Mathematik und Prognose
Oder Was sind Differentialgleichungen?

Teilnehmer:

Tobias Berchner	Heinrich-Hertz-Oberschule
Tom Günther	Andreas-Oberschule
Stephan Komossa	Herder-Oberschule
Felix Ott	Herder-Oberschule
Thomas Schoppe	Heinrich-Hertz-Oberschule
Arthur Wilms	Herder-Oberschule

Gruppenleiter:

Urs Kirchgraber	Departement Mathematik, ETH Zürich

Die Menschen hätten schon immer gern die Zukunft vorher gesehen (vor allem bei guten Aussichten!) – seitenweise Horoskope in Zeitungen und Zeitschriften zeugen noch heute davon. Verlässliche Prognosen sind nur mit Mitteln der Mathematik möglich. Dabei spielen so genannte *Differentialgleichungen* und *Dynamische Systeme* eine zentrale Rolle. Ziel in unserer Arbeitsgruppe war es, dieses Gebiet vorzustellen.

Naturgemäss erfolgt eine solche Einführung entlang zweier Stränge: Einerseits gehören Einführungsbeispiele zum Modellieren mit Differentialgleichungen dazu, andererseits eine Einführung in die theoretische Analyse von Differentialgleichungen. Hinsichtlich der mathematischen Seite der „Denkfigur Differentialgleichung" kann man folgende Aspekte unterscheiden: a) Lösungsformeln (in den wenigen Fällen, in denen es sie gibt!), b) Computer gestützte Berechnung von Näherungslösungen, c) qualitative oder geometrische Untersuchungen, das heisst der Nachweis von Eigenschaften von Lösungen aufgrund geometrischer Überlegungen, zum Beispiel durch das Studium des sogenannten „Richtungsfelds" (bei skalaren Differentialgleichungen erster Ordnung). Wie der Bericht zeigt, haben wir uns mit diesen und weiteren Aspekten etwas befasst.

1 Einführung

Wer den Begriff der Ableitung einer Funktion kennt, kann verstehen, was eine Differentialgleichung ist. *Eine Differentialgleichung (kurz DGl) ist eine Beziehung zwischen einer (unbekannten) Funktion und ihrer Ableitung.* Die Funktion heisse zum Beispiel $y(x)$ und $y'(x)$ bezeichne ihre (erste) Ableitung. Hier sind drei Beispiele:

$$\text{a) } y'(x) = y(x), \quad \text{b) } y'(x) = (y(x))^2, \quad \text{c) } y'(x) = (y(x))^2 - x. \tag{1}$$

In Beispiel (1) a) geht es somit um die Frage nach Funktionen y, die gleich ihrer Ableitung sind. Aus der Differentialrechnung weiss man, dass die Funktion $y(x) = e^x$ diese Eigenschaft hat, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet. Aber es gibt noch weitere solche Funktionen: Auch $5e^x$, oder $-3.6e^x$ löst die Dgl 1 a), und allgemeiner jede Funktion aus der Familie

$$y(x) = c\, e^x, \tag{2}$$

wobei man für c eine beliebige Zahl einsetzen darf. (2) heisst *1-parametrige Lösungsschar* der DGl (1) a). Mit (2) ist die *allgemeine Lösung* der DGl (1) a) gefunden. Das heisst: Es gibt keine weiteren Lösungen. Oder anders ausgedrückt: Jede Lösung der DGl (1) a) ist eine aus der Schar (2). Speziell sei auf den Fall $c = 0$, das heisst auf die Lösung $y(x) = 0$ (für alle x) hingewiesen.

Auch die DGl (1) b) hat ein 1-parametrige Lösungsschar:

$$y(x) = \frac{c}{1 - cx}. \tag{3}$$

Man findet sie durch sogenannte „Separation der Variablen" oder bequemer, wenn man ein geeignetes Computer-Algebra-System (CAS) benutzt, etwa Mathematica oder Maple. Dass (3) für jede Wahl der Zahl c tatsächlich Lösung ist, verfiziert man durch Einsetzen in (1) b).

Befragt man Mathematica zur DGl (1) c), erhält man einen mehrzeiligen Formelhaufen, der sogenannte höhere transzendente Funktionen, nämlich Bessel-Funktionen, enthält. Und wenn man in (1) c) das Quadrat durch die dritte oder vierte Potenz ersetzt, also die DGl $y'(x) = (y(x))^3 - x$ oder $y'(x) = (y(x))^4 - x$ betrachtet, ist auch Mathematica ratlos und gibt anstelle einer Antwort einfach die DGl zurück.

Man vermutet daher, dass es schwierig oder gar unmöglich sein dürfte, Lösungsformeln für Differentialgleichungen zu finden, abgesehen von ganz einfachen Fällen. Es stellt sich daher die Frage, ob es irgend eine Alternative zu Lösungsformeln gibt? Aber noch vorher wird man sich fragen, ob es denn gute Gründe gibt, Differentialgleichungen zu untersuchen!

Tatsächlich sind Differentialgleichungen höchst anwendungsrelevant! Wenn es um wissenschaftlich begründete Prognosen geht, beruhen diese meist auf sogenannten „Differentialgleichungsmodellen“. Das trifft insbesondere auf das vielleicht bekannteste Beispiel zu: *Wetterprognosen*. Das Erstellen von Wetterprognosen ist allerdings ein zu komplexes Unterfangen, als dass sich die Arbeitsgruppe damit hätte auseinander setzen können. Um immerhin das Modellieren von Prozessen mit Differentialgleichungen zu illustrieren, beschreiben wir in Abschnitt 2 das vergleichsweise einfache Beispiel, mit dem wir uns befasst haben. In den Abschnitten 3-5 geht es um die mathematische Seite der „Denkfigur Differentialgleichung“. In Abschnitt 3 ist das Thema „Näherungslösungen“. In Abschnitt 4 wird quasi die „Gretchen-Frage“ gestellt: Woher wissen wie überhaupt, dass eine Differentialgleichung Lösungen hat, wenn keine Lösungsformeln bekannt sind, oder es womöglich gar keine gibt? In Abschnitt 5 geschieht ein (typisches) mathematisches Wunder: Lösungen, die man nicht kennt, werden einige ihrer Geheimnisse entrissen! Wie kamen die Differentialgleichungen auf die Welt? Mit Newtons Theorie der Bewegung starteten sie fulminant. Der letzte Abschnitt orientiert ein wenig darüber.

2 Modellieren mit Differentialgleichungen

Betrachten Sie die in Abbildung 1 skizzierte „technische Anlage“[1]. Sie besteht aus zwei Behältern, die je 100 Liter fassen und zu Beginn, das heisst zum Zeitpunkt $t = 0$, ganz mit Wasser gefüllt sind. Ab Zeitpunkt $t = 0$ beginnt Farbstoff in Behälter 1 einzufliessen und zwar 1 Liter pro Minute. Ebenfalls ab $t = 0$ beginnt Wasser in Behälter 2 einzufliessen, auch mit einer Rate von 1 Liter pro Minute. Beide Behälter sind mit einem Rührwerk ausgerüstet, sodass das jeweilige Gemisch aus Farbstoff und Wasser jederzeit praktisch homogen ist, das heisst die Farbstoffkonzentration ist im entsprechenden Behälter überall gleich. Weiter „kommunizieren“ die beiden Behälter miteinander. Das heisst: Von Gemisch 1 in Behälter 1 fliessen pro Minute 4 Liter in den Behälter 2 hinüber, und umgekehrt fliessen pro Minute 3 Liter von Gemisch 2 aus Behälter 2 in den Behälter 1. Schliesslich werden aus Behälter 2 pro Minute 2 Liter von Gemisch 2 abgepumpt. Der Prozess verläuft offenbar so, dass die beiden Behälter stets gerade voll gefüllt sind. Die Aufgabe besteht darin, den Prozessverlauf zu prognostizieren. Das heisst folgendes. Es bezeichne $x(t)$ die Anzahl Liter Farbstoff in Behälter 1 zur Zeit t und, analog, $y(t)$ die Anzahl Liter Farbstoff in Behälter 2 zur Zeit t. Lassen sich die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ prognostizieren?

[1] nach: G. Fulford, P. Forrester, A. Jones: “Modelling with Differential and Difference Equation”, 1997.

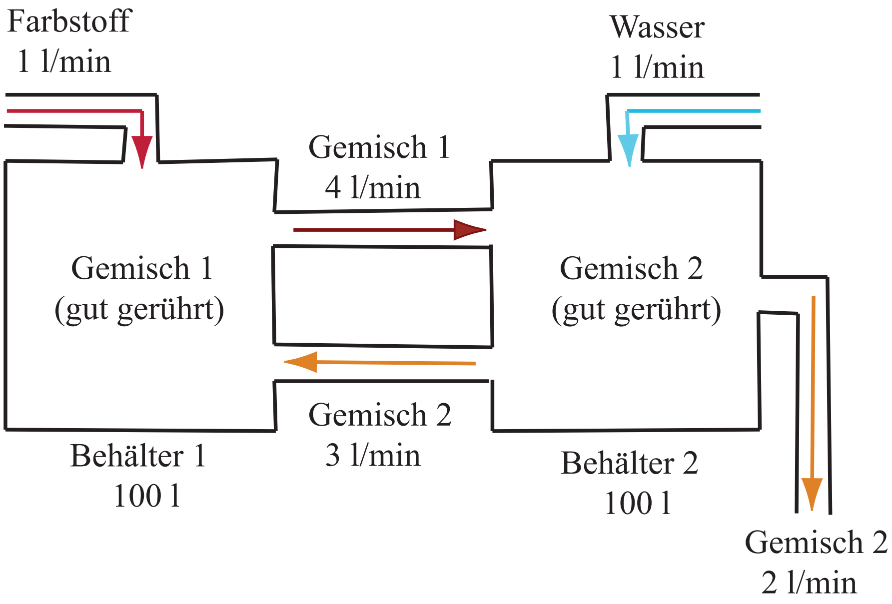

Abbildung 1: Eine „technische Anlage“

Es wird sich gleich herausstellen, dass sich für die beiden gesuchten Funktionen Differentialgleichungen aufstellen lassen. Dazu wird sowohl für Behälter 1, wie für Behälter 2 eine *Farbstoffbilanz* aufgestellt. In beide Behälter tritt ja fortwährend Farbstoff ein und aus. Zu berücksichtigen ist dabei, dass der Farbstoffgehalt in den beiden Behältern sich andauernd ändert. Das veranlasst einem, wie folgt vorzugehen. Betrachten Sie das (kurze) Zeitintervall zwischen den Zeitpunkten t und $t+\Delta$, also

$$[t, t+\Delta].$$

Dabei sei Δ eine kleine positive Zahl[2]. Klein bedeutet: so klein, dass sich die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ während des Zeitintervalls $[t, t+\Delta]$ nur unwesentlich verändern.

