Symmetrie von Ornamenten

Teilnehmer:

Theresa Lechner	Gymnasium Ernestinum, Coburg
Alexey Loutchko	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Dennis Menge	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Simon Reinke	Herder-Oberschule, Berlin
Fynn Strohecker	CJD Christophorusschule, Rostock
Thimo Wellner	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jürg Kramer	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum Matheon „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
Anna v. Pippich	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum Matheon „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Die Beschreibung von Symmetrien ist eine sehr schöne Anwendung der Gruppentheorie und stellt somit eine wunderbare Verbindung zwischen Kunst und Mathematik dar. In unserem Sommerschulkurs haben wir uns mit Symmetrien von Ornamenten beschäftigt. Dabei verstehen wir unter einem Ornament ein periodisches Muster der Ebene:

Die Menge der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Ornaments (Translations- und Drehsymmetrie) besitzt die Struktur einer Gruppe. Man spricht von der Symmetriegruppe eines Ornaments. Wir haben nachgewiesen, dass es überraschenderweise nur fünf verschiedene Symmetriegruppen von Ornamenten gibt.

1 Die Euklidische Bewegungsgruppe

Wir beginnen mit der allgemeinen Definition einer Gruppe.

Definition 1.1. Eine nicht-leere Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ$ heißt *Gruppe*, falls gilt:

(1) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$, so dass $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt.

(2) Für alle $a \in G$ existiert ein inverses Element a^{-1}, so dass $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ gilt.

Im folgenden betrachten wir die Menge aller *längen-* und *winkeltreuen* sowie *orientierungserhaltenden* Abbildungen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.
Diese Abbildungen bestehen aus Translationen (Verschiebungen) und Drehungen.
Die Translation T_v um den Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ verschiebt ein Element $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf

$$x' = T_v x = x + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

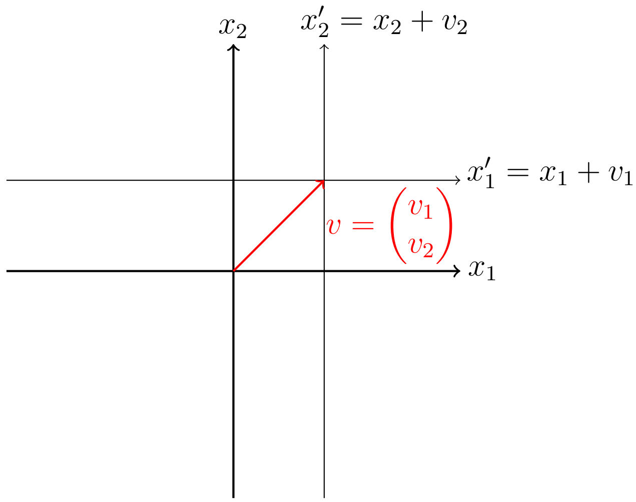


Illustration zur Verschiebung

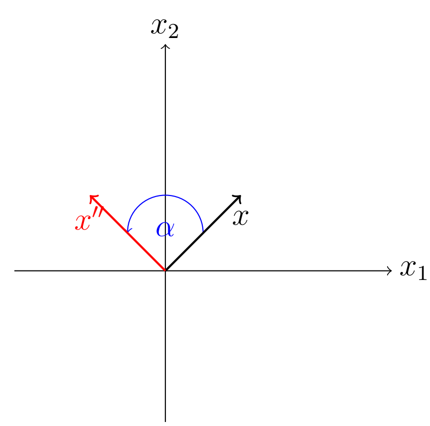


Illustration zur Drehung

Die Drehung D_α dreht x um den Winkel $\alpha \in [0; 2\pi)$ um den Ursprung auf

$$x'' = D_\alpha x = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos\alpha - x_2 \cdot \sin\alpha \\ x_1 \cdot \sin\alpha + x_2 \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
wird im Folgenden mit A_α bezeichnet.

Durch (A_α, v) können wir nun alle längen- und winkeltreuen sowie orientierungserhaltenden Abbildungen der Euklidischen Ebene darstellen, wobei A_α die Drehmatrix für die Drehung um den Ursprung und v der Translationsvektor ist.

