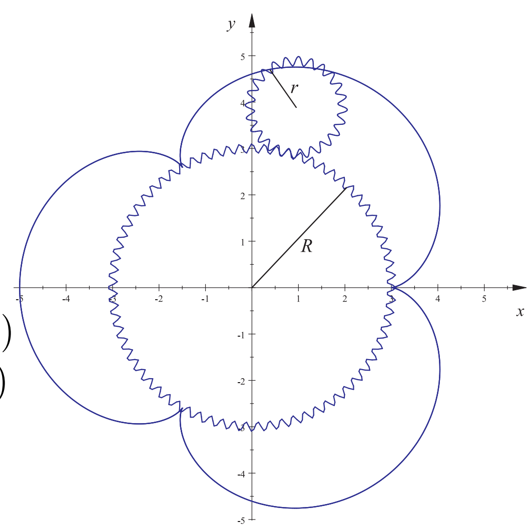
Des Weiteren muss die Rotationsgeschwindigkeit des äußeren Kreises angepasst werden, da der äußere Kreis während seines Umlaufs mehr als eine Rotation vollführt. Der benötigte Faktor ist das Verhältnis des Umfangs der Mittelpunktsbahn zu dem des äußeren Kreises, also

$$\frac{2\pi(r+R)}{2\pi r} = \frac{R}{r} + 1 \; .$$

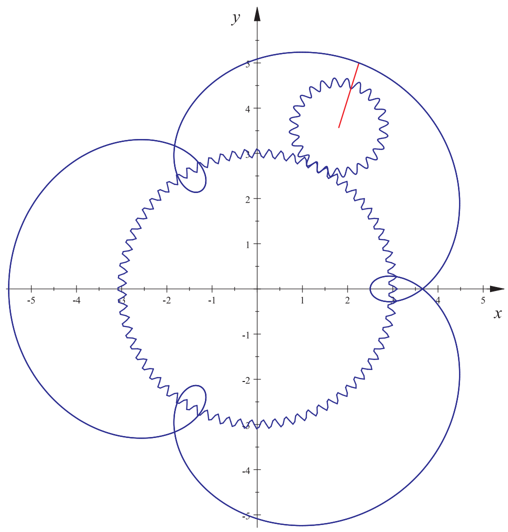
Da der Punkt auf der linken Seite des äußeren Kreises zu rotieren beginnt und wir daher eine Phasenverschiebung von $-\pi$ benötigen, ergibt sich folgende Parametrisierung der Epizykloiden:

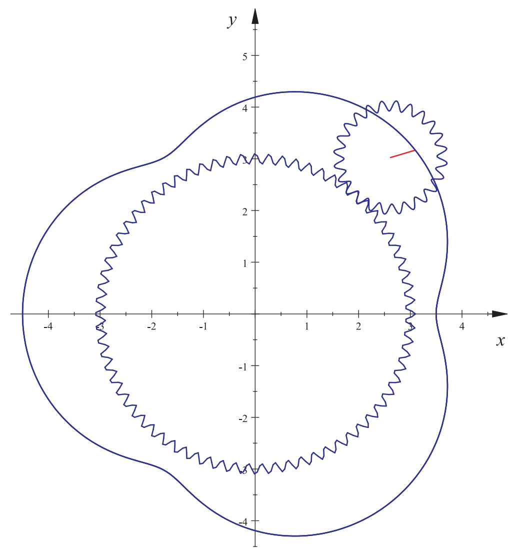
$$\begin{aligned} x(t) &= x_m + r \cdot \cos\left(\left(\tfrac{R}{r} + 1\right) \cdot 2\pi t - \pi\right) \\ y(t) &= y_m + r \cdot \sin\left(\left(\tfrac{R}{r} + 1\right) \cdot 2\pi t - \pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_m(t) &= (R + r) \cdot \cos(2\pi t) \\ y_m(t) &= (R + r) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$



Weitere Epizykloiden





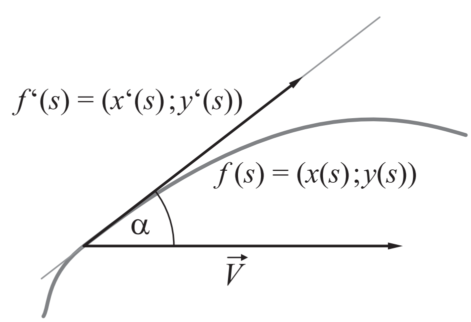
3 Krümmung und weitere interessante Kurven

3.1 Die Krümmung ebener Kurven

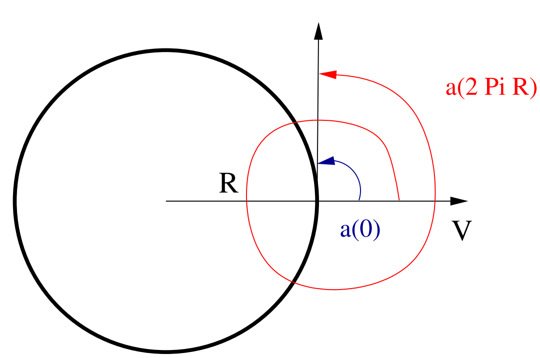
Ist $f(s)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, dann ist die Krümmung

$$k(s) := \alpha'(s).$$

Dabei ist $\alpha(s)$ der Winkel zwischen einem beliebig, aber fest gewählten Vektor $\vec{V}$ und $f'(s)$.