Dann kann man eine *ungefähre Bilanz* für den Farbstoffgehalt in den beiden Behältern wie folgt ziehen. Beginnen wir mit Behälter 1. Zur Zeit t beträgt die in diesem Behälter vorhandene Farbstoffmenge $x(t)$ Liter. Im betrachteten Zeitintervall werden $1 \cdot \Delta$ Liter Farbstoff von aussen zugeführt (wenn $\Delta = \frac{1}{10}$ Minute beträgt also 0.1 Liter, usw.). Indem aus Behälter 2 pro Minute 3 Liter Gemisch 2 in Behälter 1 hinüber fliesst gelangt zusätzlich Farbstoff in Behälter 1. Wieviel? Die Schwierigkeit ist, dass die Farbstoffkonzentration in Gemisch 2, das heisst die Grösse $\frac{y(t)}{100}$ (also die Anzahl Liter Farbstoff, die in einem Liter von Gemisch 2 zur Zeit t vorhanden ist) sich ständig ändert, also auch im Zeitintervall $[t, t+\Delta]$.

[2]Die Masseinheit von Δ ist, wie diejenige von t, die Minute.

Wenn nun aber Δ klein gewählt wird in dem oben angedeuteten Sinn, dann kann man davon ausgehen, dass die Farbstoffkonzentration im Gemisch 2 während des gesamten Zeitintervalls von t bis $t+\Delta$ jedenfalls *ungefähr* den Wert $\frac{y(t)}{100}$ hat. Und diese Annahme ist *umso berechtigter*, je kleiner Δ gewählt ist. Daher lässt sich sagen, dass im kurzen Zeitintervall $[t, t+\Delta]$ aus Behälter 2 *ungefähr* die Menge

$$3 \cdot \frac{y(t)}{100} \cdot \Delta$$

Liter Farbstoff in den Behälter 1 fliesst: In 3 Litern Gemisch 2 beträgt der Farbstoffanteil $3 \cdot \frac{y(t)}{100}$, im Zeitintervall der Länge Δ tritt davon der Anteil $3 \cdot \frac{y(t)}{100} \cdot \Delta$ in Behälter 1 ein.

Eine ganz analoge Überlegung führt zum Schluss, dass im Zeitintervall $[t, t+\Delta]$ ungefähr die Farbstoffmenge

$$4 \cdot \frac{x(t)}{100} \cdot \Delta$$

aus Behälter 1 aus- und in Behälter 2 eintritt. Das führt zu folgender approximativen Bilanz für die Anzahl Liter $x(t+\Delta)$ Farbstoff am Ende des Zeitintervalls $[t, t+\Delta]$ in Behälter 1:

$$x(t+\Delta) \approx x(t) + 1 \cdot \Delta + 3 \cdot \frac{y(t)}{100} \cdot \Delta - 4 \cdot \frac{x(t)}{100} \cdot \Delta.$$

Indem man auf beiden Seiten $x(t)$ subtrahiert und die (approximative) Gleichung durch Δ dividiert, erhält man

$$\frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta} \approx -4 \cdot \frac{x(t)}{100} + 3 \cdot \frac{y(t)}{100} + 1.$$

Da die approximative Bilanz umso genauer ist, je kleiner Δ gewählt ist, wird man jetzt Δ gegen 0 streben lassen und unter Berücksichtigung von

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta} = \dot{x}(t)$$

folgende Differentialgleichung postulieren:

$$\dot{x}(t) = -4 \cdot \frac{x(t)}{100} + 3 \cdot \frac{y(t)}{100} + 1. \tag{4}$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung der Funkion $x(t)$ nach t.

Analoge Überlegungen am Behälter 2 führen zur zweiten DGl

$$\dot{y}(t) = 4 \cdot \frac{x(t)}{100} - 5 \cdot \frac{y(t)}{100}. \tag{5}$$

Zusammenfassend haben wir nun zwei Differentialgleichungen für die beiden interessierenden Funktionen $x(t)$, $y(t)$ gefunden:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -0.04\,x(t) &+& 0.03\,y(t)+1 \\ \dot{y}(t) &= 0.04\,x(t) &-& 0.05\,y(t). \end{cases} \tag{6}$$

Sie bilden ein sogenanntes *Differentialgleichungssystem*, denn mathematisch besteht die Aufgabe darin, *Funktionenpaare* $x(t), y(t)$ zu finden, die beide Differentialgleichungen *gleichzeitig* erfüllen.

Da das DGl-System (6) *linear* und *inhomogen* ist, lassen sich Lösungsformeln herleiten. Das haben wir in der Gruppe getan und folgendes Resultat gefunden, dessen Herleitung weiter unten durchgeführt wird:

$$\begin{cases} x(t) &= c_1\,e^{-0.01\,t} &-& 0.03\,c_2\,e^{-0.08\,t} &+& 62.5 \\ y(t) &= c_1\,e^{-0.01\,t} &+& 0.04\,c_2\,e^{-0.08\,t} &+& 50.0. \end{cases} \tag{7}$$

Dabei sind c_1, c_2 beliebig wählbare Zahlen. Das heisst: Das DGl-System (6) hat eine 2-parametrige Lösungsschar. Man kann c_1, c_2 so wählen, dass vorgegebene Anfangsbedingungen erfüllt werden. Da angenommen ist, dass die beiden Behälter zur Zeit $t = 0$ mit Wasser gefüllt sind, lauten die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0,\; y(0) = 0. \tag{8}$$

Damit die Formeln (7) die Bedingungen erfüllen muss gelten:

$$c_1 \approx -57.1429,\; c_2 \approx 178.571. \tag{9}$$

Aus den Formeln (7) lässt sich leicht das *Langzeitverhalten* der Funktionen $x(t)$, $y(t)$ ablesen:

$$x(t) \to 62.5,\;\; y(t) \to 50 \text{ für } t \to \infty. \tag{10}$$

Das bedeutet: Im Laufe der Zeit stellt sich ein *Gleichgewicht* ein, i.e. die Menge an Farbstoff beträgt im Behälter 1 nach genügend langer Zeit praktisch fortwährend 62.5 Liter, in Behälter 2 praktisch fortwährend 50 Liter. Tatsächlich stellt das Zahlenpaar $(62.5, 50)^T$ eine *spezielle Lösung* des Systems (6) dar: Man erhält sie aus der Lösungsschar (7), indem man $c_1 = c_2 = 0$ setzt. Man erhält sie aber auch direkt aus dem DGl-System (6), wenn man fragt, ob dieses System *konstante* Lösungen habe, das heisst Lösungen der Form

$$x(t) = X,\; y(t) = Y \text{ für alle } t, \tag{11}$$

wobei X, Y geeignet zu wählende Zahlen sind. X, Y müssen offenbar Lösung des gewöhnliche Gleichungssystems

$$\begin{cases} -0.04\,X &+& 0.03\,Y + 1 &= 0 \\ 0.04\,X &-& 0.05\,Y &= 0 \end{cases} \tag{12}$$

sein.

Die Funktionen $x_h(t) := x(t) - 62.5, y_h(t) := y(t) - 50$ schliesslich bilden die 2-parametrige Lösungsschar des zu (6) gehörigen sogenannten *homogenen* Systems:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \dot{x}_h(t) & = & -0.04\,x_h(t) & + & 0.03\,y_h(t) \\ \dot{y}_h(t) & = & 0.04\,x_h(t) & - & 0.05\,y_h(t). \end{array}\right. \tag{13}$$

Man erhält sie durch den auf Euler zurück gehenden Ansatz

$$x_h(t) = \tilde{x}\,e^{\lambda t},\ \ y_h(t) = \tilde{y}\,e^{\lambda t}. \tag{14}$$

Dabei bezeichnen $\tilde{x}, \tilde{y}, \lambda$ geeignet zu wählende Zahlen. Führt man den Euler-Ansatz (14) in das DGl-System (13) ein, erhält man folgendes homogenes Gleichungssystem für die beiden Unbekannten $\tilde{x}, \tilde{y}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (-0.04 - \lambda)\tilde{x} & + & 0.03\tilde{y} & = & 0 \\ 0.04\tilde{x} & + & (-0.05 - \lambda)\tilde{y} & = & 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Dieses Gleichungssystem hängt vom Parameter λ ab - und das ist gut so, denn das homogene System (15) hat dann und nur dann von $\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0$ verschiedene Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet, das heisst, wenn

$$(-0.04 - \lambda)(-0.05 - \lambda) - 0.03 \cdot 0.04 = 0 \tag{16}$$

gilt. Umgeformt lautet (16)

$$\lambda^2 + 0.09\lambda + 0.0008 = 0. \tag{17}$$

Die Lösungen von (17) sind $\lambda_1 = -0.01, \lambda_2 = -0.08$. Damit sind die Exponenten in den Lösungen (7) erklärt. Setzt man $\lambda = \lambda_1$, bzw. $\lambda = \lambda_2$ im homogenen linearen Gleichungssystem (15) ein, erhält man die Lösungsschar $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (c_1, c_1)$ bzw $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-0.03\,c_2, 0.04\,c_2)$, wobei c_1, bzw. c_2 beliebig wählbare Zahlen sind. Schliesslich bemerkt man folgendes: Sind $(x_h^{(1)}(t), y_h^{(1)}(t))$ und $(x_h^{(2)}(t), y_h^{(2)}(t))$ zwei Lösungen des linearen homogenen DGl-Systems (13), dann löst auch ihre „Summe“ $(x_h^{(1)}(t) + x_h^{(2)}(t), y_h^{(1)}(t) + y_h^{(2)}(t))$ das DGl-System (13). Das erklärt, dass

$$(x_h(t), y_h(t)) = (c_1\,e^{-0.01\,t} - 0.03\,c_2\,e^{-0.08\,t}, c_1\,e^{-0.01\,t} + 0.04\,c_2\,e^{-0.08\,t})$$

2-parametrige Lösungsschar des homogenen Systems (13) ist.