Satz 1.1. *Die Menge*
$$G := \left\{(A_\alpha, v) \,\middle|\, \alpha \in [0, 2\pi), v \in \mathbb{R}^2\right\}$$
kann zu einer Gruppe, der Euklidischen Bewegungsgruppe, gemacht werden.

Beweis. Wir definieren die Verknüpfung zweier Elemente (A_α, v) und (A_β, w) wie folgt:
$$(A_\beta, w) \circ (A_\alpha, v) = (A_{\alpha+\beta}, A_\beta v + w).$$
Als nächstes zeigen wir, dass diese Verknüpfung assoziativ ist. Wir haben einerseits
$$\begin{aligned} (A_\gamma, z) \circ \big((A_\beta, w) \circ (A_\alpha, v)\big) &= (A_\gamma, v) \circ (A_{\alpha+\beta}, A_\beta v + w) \\ &= (A_{\alpha+\beta+\gamma}, A_{\beta+\gamma} v + A_\gamma w + z). \end{aligned}$$
Andererseits berechnen wir
$$\begin{aligned} \big((A_\gamma, z) \circ (A_\beta, w)\big) \circ (A_\alpha, v) &= (A_{\beta+\gamma}, A_\gamma w + z) \circ (A_\alpha, v) \\ &= (A_{\alpha+\beta+\gamma}, A_{\beta+\gamma} v + A_\gamma w + z), \end{aligned}$$
was die Assoziativität bestätigt.

Man überlegt sich leicht, dass das Element $(A_0, 0)$ die Rolle des neutralen Elements spielt.

Wir zeigen schließlich, dass das zu (A_α, v) inverse Element durch $(A_{-\alpha}, -A_{-\alpha} v)$ gegeben ist, denn wir haben
$$\begin{aligned} &(A_\alpha, v) \circ (A_{-\alpha}, -A_{-\alpha} v) = (A_0, -v + v) = (A_0, 0), \text{ und} \\ &(A_{-\alpha}, -A_{-\alpha} v) \circ (A_\alpha, v) = (A_0, A_{-\alpha} v - A_{-\alpha} v) = (A_0, 0). \end{aligned}$$
□

Bemerkung. Eine Drehung $D_{P,\alpha}$ um den Punkt P um den Winkel α lässt sich in G nun wie folgt beschreiben:
$$\begin{aligned} D_{P,\alpha} &= T_v \circ D_\alpha \circ T_{-v} \\ &= (A_0, v) \circ (A_\alpha, 0) \circ (A_0, -v) \\ &= (A_\alpha, v) \circ (A_0, -v) \\ &= (A_\alpha, -A_\alpha v + v). \end{aligned}$$

2 Endliche Gruppen von Bewegungen

Wir beginnen mit der folgenden Definition.

Definition 2.1. Eine *Untergruppe* Γ einer Gruppe $(G, \circ)$ wird aus einer nichtleeren Teilmenge von G gebildet, die bezüglich derselben Verknüpfung $\circ$ wieder eine Gruppe ist und dasselbe neutrale Element hat.

Für das Weitere benötigen wir den Begriff des Fixpunktes.

Definition 2.2. Als *Fixpunkt* einer Untergruppe der Euklidischen Bewegungsgruppe wird ein Punkt der Euklidischen Ebene bezeichnet, der von allen Elementen der Untergruppe festgelassen wird.

Satz 2.1. *Jede endliche Untergruppe Γ der Euklidischen Bewegungsgruppe G hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass die Untergruppe Γ nur Drehungen enthält. Dazu wird angenommen, dass Γ Translationen der Form $T_v = (A_0, v)$ mit $v \neq 0$ enthält. Daraus folgt, dass auch $T_v \circ T_v = (A_0, v) \circ (A_0, v) = (A_0, 2v)$ und somit $T_v \circ \ldots \circ T_v = (A_0, nv)$ mit $n \in \mathbb{N}$ Elemente von Γ sind. Da n alle natürlichen Zahlen durchläuft, enthält Γ unendlich viele Translationen. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass Γ endlich ist. Daher ist die Annahme, dass Γ Translationen enthält, falsch und Γ kann folglich nur Drehungen enthalten.