$$\begin{aligned} k &= \text{konstant} \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi R} k\ ds &= \int_0^{2\pi R} \alpha'(s) ds \\ \Leftrightarrow 2\pi R \cdot k &= \alpha(2\pi R) - \alpha(0) \\ &= 2\pi \\ \Leftrightarrow k &= \tfrac{1}{R} \end{aligned}$$



3.1.1 Allgemeine Formel zur Berechnung der Krümmung

Zunächst noch ein Hilfssatz:

$$\begin{array}{rrcl}
 & |f'(s)| & = & 1 \\
\Leftrightarrow & f'(s)^2 & = & 1 \\
\Rightarrow & 2 \cdot f'(s) \cdot f''(s) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & f'(s) \cdot f''(s) & = & 0 \\
\Rightarrow & f'(s) & \perp & f''(s) \\
\Rightarrow & \cos(\angle(f''(s), \vec{V})) = \frac{<f''(s), \vec{V}>}{|f''(s)|} & = & \sin\alpha \quad (1)
\end{array}$$

Nun wird der aus der Formel für das Skalarprodukt gewonnene $\cos\alpha$ abgeleitet, wobei hier erwähnt sei, dass man Skalarprodukte mit einem konstanten Vektor wie Produkte mit konstanten Faktoren differenziert.

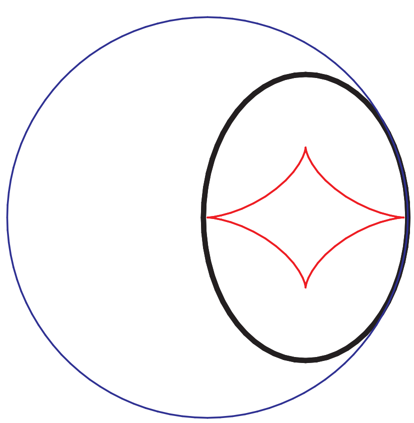
$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{< f'(s), \vec{V} >}{|f'(s)| \cdot |\vec{V}|} \\
&= < f'(s), \vec{V} > \\
\Rightarrow \sin\alpha \cdot \alpha' &= < f''(s), \vec{V} > \quad \Big| : \sin\alpha \\
\alpha' = k(s) &= |f''(s)| \quad \text{(nach (1))}
\end{aligned}$$

Durch die Kettenregel ergibt sich allgemein:

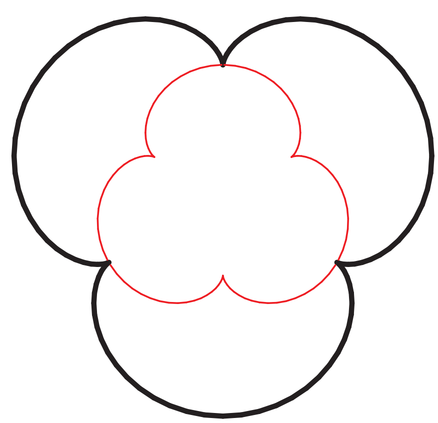
$$k(t) = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.2 Krümmungskreis und Evolute

Für jeden Punkt einer Kurve ist der Krümmungskreis derjenige Kreis, der in diesem Punkt die Kurve berührt und dieselbe Krümmung wie sie besitzt.



Die Evolute einer Ellipse wird Asteroide (Sternenkurve) genannt.



Die Evolute einer (Epi-)Zykloide ist interessanterweise auch eine solche.

3.3 Die Klothoide

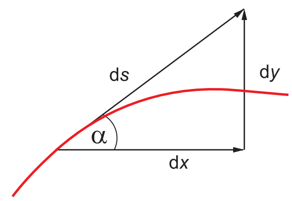
Beim Durchfahren einer Kurve mit dem Auto oder der Bahn soll die Fliehkraft $F_r = m\frac{v^2}{r}$ möglichst gleichmäßig wachsen.

Bei konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$F_r \sim k \Leftrightarrow k = b\,s \overset{k=\alpha'(s)}{\Longleftarrow} \alpha(s) = \frac{b}{2}s^2.$$

Aus der nebenstehenden Skizze geht hervor:

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos\left(\tfrac{b}{2}\,s^2\right) \\ y'(s) &= \sin\left(\tfrac{b}{2}\,s^2\right) \end{aligned}$$



Nochmals integriert sieht das dann aus wie in der folgenden Abbildung.

Bei Straßen, Eisen- und Achterbahnen sind Kurven im Idealfall in dieser Reihenfolge aus Stücken von Gerade, Klothoide, Kreis, Klothoide und Gerade zusammengesetzt, da die Fliehkraft von 0 bis zu einer oberen Schranke linear wachsen, dort konstant bleiben und dann wieder linear abnehmen soll.
Bei konventionellen Geschwindigkeiten ($<$ 160 km/h) werden im Eisenbahnbau auch kubische Parabeln als Kurven verwendet, die einer Klothoide in der Nähe ihres Ursprungs ähneln.