Schliesslich noch zu ein paar Bezeichnungen. Eine Aufgabe des Typs (15) heisst *Eigenwertproblem*. Die Lösungen $\lambda_{1,2}$ der quadratischen Gleichung (17) heissen *Eigenwerte*, und die Funktion auf der linken Seite von Gleichung (17) nennt man *charakteristisches Polynom*.

3 Numerische Löser

Wie man den Ausführungen im ersten Abschnitt entnimmt, ist davon auszugehen, dass es für die meisten interessierenden Differentialgleichungen *keine Lösungsformeln* gibt.

Ein gewisser Ausweg sind *numerische Lösungsverfahren*, sogenannte *numerische Löser.* Sie gestatten, zu einer gegebenen Differentialgleichung und einer gegebenen Anfangsbedingung ein Stück der Lösung approximativ zu berechnen. Nehmen wir, um etwas Konkretes vor Augen zu haben, die DGl (1) c) mit einer Anfangsbedingung:

$$y'(x) = (y(x))^2 - x, \; y(0) = 0.5. \tag{18}$$

Gesucht ist also die Funktion $y(x)$, die die DGl (18) und die Bedingung $y(0) = 0.5$ erfüllt. Eine Differentialgleichung, zusammen mit einer Anfangsbedingung, nennt man übrigens ein *Anfangswertproblem*, abgekürzt AWP[3]. Numerische Lösungsverfahren können immer nur für ein endliches Intervall der unabhängigen Variablen, hier x, benutzt werden. Wählen wir etwa das Intervall $[0, 2]$. Das heisst, es soll $y(x)$ für

$$x \in [0, 2] \tag{19}$$

approximiert werden. Wie?

Wenn man von einer Funktion $y(x)$ den Wert an einer Stelle x_0 kennt, sowie den Wert ihrer Ableitung $y'(x)$ an derselben Stelle, also $y'(x_0)$, so kann man diese Information nutzen, um $y(x)$ an Stellen x in der Nähe von x_0 zu approximieren. Es gilt

$$y(x) \approx \ell(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0). \tag{20}$$

Dabei approximiert die lineare Funktion ℓ die Funktion y umso besser, je näher x bei x_0 liegt. Geometrisch gesprochen bedeutet die Approximation (20): Der Graph von y wird in der Nähe des Punktes $(x_0, y(x_0))$ durch seine Tangente in diesem Punkt approximiert.

Als Beispiel betrachte man die Funktion $y(x) = \ln x$ und $x_0 = 1$. Wegen $\ln 1 = 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ folgt $\ell(x) = x - 1$. Abbildung 2 zeigt die Graphen von $\ln x$ und $x - 1$ für $x \in [0.5, 1.5]$.

Kehren wir zum Problem (18) zurück. Setzen wir $x_0 = 0$ und approximieren wir die Lösung $y(x)$ von (18) gemäss (20). Der Wert von $y(x_0) = y(0)$ ist durch die Problemstellung gegeben: Es gilt $y(x_0) = y(0) = 0.5$. Die Pointe ist, dass

[3] Hier einige englische Bezeichnungen: gewöhnliche Differentialgleichung=ordinary differential equation, Anfangswert(e)=initial value(s) oder initial condition(s), Anfangswertproblem=initial value problem, Löser=solver, Schritt oder Schrittweite=step or stepsize.

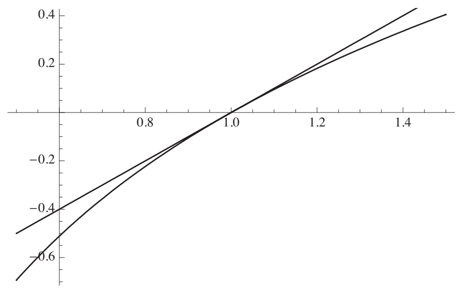

Abbildung 2: Vergleich des Graphen von $\ln x$ und der Linearisierung $\ell(x) = x - 1$ an der Stelle $x_0 = 1$.

man $y'(x_0) = y'(0)$ mit Hilfe der Differentialgleichung (18) bestimmen kann. Die Differentialgleichung soll ja für *alle* Werte von x erfüllt sein, also gilt speziell, wenn man $x = x_0$ wählt:

$$y'(x_0) = (y(x_0))^2 - x_0 = (y(0))^2 - 0 = (0.5)^2 - 0 = 0.25.$$

Das heisst: Der Graph der gesuchten Lösung y von (18) geht durch den Punkt $(0, 0.5)$ und seine Tangente hat in diesem Punkt die Steigung 0.25.

Approximieren wir $y(x)$ für Werte von x in der Nähe von $x = x_0 = 0$ gemäss (20), erhalten wir

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = 0.5 + 0.25\,x. \tag{21}$$

Nun gilt es zu entscheiden, in welchem Intervall man die Approximation (21) akzeptieren will. Benutzen wir (21) zum Beispiel[4] für

$$x \in [0, 0.4].$$

Dann erhalten wir aus (21) folgende Approximation für $y(0.4)$

$$y(0.4) \approx 0.5 + 0.25 \cdot 0.4 = 0.6 =: y_1. \tag{22}$$

Versuchen wir nun in ähnlicher Weise die Lösung $y(x)$ von (18) im Intervall

$$x \in [0.4, 0.8]$$

zu approximieren. Wenden wir (20) für $x_0 = 0.4$ an folgt:

$$y(x) \approx y(0.4) + y'(0.4)(x - 0.4). \tag{23}$$

[4]Diese Wahl ist ziemlich willkürlich. Es wird sich bald zeigen, dass das Intervall viel zu gross ist, wenn man eine einigermassen gute Approximation habe möchte.

Das Problem besteht nun darin, dass der Wert von $y(0.4)$ *nicht bekannt* ist (im Gegensatz zum Wert von $y(0) = 0.5$ im ersten Schritt). Immerhin ist aus (22) eine Approximation für $y(0.4)$ bekannt: $y(0.4) \approx y_1 = 0.6$. Also wird man nolens volens diese benützen. Dann folgt aus (23)

$$y(x) \approx y_1 + (y_1^2 - 0.4)(x - 0.4) = 0.6 - 0.04\,(x - 0.4) = 0.616 - 0.04\,x. \quad (24)$$

Dabei wurde folgende Näherung für die Ableitung $y'(0.4)$ verwendet

$$y'(0.4) = y(0.4)^2 - 0.4 \approx y_1^2 - 0.4 = 0.6^2 - 0.4 = -0.04.$$

Aus (24) erhält man die folgende Approximation für $y(0.8)$:

$$y(0.8) \approx 0.616 - 0.04 \cdot 0.8 = 0.584 =: y_2. \quad (25)$$

Fährt man in analoger Weise fort, erhält man 5 lineare Funktionen, die zusammen die gesuchte Lösung $y(x)$ von (18) auf dem Intervall $[0, 2]$ approximieren. Abbildung 3 zeigt die graphische Darstellung.

Die gerade beschriebene Methode zur approximativen Berechnung der Lösung einer Differentialgleichung heisst *Euler-Verfahren* oder *Euler-Cauchy-Polygonzug-Verfahren* oder (moderner!) *Euler-Cauchy-Löser*.

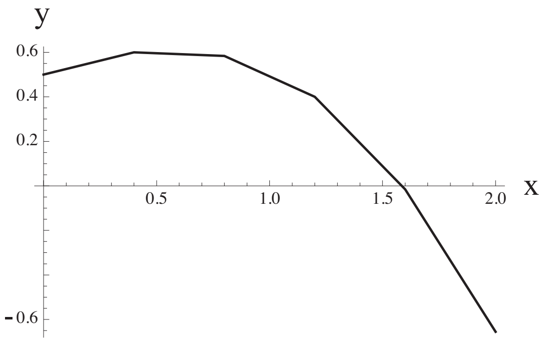

Abbildung 3: Euler-Cauchy-Polygonzug-Verfahren, angewandt auf $y'(x) = (y(x))^2 - x,\ y(0) = 0.5$, fünf Schritte der Länge 0.4.

Man wird erwarten, dass die gefundene Approximation nicht sehr genau ist, da die *Schritte* der Länge 0.4 recht gross sind. Wenn man einen Rechner zur Verfügung hat, ist es kein Problem die *Schrittlänge* zu verkleinern, bzw. die Anzahl der für das Intervall $[0, 2]$ verwendeten Schritte zu vergrössern. Abbildung 4 zeigt das Resultat. Zwischen den Polygonzügen (4), Schrittlänge 0.04, und (5) Schrittlänge circa 0.007, ist der Unterschied nur noch sehr gering und im Rahmen der gezeigten Grafik ist kaum noch auszumachen, dass es sich nicht um eine glatte Kurve, sondern um einen (naturgemäss „geknickten“) Polygonzug handelt. So wird man vermuten, dass sich die Approximation (5) kaum noch von der (exakten) Lösung des AWP (18) unterscheidet.