Nun wird gezeigt, dass Γ nur Drehungen um ein bestimmtes Drehzentrum enthalten kann. Dazu nehmen wir an, dass es in Γ zwei Drehungen $D_1 = (A_\alpha, 0)$ und $D_2 = (A_\beta, -A_\beta v + v) := (A_\beta, w)$ mit verschiedenen Drehzentren 0 und v gibt, wobei $\alpha, \beta \neq 0$ gilt. Wegen $\beta \neq 0$ folgt auch $A_\beta v \neq v$ und somit $w \neq 0$. Aufgrund der Gruppeneigenschaft von Γ liegen $D_1^{-1} = (A_{-\alpha}, 0)$ und $D_2^{-1} = (A_{-\beta}, -A_{-\beta} w)$ ebenfalls in Γ. Wir betrachten jetzt die Verknüpfung

$$
\begin{aligned}
&D_1 \circ D_2 \circ D_1^{-1} \circ D_2^{-1} = \\
&((A_\alpha, 0) \circ (A_\beta, w)) \circ ((A_{-\alpha}, 0) \circ (A_{-\beta}, -A_{-\beta} w)) = \\
&(A_{\alpha+\beta}, A_\alpha w) \circ (A_{-(\alpha+\beta)}, -A_{-(\alpha+\beta)} w) = \\
&(A_0, -w + A_\alpha w).
\end{aligned}
$$

Diese Bewegung ist aber eine Translation, obwohl sie in Γ liegen muss. Da in Γ nur Translationen liegen, deren Verschiebungsvektor der Nullvektor ist, muss $-w + A_\alpha w = 0$ gelten. Daraus folgt $A_\alpha w = w$; wegen $\alpha \neq 0$ folgt $w = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass Γ Drehungen um zwei verschiedene Zentren enthält.

Daher kann Γ nur Drehungen um ein Drehzentrum enthalten. Das Drehzentrum wird von keinem Element aus Γ bewegt und ist somit der Fixpunkt von Γ. □

Satz 2.2. *Jede endliche Untergruppe* Γ *von* G *wird von der Drehung* D_α *erzeugt, wobei* $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *ist.*

Beweis. Sei $(A_\alpha, 0)$ Element von Γ. Daraus folgt, dass $(A_\alpha, 0) \circ (A_\alpha, 0) = (A_{2\alpha}, 0)$ und somit allgemein $(A_{q\cdot\alpha}, 0)$ mit $q \in \mathbb{N}$ in Γ enthalten sind. Da Γ nur endlich viele Bewegungen enthält, muss eine Drehung um ein gewisses Vielfaches von α ein Vielfaches von 2π sein, d.h.

$$q \cdot \alpha = 2\pi \cdot p \Longleftrightarrow \alpha = 2\pi \cdot \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N},\, q \neq 0).$$

Wir zeigen jetzt, dass damit Γ die Drehung $(A_\beta, 0)$ mit $\beta = \frac{2\pi}{q}$ enthält, wenn $(A_\alpha, 0)$ mit $\alpha = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$ in Γ enthalten ist.

Dazu kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass p und q teilerfremd sind. Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus finden sich ganze Zahlen x, y derart, dass

$$x \cdot p + y \cdot q = 1$$

gilt. Durch Multiplikation mit $\frac{2\pi}{q}$ erhält man daraus

$$x \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{q} + 2\pi \cdot y = \frac{2\pi}{q}.$$

Die Drehung um den Winkel $x \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{q}$ entspricht der Drehung um $x \cdot \alpha$ und ist somit in Γ enthalten. Auch die Drehung um $2\pi \cdot y$, die der Nulldrehung entspricht, ist ein Element von Γ. Daher muss auch die Drehung um die Summe der beiden Winkel $\frac{2\pi}{q}$ in Γ enthalten sein. Daraus folgt, dass Γ Drehungen der Form $(A_\alpha, 0)$ mit $\alpha = \frac{2\pi}{q}$ enthält.

Wir betrachten jetzt die in Γ enthaltenen Drehungen mit Winkeln der Form $\frac{2\pi}{q_1}, \ldots, \frac{2\pi}{q_N}$ $(N \in \mathbb{N})$. Nun wird gezeigt, dass eine natürliche Zahl n existiert, die durch jedes q_j $(j \in \{1, \ldots, N\})$ teilbar ist.

Sei n das Maximum von $q_1, \ldots, q_N$. Wir nehmen an, dass es ein q_i $(i \in \{1, \ldots, N\})$ gibt, das kein Teiler von n ist. Daher gilt $\mathrm{kgV}(q_i, n) > n$. Aus dem Euklidischen Algorithmus erhalten wir zwei ganze Zahlen x, y mit

$$x \cdot q_i + y \cdot n = \mathrm{ggT}(q_i, n).$$

Durch Multiplikation mit $\frac{2\pi}{q_i \cdot n}$ erhält man

$$x \cdot \frac{2\pi}{n} + y \cdot \frac{2\pi}{q_i} = 2\pi \cdot \frac{\mathrm{ggT}(q_i, n)}{q_i \cdot n} = \frac{2\pi}{\mathrm{kgV}(q_i, n)}.$$

Die Drehungen um die Winkel $x \cdot \frac{2\pi}{n}$ und $y \cdot \frac{2\pi}{q_i}$ sind Elemente von Γ. Daher muss auch die Drehung um die Summe ihrer Winkel in Γ liegen, also die Drehung um

$\frac{2\pi}{\mathrm{kgV}(q_i,n)}$. Da n das Maximum aller q_j ist und somit $\mathrm{kgV}(q_i,n) \in \{q_1,\ldots,q_N\}$ gilt, muss $n \geq \mathrm{kgV}(q_i,n)$ sein. Da nun aber $n < \mathrm{kgV}(q_i,n)$ ist, folgt daraus ein Widerspruch zu der Annahme, dass q_i kein Teiler von n ist.

Daher sind alle Drehwinkel α der Drehungen in Γ durch ganzzahlige Vielfache von $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ bestimmt. $\square$

3 Pflasterungsuntergruppen

Wir beginnen mit der folgenden Definition.

Definition 3.1. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq G$ heißt *Pflasterungsuntergruppe*, falls eine beschränkte und konvexe Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert, so dass die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\gamma_1(\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}) \cap \gamma_2(\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}) \neq \emptyset \Longrightarrow \gamma_1\mathcal{M} = \gamma_2\mathcal{M}$ für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$;

hierbei bezeichnet $\partial\mathcal{M}$ den Rand von $\mathcal{M}$.

Wir wollen nun zuerst die Teilmenge der Translationen einer Pflasterungsuntergruppe untersuchen. Dazu benötigen wir die folgende Definition.

Definition 3.2. Sei $\Gamma \subset G$ eine Pflasterungsuntergruppe. Dann bezeichne

$$T_\Gamma := \Gamma \cap \{\text{Translationen von } \mathbb{R}^2\} = \Gamma \cap \{T_v \,|\, v \in \mathbb{R}^2\}$$

die Teilmenge der Translationen von Γ, den sogenannten *Translationsanteil von* Γ. Weiter bezeichne

$$D_\Gamma := \Gamma \setminus T_\Gamma$$

alle Drehungen aus Γ ohne den Translationsanteil T_Γ.

Satz 3.1. *Sei $\Gamma \subset G$ eine Pflasterungsuntergruppe und T_Γ ihr Translationsanteil. Dann existieren zwei nicht kollineare Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit der folgenden Eigenschaft:*

$$T_\Gamma = \{T_{mv+nw} = (A_0, m\cdot v + n\cdot w) \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\},$$

d.h. jede Translation von Γ ist eine Translation um den Vektor $m\cdot v + n\cdot w$ für gewisse $m, n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass Γ neben der Identität $\mathrm{id} = (A_0, 0)$ noch weitere Translationen besitzt, d.h., dass

$$T_\Gamma \neq \{\mathrm{id}\}$$

gilt. Wir nehmen im Gegensatz dazu an, dass $T_\Gamma = \{\mathrm{id}\}$ gilt, d.h. Γ bestehe nur aus nicht-trivialen Drehungen. Alle diese Drehungen müssen dann das gleiche Zentrum besitzen; denn wären D_1 und D_2 zwei Drehungen mit verschiedenen Zentren, so ist das Element

$$D_1 \circ D_2 \circ D_1^{-1} \circ D_2^{-1}$$

eine nicht-triviale Translation (siehe Beweis von Satz 2.1), im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit folgt, dass alle Drehungen das gleiche Zentrum besitzen. Dies bedeutet, dass die Menge