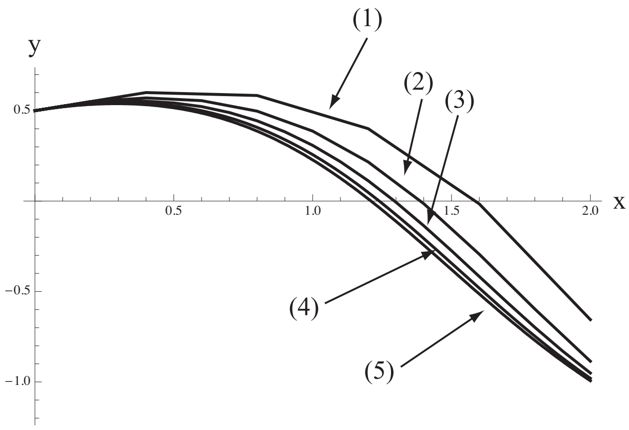

Abbildung 4: Euler-Cauchy-Polygonzüge für das AWP $y' = y^2 - x, y(0) = 0.5$ mit $(1) : 5, (2) : 10, (3) : 20, (4) : 50, (5) : 300$ Schritten für das x-Intervall $[0, 2]$.

Bemerkungen

1. Das Eulerverfahren kann mutatis mutandis auf Systeme von beliebig vielen Differentialgleichungen erweitert werden.

2. Das Eulerverfahren ist vergleichsweise ineffizient. Das heisst, man muss die Schritte im allgemeinen schon sehr klein wählen, um hohe Genauigkeit zu erreichen. Aus diesem Grund wurden effizientere Solver entwickelt. Der Schlüssel dazu sind Verbesserungen der Näherung (20) durch sogenannte *Taylorpolynome*. Unter der Approximation der Funktion $y(x)$ durch das *Taylorpolynom 2. Grades* an der Stelle x_0 versteht man folgende Näherung[5]

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2. \tag{29}$$

In der sogenannten *Taylortheorie* beweist man, dass die Approximation (29) tat-

[5]Eine heuristische Begründung für die angegebene Formel erhält man wie folgt. Die Näherung (20) angewandt auf $y'(x)$ (statt $y(x)$!) ergibt:

$$y'(x) \approx y'(x_0) + y''(x_0)(x - x_0). \tag{26}$$

Gilt für zwei Funktionen f, g in einem Intervall $[x_0, x_1]$

$$f(x) \approx g(x) \tag{27}$$

folgt daraus

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx \quad \text{für } x \in [x_0, x_1], \tag{28}$$

wie man sich anhand der Interpretation des Integrals als Fläche überzeugt, wobei man allerdings damit rechnen muss, dass die Näherung (28) umso ungenauer ist, je grösser $x - x_0$ ist. Angewandt auf (26) erhält man (29).

sächlich genauer ist als die Approximation (20), falls x genügend nahe bei x_0 liegt.

Die Euler-Methode beruht darauf, dass man $y'(x_0)$ aus der Differentialgleichung berechnen kann, wenn man $y(x_0)$ kennt. Kann man auch $y''(x_0)$ berechnen? Die Antwort ist ja. Man kann ja die Differentialgleichung differenzieren! Betrachten wir wieder $y'(x) = (y(x))^2 - x$. Unter Verwendung der Kettenregel folgt:

$$y''(x) = 2\,y(x)\,y'(x) - 1.$$

Damit ist klar, wie man $y''(x_0)$ aus der Kenntnis von $y(x_0)$ berechnet:

$$y'(x_0) = (y(x_0))^2 - x_0, \quad y''(x_0) = 2\,y(x_0)\,y'(x_0) - 1.$$

Das Euler-Verfahren ist ein *Verfahren 1. Ordnung*, das gerade beschriebene Verfahren ein *Verfahren 2. Ordnung*. Der Grund: halbiert man bei einem Verfahren 1. Ordnung die Schrittweite, halbiert sich auch der Fehler der Approximation (ungefähr). Halbiert man hingegen bei einem Verfahren 2. Ordnung die Schrittweite, reduziert sich der Fehler der Approximation auf (ungefähr) einen Viertel.

Differentialgleichungen zu differenzieren (womöglich mehrfach, um Verfahren 3., 4., ... Ordnung zu gewinnen) wird allenfalls bei einfachen Differentialgleichungen praktiziert. Verbreitet sind jedoch Verfahren, die diesen Schritt umgehen. Die Idee ist, Ableitungen durch Differenzenquotienten zu approximieren. Man erhält so im einfachsten Fall das Verfahren von *Euler-Heun* und mit etwas mehr Aufwand die sogenannten *Runge-Kutta-Verfahren*.

Die Entwicklung von Verfahren mit unterschiedlichen Eigenschaften und deren Untersuchung ist ein wichtiges Teilgebiet der sogenannten *Numerischen Mathematik*.

4 Keine Lösungsformeln und doch Lösungen – Eine Parallele

Für die Differentialgleichung $y'(x) = (y(x))^2 - x$ liefert das Computer-Algebra-System Mathematica eine, wenn auch komplizierte, Lösungsformel, wie schon im ersten Abschnitt mitgeteilt wurde. Für $y'(x) = (y(x))^3 - x$, $y'(x) = (y(x))^4 - x$, usw., jedoch ist auch Mathematica ratlos und gibt statt einer Lösungsformel einfach die Differentialgleichung zurück. Das heisst nicht unbedingt, dass es für diese Differentialgleichungen keine Lösungsformeln gibt: Es könnte sein, dass sie noch nicht entdeckt wurden. Aber wie auch immer: Ob allfällige Lösungsformeln nicht bekannt sind, oder ob es sie gar nicht gibt (wobei zu präzisieren wäre, was mit dem Begriff "Formel" gemeint ist): Die Situation ist unbefriedigend!

Schon früher hatte es in der Mathematik ein ähnliches Problem gegeben im Zusammenhang mit Polynom-Gleichungen, also Gleichungen des Typs

$$x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} ... + a_1\,x + a_0 = 0. \tag{30}$$

Dabei ist n eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, die sogenannten *Koeffizienten*, sind als vorgegebene Zahlen zu denken. Für $n = 1$ ist (30) eine lineare Gleichung und leicht zu lösen. Für $n = 2$ ist die Gleichung quadratisch: Die Lösungsformel kennt jeder aus dem Mathematikunterricht. Ähnliche, wenn auch ziemlich komplizierte Lösungsformeln für die Gleichungen dritten und vierten Grades, also für $n = 3$ und $n = 4$, wurden im 16. Jahrhundert von italienischen Mathematikern entdeckt. Die Suche nach Lösungsformeln für $n > 4$ blieb dann aber erfolglos und um 1826 gelang es dem norwegischen Mathematiker N. H. Abel zu *beweisen*, dass es solche Formeln *nicht* gibt. Aber dieses negative Ergebnis bedeutet keineswegs, dass Gleichungen des Typs (30) keine Lösungen hätten. Schon in seiner Dissertation von 1799 hat der grosse deutsche Mathematiker C. F. Gauss nämlich bewiesen, dass Polynom-Gleichungen in den komplexen Zahlen *immer Lösungen* haben[6]. Man nennt dieses Ergebnis daher auch *Satz von Gauss.* Eine andere gängige Bezeichnung ist *Fundamentalsatz der Algebra.*

Der Satz von Gauss ist ein typisches Beispiel eines sogenannten *Existenzsatzes.* Betrachten wir als einfacheres, aber durchaus verwandtes Beispiel, die Gleichung

$$x^2 - 2 = 0. \tag{31}$$

Viele Schüler würden sagen: Diese Gleichung hat die Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, und an dieser Antwort ist auch etwas dran. Holen wir etwas aus.

Schon früh lernt man die (wunderbaren!) *rationalen Zahlen* kennen, also die Zahlen der Form

$$\frac{p}{q},$$

wobei p eine ganze Zahl, q eine natürliche Zahl (ungleich 0) bezeichnet. Es ist wunderbar einfach zwei rationale Zahlen zu addieren, die eine von der anderen zu subtrahieren, sie miteinander zu multiplizieren und selbst die Division ist

[6] Genau genommen war dieser Beweis noch nicht ganz schlüssig. Die Lücke wurde erst über hundert Jahre später vom Schweizer Mathematiker A. Ostrowski geschlossen. Gauss hat jedoch in seinem Leben noch weitere Beweise für diesen Satz gegeben, die vollständig waren. Gauss war sich zweifellos bewusst, dass ein einziger Beweis ausreicht, um einen mathematischen Sachverhalt ein für allemal zu sichern. Wenn er bei diesem Thema gleich mehrere Wege aufzeigte, so demonstriert das, welche Bedeutung er dem Satz beimass.

ausgesprochen einfach. Allerdings: Keine rationale Zahl erfüllt die Gleichung (31): Der Zahlenvorrat der rationalen Zahlen ist zu klein!

Eine Möglichkeit ist, den Zahlenvorrat minimal zu erweitern und das Zeichen $\sqrt{2}$ „hinzuzufügen". Weil man in dem erweiterten Zahlenvorrat auch wieder addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren können möchte und die gewohnten Rechenregeln gelten sollen, wird man auf die folgende Zahlmenge geführt:

$$\{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \text{ rationale Zahlen}\}. \tag{32}$$

Das ist, könnte man vereinfacht sagen, der *algebraische Standpunkt.*

Die Alternative ist der *analytische Standpunkt.* In der Schule lernt man die rationalen Zahlen auf der sogenannten *Zahlengeraden* durch Punkte darzustellen. Dabei zeigt sich erst recht, dass es sich bei den rationalen Zahlen um einen vergleichsweise kleinen Zahlbestand handelt. Obwohl in jedem noch so kleinen Intervall auf der Zahlengeraden *unendliche viele* Punkte rationalen Zahlen entsprechen, ist die Zahl der „Löcher" noch viel grösser. Das heisst: Es gibt in jedem (noch so kleinen) Intervall auf der Zahlengeraden enorm viele Punkte, die *nicht* rationalen Zahlen entsprechen! Nur mit den Punkten die rationalen Zahlen entsprechen „besetzt", ist die Zahlengerade „hochgradig porös"!

Das Problem wird mit der Erschaffung der *reellen Zahlen* behoben: Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt, jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht eine reelle Zahl.

Dass die Konstruktion der reellen Zahlen gelingt, ist nicht selbstverständlich und erfordert ein Stück harter mathematischer Arbeit. Die Konstruktion muss ja auch sicher stellen, dass man reelle Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann und zwar so, dass die üblichen Rechengesetze (die beiden kommutativen und assoziativen Gesetze und das Distributiv-Gesetz) gelten. Ferner müssen die rationalen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen weiterhin vorhanden sein und „alte" und „neue" Operationen müssen sich auf dieser Teilmenge entsprechen. Wir können hier nicht weiter auf diese Konstruktion eingehen, berufen uns aber darauf, dass sie möglich ist. Die herausragende Eigenschaft der reellen Zahlen ist, dass sie die Zahlengerade „füllen". Diese Eigenschaft heisst sinnigerweise *Vollständigkeit.*

Nach dem Gesagten könnte man hinsichtlich der Lösbarkeit der Gleichung (31) wie folgt argumentieren. Man betrachtet den Graphen G der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ über dem Intervall $I = [0, 2]$. Weil die reellen Zahlen im Intervall I keine Lücken lassen, ist auch der Graph G ein Kurvenstück ohne Lücken, das überdies den Punkt $P_0 = (0, -2)$ „kontinuierlich“ [7] mit dem Punkt $P_1 = (2, 2)$ verbindet. Da P_0 unterhalb, P_1 oberhalb der x-Achse liegt, muss G die x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 2$ schneiden. Die reelle Zahl, die diesem Schnittpunkt entspricht, ist die gesuchte Lösung[8] der Gleichung (31).

Ist das ein Beweis? Viele Generationen von Mathematikern im 17. und 18. Jahrhundert wären mit einer solchen Argumentation zweifellos zufrieden gewesen. Wie schon der Hinweis auf eine gewisse Unvollkommenheit im Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra von Gauss in seiner Dissertation von 1799, siehe Fussnote 6, zeigt, unterliegt auch die Beurteilung der Qualität von mathematischen Beweisen einer gewissen Geschichtlichkeit. In einer heutigen Analysis-Vorlesung für angehende Mathematikerinnen und Mathematiker würde man sich mit der gegebenen Erklärung nicht begnügen. Dabei geht es nicht um Beckmesserei, sondern darum, tragfähige Grundlagen für die Weiterentwicklung der Mathematik zu schaffen. Dass es intellektuell überaus reizvoll – wenn auch keineswegs einfach – ist, einen Bezugsrahmen zu schaffen, in dem über die Dinge sehr genau nachgedacht werden kann, scheint für Nichtmathematiker (leider!) kaum nachvollziehbar zu sein.

Wie würde ein heute akzeptabler Beweis für die Aussage: *„Gleichung (31) hat in den positiven reellen Zahlen eine Lösung“* aussehen? Hier ist eine Skizze. Eine wichtige Rolle spielen *Zahlfolgen*, das heisst (unendliche) Folgen reeller Zahlen[9]:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots \tag{33}$$

Mitunter scheinen solche Zahlfolgen immer mehr einer gewissen Zahl zuzustreben. Hier ist ein Beispiel[10]:

2, 2.5, 2.66..., 2.7083..., 2.7166..., 2.718055..., 2.718253..., 2.718278...,
..., 2.718281..., ...

Um dieses Phänomen handhabbar zu machen werden die Begriffe *Konvergenz einer Zahlfolge* und *Grenzwert einer Zahlfolge*[11] definiert und das Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

eingeführt, um den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ zu bezeichnen[12]. Ohne auf Details einzugehen, sei auf folgenden subtilen, aber wichtigen Punkt hingewiesen. In einem ersten Schritt definiert man, was gemeint ist, wenn man sagt:

[7] Das heisst: ohne „zu springen“.

[8] Dass die Gleichung (31) *nur eine* positive Lösung hat, folgt zum Beispiel so: Hätte sie zwei x_1, x_2, würde $x_1^2 - x_2^2 = 0$, das heisst: $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ gelten, woraus, wegen $x_1 > 0, x_2 > 0$, sofort $x_1 = x_2$ folgen würde.

[9] Dafür wird kompakter auch $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ geschrieben.

[10] Das Bildungsgesetz ist $a_n = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/n!$

[11] Statt von Grenzwert spricht man auch vom *Limes* einer Zahlfolge.

[12] Falls er existiert!

„Die Zahlfolge $(a_n)_{n=0,1,2,...}$ *konvergiert gegen die Zahl* a."

Im zweiten Schritt definiert man sodann:

„Die Zahlfolge $(a_n)_{n=0,1,2,...}$ *konvergiert* , wenn es eine Zahl[13] a gibt, gegen die die Folge $(a_n)_{n=0,1,2,...}$ konvergiert."

Der entscheidende Unterschied: Im ersten Schritt weiss man, gegen welche Zahl die Folge strebt. Die zweite Aussage hingegen ist (nur) eine *Existenzaussage.* Man weiss nur: Die Folge strebt gegen eine gewisse Zahl, die man aber nicht kennt!

Man kann als nächstes die Eigenschaften der neuen Begriffe studieren. Beispielsweise kann man folgende Behauptungen beweisen. Sind

$$(a_n)_{n=0,1,2,...} \text{ und } (b_n)_{n=0,1,2,...}$$

Zahlfolgen mit Grenzwert a, bzw. b, dann konvergieren die Zahlfolgen

$$(a_n + b_n)_{n=0,1,2,...},\ (a_n - b_n)_{n=0,1,2,...},\ (a_n \cdot b_n)_{n=0,1,2,...}\ (a_n/b_n)_{n=0,1,2,...}$$

und ihre Grenzwerte sind $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, a/b, wobei im letzten Fall vorausgesetzt werden muss, dass die b_n und b von 0 verschieden sind.

Eine wichtige Frage ist die nach möglichst handhabbaren *Kriterien für die Konvergenz von Zahlfolgen.* An dieser Stelle spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine wichtige Rolle. Ein sehr nützliches solches Kriterium ist das folgende. Es sei $(a_n)_{n=0,1,2,...}$ eine *monoton fallende* und *beschränkte* Zahlfolge, das heisst, es gelte einerseits

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots,$$

und andererseits gebe es eine Zahl A, sodass alle Glieder der Folge nicht kleiner als A sind. Das heisst, es gilt

$$a_0 \geq A,\ a_1 \geq A,\ a_2 \geq A,\ a_3 \geq A,\ \ldots$$

Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n=0,1,2,...}$.

Kehren wir endlich wieder zur Gleichung (31) zurück:

$$x^2 - 2 = 0. \tag{34}$$

Geometrisch interpretiert stellt sie die Frage nach der Seitenlänge eines Quadrats der Fläche 2. Sei x_0 eine Näherung an die gesuchte Zahl, zum Beispiel $x_0 = \frac{3}{2}$.

[13]Ein Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Zahlen konvergieren. Es gibt also höchstens eine Zahl, gegen die eine Zahlfolge konvergieren kann. Längst nicht jede Zahlfolge konvergiert allerdings.

Um aus der Näherung x_0 eine bessere Näherung zu gewinnen, kann man wie folgt agumentieren. Betrachten wir das Rechteck mit den Seiten x_0 und $\frac{2}{x_0}$. Es hat offensichtlich die „richtige“ Fläche, nämlich 2. Sollte $x_0 = \frac{2}{x_0}$ gelten, ist man fertig: x_0 ist die gesuchte Lösung der Gleichung (34). Wenn nicht, ist die eine der beiden Zahlen

$$x_0, \ \frac{2}{x_0}$$

zu gross, die andere zu klein. Also ist es naheliegend, als neue Näherung x_1 ihren arithmetischen Mittelwert zu nehmen

$$x_1 := \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0}.$$

Fährt man analog fort, erhält man die Zahlfolge[14]:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \ n = 0, 1, 2, ..., \quad x_0 = \frac{3}{2}. \tag{35}$$

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass die so konstruierte Folge $(x_n)_{n=0,1,2,...}$ aus lauter positiven Zahlen besteht und monoton fallend ist. Aufgrund des Kriteriums über monoton fallende, nach unten beschränkte Zahlfolgen folgt:

Die Folge $(x_n)_{n=0,1,2,...}$ konvergiert.

Nennen wir den Grenzwert, der notabene eine positive Zahl ist, x^*. Aus den oben zitierten Eigenschaften von Grenzwerten folgt:

- Die Folge $(a_n)_{n=0,1,2,...}$ mit $a_n = x_{n+1}$ konvergiert gegen x^*.
- Die Folge $(b_n)_{n=0,1,2,...}$ mit $b_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ konvergiert gegen $\frac{x^*}{2} + \frac{1}{x^*}$.

Wegen $a_n = b_n$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ folgt schliesslich

$$x^* = \frac{x^*}{2} + \frac{1}{x^*}.$$

Das heisst: x^* ist Lösung der Gleichung (34).