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{M}$$

in einem genügend groß gewählten Kreis um dieses Drehzentrum liegt, was der Eigenschaft (i) in der Definition 3.1 widerspricht. Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{R}^2$ nicht nur mit Hilfe von Drehungen vollständig gepflastert werden kann; es muss also $T_\Gamma \neq \{\mathrm{id}\}$ gelten.

Als zweites zeigen wir nun, dass in T_Γ zwei nicht kollineare Vektoren existieren. Im Gegensatz dazu nehmen wir an, dass alle Translationen von T_Γ parallel sind. Ist nun $D \in D_\Gamma = \Gamma \setminus T_\Gamma$ eine beliebige Drehung und $T_v = (A_0, v)$ eine nicht-triviale Translation, so gilt

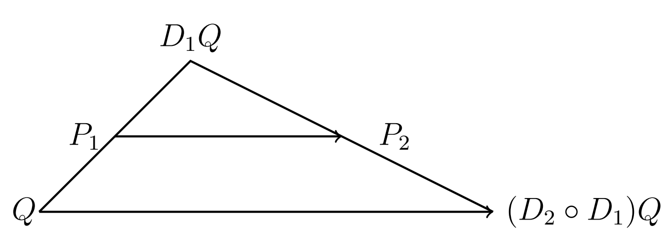
$$D \circ T_v \circ D^{-1} = T_{Dv} \in T_\Gamma,$$

d.h. das Element $D \circ T_v \circ D^{-1}$ ist eine Translation um den Vektor Dv; dies folgt aus der Gleichheit

$$D_\alpha \circ T_v \circ D_{-\alpha} = (A_\alpha, 0) \circ (A_0, v) \circ (A_{-\alpha}, 0) = (A_0, A_\alpha v) = T_{A_\alpha v}$$

für eine Drehung D_α um den Ursprung. Aufgrund der Annahme muss der Vektor Tv parallel zum Vektor v sein und somit ist jede Drehung $D \in D_\Gamma$ eine Drehung um den Winkel π.

Seien nun $D_1, D_2 \in D_\Gamma$ zwei solche Drehungen um den Winkel π mit Drehzentren in den Punkten P_1 bzw. P_2, gegeben durch die Ortsvektoren v_1 bzw. v_2. Weiter sei Q ein Punkt mit dem Ortsvektor w, und es bezeichne $D_1 Q$ den Punkt zum Ortsvektor $D_1 w$ und $(D_2 \circ D_1)Q$ den Punkt zum Ortsvektor $(D_2 \circ D_1)w$:



Das Element $D_2 \circ D_1$ ist eine Translation um den Vektor $2\overrightarrow{P_1P_2}$, welcher parallel zu dem Vektor v sein muss. Damit ist gezeigt, dass die Zentren aller Drehungen aus D_Γ auf einer Geraden liegen, welche parallel zum Vektor v ist. Demnach liegt die Menge

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\mathcal{M}$$

in einem genügend breit gewählten Streifen um diese Gerade, was der Eigenschaft (i) in der Definition 3.1 widerspricht. Also ist unsere Annahme falsch und es existieren in T_Γ zwei nicht kollineare Vektoren.

Es bleibt zu zeigen, dass zwei nicht kollineare Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$T_\Gamma = \{T_{mv+nw} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

existieren. Dazu sei P ein beliebiger Punkt der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Da Γ eine Pflasterungsuntergruppe ist, liegen nur endlich viele Translate γP $(\gamma \in \Gamma)$ von P in einem (genügend groß gewählten) Kreis um P. Wir bezeichnen nun das Translat γP, welches P am nächsten liegt, mit Q und setzen $v := \overrightarrow{PQ}$. Da in T_Γ zwei nicht kollineare Vektoren existieren, ist es möglich, ein weiteres Translat R von P zu wählen, welches ebenfalls minimal von P entfernt ist und die Eigenschaft besitzt, dass die Vektoren $w := \overrightarrow{PR}$ und v nicht kollinear sind. Offensichtlich gilt dann

$$T_\Gamma \supseteq \{T_{mv+nw} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\} \tag{3.1}$$

und für die Gleichheit genügt es, die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Dazu nehmen wir an, dass T_Γ eine echte Obermenge von $\{T_{mv+nw} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ ist, d.h., dass

$$T_\Gamma \supsetneqq \{T_{mv+nw} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\} \tag{3.2}$$

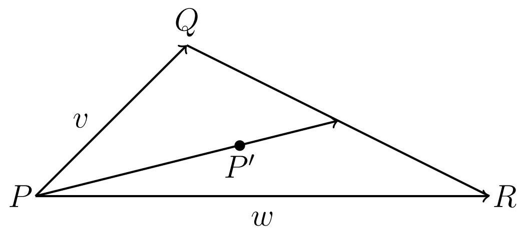
gilt. Wir betrachten nun das Paralellogramm

$$\mathcal{P} = \{P + \lambda v + \mu w \,|\, \lambda, \mu \in [0,1]\};$$

wegen (3.1) gilt

$$\bigcup_{\gamma \in T_\Gamma} \gamma\,\mathcal{P} = \mathbb{R}^2.$$

Aufgrund der Annahme (3.2) muss ein Translat P' von P existieren, welches im Inneren von $\mathcal{P}$ liegt und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass P' in dem Dreieck mit den Eckpunkten P, Q, R liegt.



Damit ist der Abstand von P zu P' kleiner als der Abstand von P zu R, was der Wahl von R widerspricht. Somit kann es ein solches Translat P' von P nicht geben und wir haben bewiesen, dass es zwei nicht kollineare Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$T_\Gamma = \{T_{mv+nw} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

gibt. $\square$

Nachdem wir den Translationsanteil T_Γ einer Pflasterungsuntergruppe Γ untersucht haben, können wir nun beweisen, dass es nur fünf Pflasterungsuntergruppen gibt, indem wir alle Drehungen aus Γ ohne den Translationsanteil T_Γ, d.h. $D_\Gamma = \Gamma \setminus T_\Gamma$, klassifizieren.

Satz 3.2. *Es gibt 5 Typen von Pflasterungsuntergruppen. Die entsprechenden Pflasterungen der Euklidischen Ebene* $\mathbb{R}^2$ *sind in den Figuren 1 bis 5 dargestellt, welche aus [1] entnommen sind.*

Fig. 1

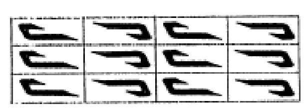


Fig. 2

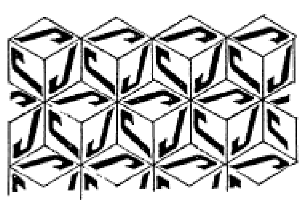


Fig. 3

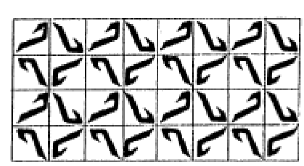


Fig. 4

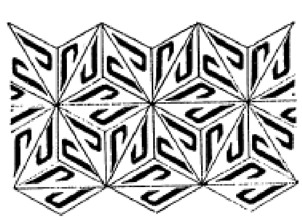


Fig. 5

Beweis. Zunächst wissen wir aufgrund des Satzes 2.2, dass alle Drehungen $D \in D_\Gamma$ Drehungen um einen Winkel der Form $\frac{2\pi}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sind; n wird hierbei auch als Ordnung der Drehung bezeichnet. Wir bestimmen nun die in Frage kommenden Ordnungen der Drehungen $D \in D_\Gamma$. Hierbei unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1 ($D_\Gamma = \emptyset$, d.h. $n = 1$ für alle $D \in D_\Gamma$):

In diesem Fall ist D_Γ die leere Menge und damit ist Γ ausschließlich gleich T_Γ, besteht also nur aus Translationen. Diese Art der Pflasterung der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist in Figur 1 zu erkennen.