Kehren wir zum Problem der Lösbarkeit von Anfangswertproblemen zurück. Nehmen wir an, es soll bewiesen werden, dass das AWP

$$y'(x) = (y(x))^2 - x, \quad x(0) = 0.5 \tag{36}$$

[14] Dieses Verfahren heisst „Heron-Verfahren“, nach Heron von Alexandria (um 60 n. Chr.). Es ist identisch mit dem sogenannten „Newton-Verfahren“ für die Gleichung (34).

für $x \in [0, b]$, $b > 0$, geeignet, eine Lösung hat. Das Vorgehen ist grundsätzlich sehr ähnlich wie bei der Gleichung (34). So, wie das Heron-Verfahren eine Folge von Zahlen generiert, von der man hofft, dass sie konvergiert und dass ihr Grenzwert Lösung der interessierenden Gleichung ist, geht man zum Beispiel vom Euler-Cauchy-Polygonzug-Verfahren aus, das für jedes n, $n = 1, 2, ...$, eine Approximation

$$y_n(x)$$

generiert, die man erhält, wenn man das Intervall $[0, b]$ in n Schritte der Länge b/n unterteilt. Die verbleibende Aufgabe ist dann zu zeigen, dass die Folge von Funktionen $(y_n(x))_{n=1,2,3,...}$ auf dem Intervall $[0, b]$ konvergiert und daher eine „Grenzfunktion“ $y^*(x)$ definiert, die das AWP (36) löst. Wieder muss mit der Begriffsbildung begonnen werde: Was heisst es, dass eine *Folge von Funktionen konvergiert*, usw. Natürlich bedeutet das einiges an geistiger Arbeit[15]. Aber der Kern steckt in den reellen Zahlen und ihren Eigenschaften, insbesondere in ihrer fundamentalen Eigenschaft vollständig zu sein. Das Resultat ist der sogenannte *Existenz- und Eindeutigkeitssatz: Unter milden Bedingungen gilt, dass jedes AWP eine eindeutig bestimmte Lösung hat!*

5 Geometrische Theorie

Nehmen wir an, $y(x)$ sei eine für $x \in (-\infty, \infty)$ definierte Lösung einer interessierenden DGl. Die vielleicht interessanteste Frage, die man stellen kann, lautet: *Wie verhält sich y für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$?* Man spricht vom *asymptotischen Verhalten* von y. Mit Hilfe von Computerrechnungen kann man vielleicht *Vermutungen* über das asymptotische Verhalten einer Lösung gewinnen, aber *bewiesen* ist damit nichts. In diesem Abschnitt soll, wieder anhand der DGl (1) c), also von

$$y'(x) = (y(x))^2 - x, \tag{37}$$

skizziert werden, wie Aussagen über das asymptotische Verhalten von Lösungen ohne viel Rechnung, nur aufgrund von *geometrischen Überlegungen* gewonnen werden können[16].

Der Kern ist eine *geometrische Interpretation des Begriffs „Differentialgleichung“*. Betrachten Sie die x-y-Ebene und einen ihrer Punkte (x^*, y^*). Durch diesen Punkt

[15]Interessierte Leserinnen und Leser seien auf das Handout: „Das Euler-Verfahren und die Existenz von Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen“ von U. Kirchgraber verwiesen, das beim Verfasser bezogen werde kann.

[16]Nach J. Hubbard, B. West: “Differential Equations, A Dynamical Systems Approach”, Part I, 1991. Als eigentliche Väter der geometrische Theorie gelten der grosse französische Mathematiker H. Poincaré 1854-1912) und der russische Mathematiker A. M. Liapunov (1857-1918).

geht eine Lösungskurve der DGl (37), nämlich der Graph der Lösung y des AWP

$$y'(x) = (y(x))^2 - x, \;\; y(x^*) = y^*. \tag{38}$$

Betrachten Sie nun die Steigung m der Tangente an diese Lösungskurve im Punkt (x^*, y^*). m lässt sich mit Hilfe der DGL problemlos ermitteln:

$$m = (y^*)^2 - x^*. \tag{39}$$

Ohne dass man die Lösungskurve kennt, kann man in der x-y-Ebene ihre Tangente im Punkt (x^*, y^*) einzeichnen. Da eine Tangente nur in der Nähe des Kurvenpunkts, zu dem sie gehört, Bedeutung hat, genügt es, ein sehr *kleines Stück* von ihr einzuzeichnen.

Diese Überlegung kann man offenbar für *jeden* Punkt der x-y-Ebene machen. Auf diese Weise entsteht ein *mentales Konstrukt*, das man *Richtungsfeld* der betrachteten DGl nennt. Die Vorstellung ist, dass in jedem Punkt der x-y-Ebene ein kleines Stück einer Geraden „angeheftet" ist: Es gibt die Richtung der Tangente an die Lösungskurve zur DGl durch diesen Punkt an. Ein solches Geradenstücklein heisst *Element des Richtungsfelds* (im entsprechenden Punkt).

Das Richtungsfeld einer DGl ist, wie gesagt, ein gedachtes Objekt. Aber mit Hilfe des Computers ist es möglich, eine Annäherung an dieses Konstrukt zu erzeugen. In Abbildung 5 ist dies für die DGl (37) geschehen. In einem gewissen Ausschnitt der x-y-Ebene sind auf einem gewissen Gitter von Punkten die entsprechenden Richtungen eingetragen.

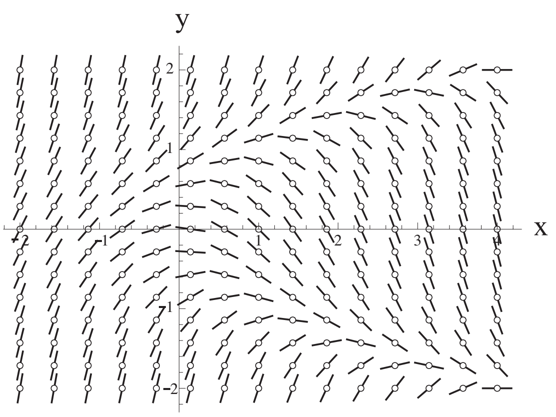

Abbildung 5: Computer-Plot (eines Ausschnitts) des Richtungsfelds von $y'(x) = y(x)^2 - x$.

Der Begriff Richtungsfeld ist das geometrische Analogon zum Begriff Differentialgleichung. Der Begriff Lösung hat folgende geometrische Entsprechung. *Eine*

Kurve in der x-y-Ebene heisst Lösungskurve, falls in jedem ihrer Punkte die dortige Tangente auf dem entsprechenden Element des Richtungsfelds liegt. Abbildung 6 illustriert, was gemeint ist.

So anschaulich die Begriffe DGl und Lösungskurve im geometrischen Gewand sind - es ist auch mit ihrer Hilfe nicht einfacher, Lösungen oder Lösungskurven zu bestimmen. Wenn es allerdings darum geht, *qualitative Eigenschaften* von Lösungskurven zu gewinnen, dann ist das geometrische Kleid sehr hilfreich! Ein Schlüssel sind sogenannte *untere* und *obere Schranken.*

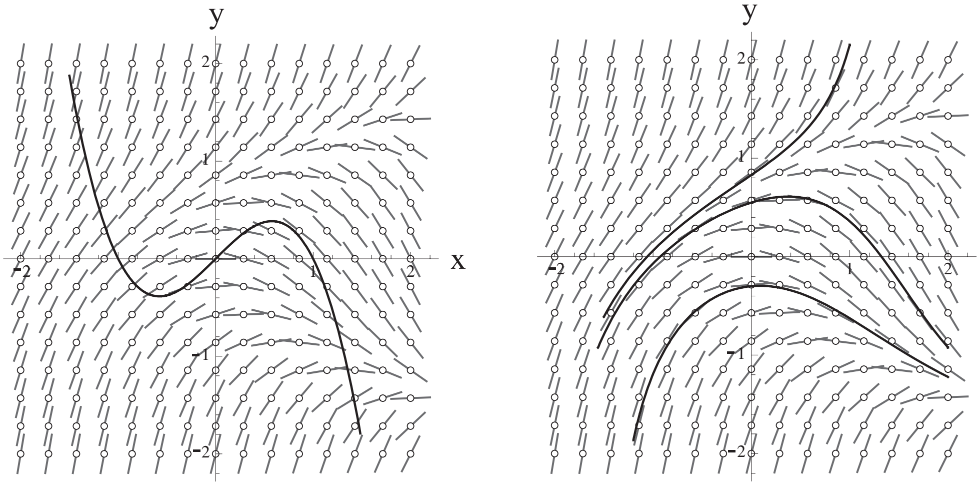

Abbildung 6: *Links:* Ein Graph, der *nicht* Lösungskurve der Dgl $y'(x) = y(x)^2 - x$ ist. *Rechts*: Ausschnitte von (approximativen) Lösungskurven der Dgl $y'(x) = y(x)^2 - x$.

Ein Graph L in der x-y-Ebene heisst *untere Schranke* für eine DGl, wenn folgendes gilt: In jedem Punkt von L ist das entsprechende Element des Richtungsfelds der DGl mindestens so steil wie die Tangente an L in diesem Punkt, siehe Abbildung 7, links. Und analog: Ein Graph U in der x-y-Ebene heisst *obere Schranke* für eine DGl, wenn folgendes gilt: In jedem Punkt von U ist das entsprechende Element des Richtungsfelds der DGl höchstens so steil wie die Tangente an U in diesem Punkt, siehe Abbildung 7, rechts.

Die Pointe: *Eine Lösungskurve kann – im Sinne wachsender Werte von x – eine untere Schranke nicht von oben nach unten, eine obere Schranke nicht von unten nach oben durchkreuzen.* Mit diesem Hilfsmittel kann man mitunter erstaunlich präzise Aussagen über den Verlauf von Lösungskurven gewinnen.