Fall 2 ($D \circ D = \mathrm{id}$ für alle $D \in D_\Gamma$):

Im zweiten Fall haben wir also $n = 2$ für jede Drehung, d.h. in der Menge D_Γ sind nur Drehungen um den Winkel π enthalten. Zu den Translationen kommen jetzt noch diese Drehungen hinzu, was die Pflasterung in Figur 2 liefert.

Fall 3 (Es existiert eine Drehung $D_1 \in D_\Gamma$ der Ordnung $n_1 \geq 3$):

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass D_1 eine Drehung mit dem Nullpunkt als Drehzentrum ist, d.h. es gilt

$$D_1 = D_{\alpha_1} = (A_{\alpha_1}, 0) \in D_\Gamma,$$

wobei $\alpha_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ der Drehwinkel und n_1 die Ordnung der Drehung D_1 ist.

Nun wählen wir eine Drehung $D_2 \in D_\Gamma$ der Ordnung $n_2 \geq 3$ derart, dass das Zentrum von D_2 minimal vom Nullpunkt entfernt ist; mit v' bezeichnen wir den Ortsvektor des Drehzentrums von D_2 und mit $\alpha_2 = \frac{2\pi}{n_2}$ den Drehwinkel, d.h. $D_2 = (A_{\alpha_2}, v)$ mit $v := -A_{\alpha_2}v' + v'$. Durch eine kurze Rechnung erhalten wir für die Drehung $D_3 := (D_1 \circ D_2)^{-1}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} D_3 = (D_1 \circ D_2)^{-1} &= ((A_{\alpha_1}, 0) \circ (A_{\alpha_2}, v))^{-1} = (A_{\alpha_1+\alpha_2}, A_{\alpha_1}v)^{-1} \\ &= (A_{-\alpha_1-\alpha_2}, -A_{-\alpha_2}v) = (A_{2\pi-\alpha_1-\alpha_2}, -A_{-\alpha_2}v), \end{aligned}$$

d.h. D_3 besitzt ein Drehzentrum mit dem Ortsvektor $-A_{-\alpha_2}v$. Weiter gilt für den Drehwinkel $\alpha_3 = \frac{2\pi}{n_3}$ dieser Drehung die Formel

$$\alpha_3 \cdot \nu = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 \Longleftrightarrow 2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot \nu \Longleftrightarrow$$

$$2\pi = \frac{2\pi}{n_1} + \frac{2\pi}{n_2} + \frac{2\pi}{n_3} \cdot \nu$$

für ein gewisses $\nu \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass sogar $\nu = 1$ gilt. Denn wäre nämlich $\nu > 1$, so gäbe es eine Drehung $D_2' \in D_\Gamma$ mit einem Drehwinkel kleiner als α_3 und somit wäre das Drehzentrum der Drehung $D_3' := (D_1 \circ D_2')^{-1}$ näher am Nullpunkt als das Drehzentrum der Drehung D_2. Damit muss also $\nu = 1$ gelten und wir erhalten die Schlüsselrelation

$$2\pi = \frac{2\pi}{n_1} + \frac{2\pi}{n_2} + \frac{2\pi}{n_3} \Longleftrightarrow 1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}. \tag{3.3}$$

Aus dieser Relation leiten wir nun die Pflasterungen der Figuren 4, 5, 6 ab. Es gibt nämlich nur vier Möglichkeiten diese Gleichheit (3.3) für n_1, n_2, n_3 wie gegeben zu lösen, wobei die dritte und die vierte Möglichkeit zusammenfallen:

- $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$,
- $n_1 = 4, n_2 = 4, n_3 = 2 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{4}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{2}$,
- $n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 2 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{6}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{2}$,
- $n_1 = 6, n_2 = 3, n_3 = 2 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{2\pi}{6}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{2}$.

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass es nur fünf Typen von möglichen Pflasterungen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ gibt. □

Literatur

[1] M. Berger, Geometry. Band I, II. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[2] J. Kramer, Notizen zur Geometrie I. Vorlesungsskript, ETH Zürich, WS 98/99.