Betrachten Sie einmal mehr die DGl $y'(x) = (y(x))^2 - x$. Die Graphen von

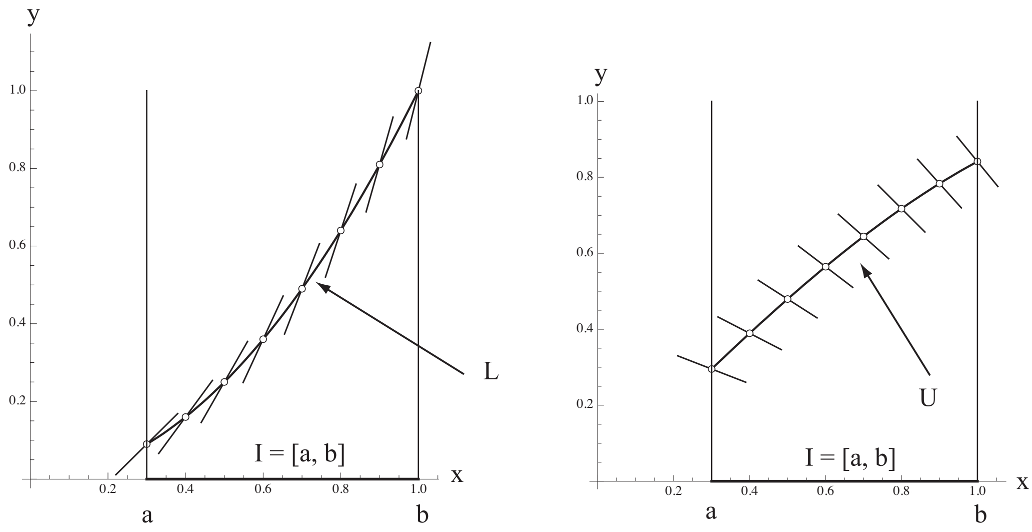

Abbildung 7: *Links:* Zum Konzept einer *unteren Schranke* L (für "lower") einer DGl. *Rechts*: Zum Konzept einer *oberen Schranke* U (für "upper") einer DGl.

$-\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$, und $-\sqrt{x}$, $x \geq 0$, sind bezüglich der betrachteten DGl sogenannte „Isoklinen", das heisst, alle Elemente des Richtungsfelds sind jeweils parallel. Auf dem ersten Graphen haben alle Elemente des Richtungsfelds die Steigung -1, auf dem zweiten beträgt sie 0. Der zweite Graph, der für $x \geq 1$ unterhalb des ersten liegt, ist eine untere Schranke für die betrachtete DGl. Der erste Graph ist ab dem Punkt $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$ nach rechts eine obere Schranke für $y'(x) = (y(x))^2 - x$, siehe Abbildung 8.

Das ergibt folgende Aussage:

Satz 1. *Es sei $y(x)$ die Lösung des AWP*

$$y'(x) = (y(x))^2 - x, \; y(x_0) = y_0,$$

wobei $x_0 \geq \frac{5}{4}$, $-\sqrt{x_0} \leq y_0 \leq -\sqrt{x_0 - 1}$ gelte. Dann folgt:

$$y(x) \to -\sqrt{x} \text{ für } x \to \infty.$$

Der Grund: Offenbar gilt $-\sqrt{x} \leq y(x) \leq -\sqrt{x-1}$ für $x \geq x_0$ und überdies

$$-\sqrt{x-1} - (-\sqrt{x}) \to 0 \text{ für } x \to \infty.$$

Dieses Resultat lässt sich ausbauen. In Abbildung 9 ist der Punkt P_1 auf F_1 beliebig gewählt. P_2 liegt auf dem Graphen von F_2, auf gleicher „Höhe" wie P_1.

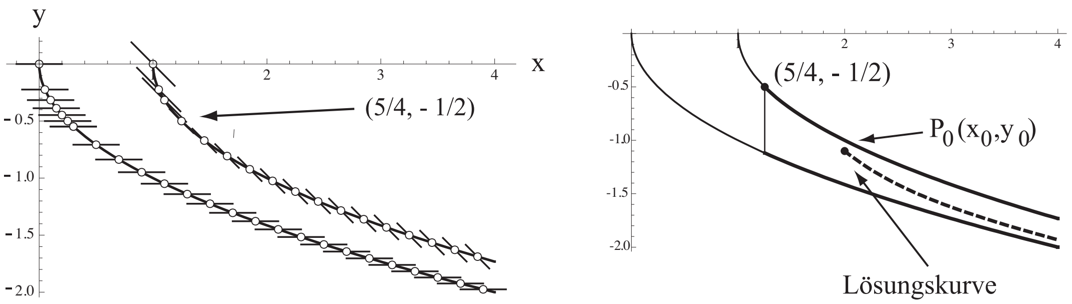

Abbildung 8: Zu Satz 1. *Links*: Untere und obere Schranke. *Rechts*: Die Graphen von $-\sqrt{x}$ und $\sqrt{x-1}$ bilden für $x \geq \frac{5}{4}$ eine Art „unendlichen Trichter". Lösungskurven, die in diesem Trichter starten, laufen für wachsende x immer näher zusammen.

Das heisst: Die Verbindungsstrecke von P_1 zu P_2 ist parallel zur x-Achse. Das mit g bezeichnete Geradenstück, das P_2 mit P_3 verbindet, hat definitionsgemäss Steigung -1.

Der Graph bestehend aus dem Stück vom Nullpunkt 0 zum Punkt P_1 auf F_1, den Strecken P_1P_2 und P_2P_3, sowie dem Graphen von F_3 rechts von P_3, ist - wie eine Rechnung zeigt - eine obere Schranke für $y'(x) = (y(x))^2 - x$. F_4 hingegen ist eine untere Schranke. Die Quintessenz: Jede Lösungskurve, die in dem beschriebenen Gebiet startet, kann dieses Gebiet nicht verlassen und tritt daher früher oder später in den aus Satz 1 bekannten „unendlichen Trichter". Damit ist die folgende Aussage bewiesen.

Satz 2. *Es sei $y(x)$ die Lösung des AWP*

$$y'(x) = (y(x))^2 - x, \; y(x_0) = y_0,$$

wobei $x_0 \geq 0$, $-\sqrt{x_0} \leq y_0 \leq \sqrt{x_0}$ gelte. Dann folgt:

$$y(x) \to -\sqrt{x} \text{ für } x \to \infty.$$

Abbildung 10 zeigt einen Computer-Plot zur Differentialgleichung $y'(x) = (y(x))^2 - x$. Neben dem Richtungsfeld sind einige, via numerische Approximation gewonnene, Lösungskurven eingezeichnet. Satz 2 garantiert eine Aussage über das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ eines nicht so kleinen Teils dieser Lösungskurven.

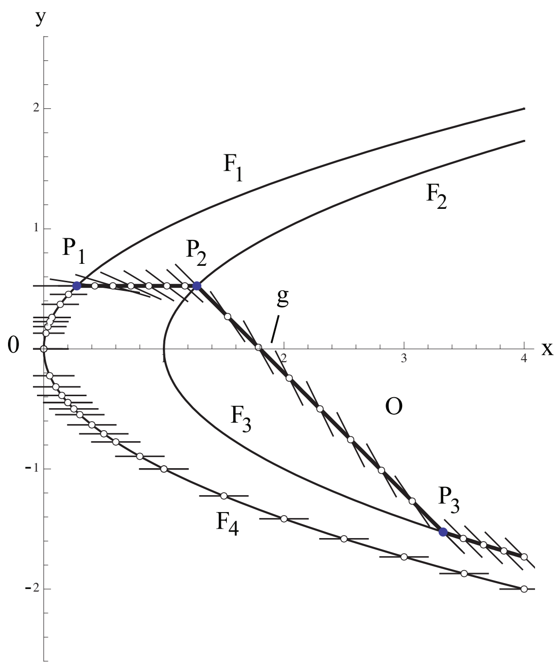

Abbildung 9: Zum Beweis von Satz 2. F_1: Graph von $\sqrt{x},\ x \geq 0$, F_2: Graph von $\sqrt{x-1},\ x \geq 1$, F_3: Graph von $-\sqrt{x-1},\ x \geq 1$, F_4: Graph von $-\sqrt{x},\ x \geq 0$.

Aber natürlich ist noch vieles offen: Eine in Abbildung 10 mit K bezeichnete Kurve scheint eine Art "Wasserscheide" darzustellen: Lösungskurven, die oberhalb von K starten, scheinen nach rechts einen Pol zu entwicken. Lösungskurven, die hingegen unterhalb von K starten, scheinen sich asymptotisch für $x \to \infty$ wie der Graph von $-\sqrt{x}$ zu verhalten. Lassen sich diese Vermutungen *beweisen*?

Im Rahmen der Arbeit in der Arbeitsgruppe haben wir tatsächlich einen Teil dieses Programms durchgeführt: Wir konnten für den ersten Quadranten die Existenz der Kurve K mit den gewünschten Eigenschaften beweisen. Dabei spielten obere und untere Schranken weiterhin eine zentrale Rolle[17].

6 Differentialgleichungen: Der Ursprung

Die Menschen haben schon vor Jahrtausenden angefangen sich Hilfsmittel zu ersinnen, die ihnen das Leben erleichterten. Und mit der Zeit haben sie dann auch angefangen nachzudenken, ohne auf einen direkten Nutzen aus zu sein, einfach so, weil das Nachdenken reizvoll ist. Was sich allerdings ab etwa 1600 entwickelte, scheint ohne vergleichbare Parallele in der Menschheitsgeschichte zu sein. Es ent-

[17] Für die Details siehe U. Kirchgraber: „Was ist eine Differentialgleichung? – Vom Begriff zur Geometrischen Theorie", ab ca. September 2009 auf www.educeth.ch vefügbar.

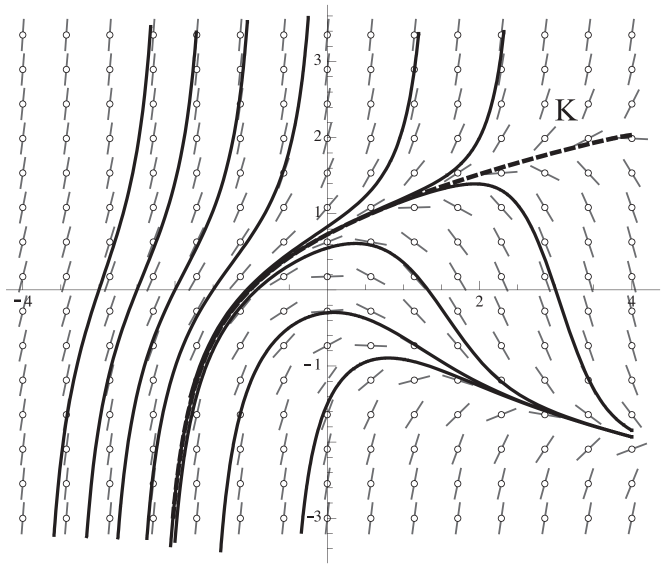

Abbildung 10: Computer-Plot zur Differentialgleichung $y'(x) = (y(x))^2 - x$.

faltete sich, was man die „wissenschaftliche Revolution“ nennt. Als Triebfeder gilt das sogenannte „Bewegungsproblem“ . Anlass waren einerseits Probleme aus der Praxis, die sich aus der erwachenden Maschinenbaukunst ergaben, andererseits war die Zeit offenbar reif, sich mit grundlegenden Fragen zu beschäftigen: Wie bewegt sich ein geworfener Stein[18], wie schwingt ein Pendel, wie bewegen sich die Planeten, lassen sich diese Bewegungen „erklären“? Während diese Fragen der Physik, genauer dem Teilgebiet der Physik, das man „Mechanik“ nennt, zuzuordnen sind, stellten allfällige Antworten gewaltige neue Anforderungen an eine Disziplin, die eigentlich bereits eine lange und erfolgreiche Entwicklung hinter sich hatte: die Mathematik.

Es ist nicht möglich hier diese Entwicklung auch nur halbwegs nach zu zeichnen. Aber ein paar Meilensteine müssen doch genannt werden:

- Im ersten Jahrzehnt des 17. Jahrhunderts entwickelt G. Galilei eine quantitative Theorie des „freien“ Falles, und im Gefolge davon des „vertikalen“ und „schiefen Wurfs“.
- In den ersten beiden Jahrzehnten des 17. Jahrhunderts wertet J. Kepler von T. Brahe gewonnene Beobachtungsdaten der Marsbahn aus und entdeckt die drei berühmten, nach ihm benannten Gesetze über die Bewegung der Planeten.
- In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts entstehen viele Vorarbeiten zur sogenannten „Differential- und Integralrechnung“, die dann in den nächsten

[18] oder eine Kanonenkugel!

zwei, drei Jahrzehnten durch I. Newton und G. Leibniz systematisiert und zu einem ersten Höhepunkt gebracht werden.

- Im Jahr 1687 erscheint die erste Auflage von Newtons „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" . Das Buch enthält die erste grosse physikalische Theorie der Geschichte: Eine Theorie der Bewegung. Newtons Grundhypothese ist: Bewegungen werden (im wesentlichen) durch Kräfte bestimmt. Die Pointe: Die Kräfte zu bestimmen[19] ist einfacher als die Bewegungen, die sie hervorrufen. Kein geringerer als A. Einstein bemerkte zu Newtons Einsicht *"Perhaps the greatest intellectual stride that it has ever been granted to any man to make."*

Was hat Newtons Theorie der Bewegung mit Differentialgleichungen zu tun?

Der Zusammenhang zwischen (wirkender) Kraft und Bewegung wird durch das sogenannte *Grundgesetz der Mechanik* hergestellt

$$m\,a = F \tag{40}$$

Diese Formel kennt jeder aus dem Physikunterricht: m bezeichnet die Masse des sich bewegenden Körpers, a seine Beschleunigung, F die wirkende Kraft. Die Formel mutet ausserordentlich harmlos an: Das Produkt zweier Grössen ist gleich der dritten. Der Schein trügt! Um zu verstehen dass sie es in sich hat, muss man genauer verstehen, was sie meint. Der einfachste Fall sind *Bewegungen eines Massenpunkts entlang einer Geraden* g, sogenannte *1-dimensionale Bewegungen.*

g sei orientiert, es sei ein Nullpunkt O festgelegt und eine Längeneinheit gewählt, sodass g zu einer „Achse" wird. Ferner stehe eine Uhr zu Verfügung. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich auf g. Es bezeichne $x(t)$ die Koordinaten des Punktes auf g, an dem sich der Massenpunkt zum Zeitpunkt t befindet. Aus der Differentialrechnung weiss man, dass die Ableitung $\dot{x}(t)$ von $x(t)$ die *Momentangeschwindigkeit* $v(t)$ des Massenpunkts zur Zeit t bedeutet:

$$v(t) := \dot{x}(t). \tag{41}$$

$v(t)$ ist ein Mass für die (momentane) „Ortsänderung" des Massenpunkts zum Zeitpunkt t. Von zentraler Bedeutung für Newtons Theorie der Bewegung ist die Ableitung $\dot{v}(t)$ von $v(t)$. Diese Grösse heisst momentane *Beschleunigung* des Massenpunkts zur Zeit t und wird mit $a(t)$ (für „Akzelleration") bezeichnet. Sie ist ein Mass für die (momentane) Geschwindigkeitsänderung des Massenpunkts:

$$a(t) := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t). \tag{42}$$

[19]Moderner: „zu modellieren".

Unter Verwendung von (42) lautet (40)

$$m\,\ddot{x}(t) = F(t). \tag{43}$$

Dabei wurde $F(t)$ statt F geschrieben, denn natürlich kann sich die wirkende Kraft im Laufe der Zeit ändern. Tatsächlich ist die Sache noch etwas komplizierter, wie sich bald zeigen wird. Die Meinung ist, dass die Beziehung (43) für alle Zeiten, oder jedenfalls für das Zeitintervall gilt, während dem die Bewegung beschrieben bzw. prognostiziert werden soll. Als einfache Anwendung der Newtonschen Bewegungstheorie wird ein sogenanntes *Feder-Masse-System* betrachtet.

Um eine Feder auseinander zu ziehen oder zusammen zu drücken, muss eine gewisse Kraft angewandt werden: Die Feder „widersetzt" sich gewissermassen, setzt der angewandten Kraft eine gleich grosse Kraft entgegen. Dabei ist die Erfahrung, dass die aufzuwendende Kraft umso grösser sein muss, je stärker die Feder ausgezogen bzw. zusammen gedrückt werden soll.

Robert Hooke (1635-1703) hat auf Grund von Experimenten den Zusammenhang zwischen der sogenannten Auslenkung x der Feder und der aufzuwendenden Kraft F ermittelt und gefunden, dass dieser Zusammenhang mindestens annähernd linear ist, das heisst, es gilt, s. Abbildung (11)

$$F = F(x) = -kx \tag{44}$$

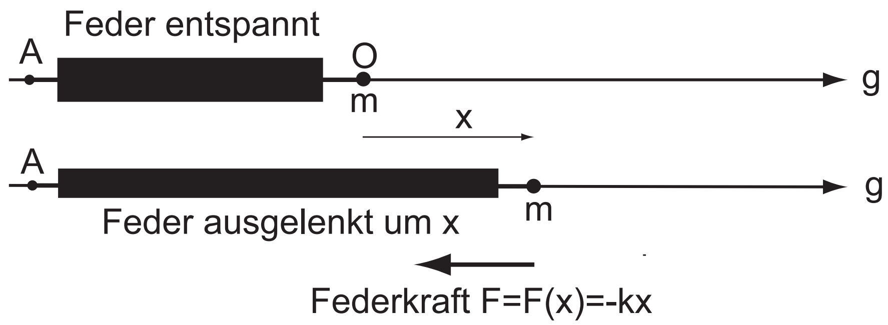

Abbildung 11: Ein System aus einer Feder (in der Figur als Rechteck dargestellt) und einem Massenpunkt. Die obere Hälfte des Bildes zeigt die Situation, wenn die Feder entspannt ist. Die untere Hälte des Bildes zeigt die Situation, wenn die Feder gespannt ist. Die Feder ist links am Punkt A auf g fest fixiert. Der Massenpunkt der Masse m befindet sich am rechten Ende der Feder. x ist die Koordinate des Orts, an dem sich der Massenpunkt befindet, bezogen auf Punkt O. Der Punkt O ist der Ort auf g, an dem sich der Massenpunkt befindet, wenn die Feder entspannt ist.

(44) heisst *Hookesches Federgesetz.* Die (positive) Konstante k nennt man *Federkonstante.* Es handelt sich dabei um eine sogenannte „Materialkonstante“, das heisst ihr Wert hängt vom Material ab, aus dem die Feder hergestellt ist. Das Minuszeichen in (44) ist nötig, um zum Ausdruck zu bringen, dass die Federkraft nach links wirkt, wenn x positiv ist, das heisst wenn die Feder ausgezogen ist. Wenn umgekehrt x negativ ist, die Feder also zusammen gedrückt ist, sorgt das Minuszeichen in (44) dafür, dass F positiv ist, die Federkraft also nach rechts wirkt.

In der Formulierung des Newtonschen Grundgesetzes (43) steht rechts $F(t)$, das heisst es wird angenommen, dass die auf den Massenpunkt wirkende Kraft F eine Funktion der Zeit t ist. Im Hookeschen Ansatz (44) für die Federkraft heisst es aber $F(x)$, womit zum Ausdruck gebracht wird, dass die Grösse der Kraft, mit der die Feder auf den Massenpunkt einwirkt von x, das heisst von der Grösse der Auslenkung der Feder, abhängt. Wie ist dieser Widerspruch zu verstehen und aufzulösen? Abbildung 11 kann man wie folgt interpretieren. Sie zeigt zwei Schnappschüsse: In der oberen Hälte des Bildes sieht man die Situation, wenn die Feder gerade entspannt ist, der Massenpunkt sich gerade im Nullpunkt der Geraden g befindet. Die untere Bildhälfte zeigt die Situation, in der die Auslenkung der Feder gerade den Wert x hat.

Wenn der Massenpunkt auf der Geraden g hin und her schwingt, dann ändert sich der Wert von x ständig. Befindet er sich zur Zeit t am Punkt mit der Koordinate $x(t)$, so übt die Feder eine Kraft der Grösse

$$F(t) = -kx(t) \tag{45}$$

auf den Massenpunkt aus und das Newtonsche Grundgesetz stiftet die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \tag{46}$$

Dabei wird die idealisierende Annahme gemacht, dass die Masse der Feder[20] so klein ist, dass sie vernachlässigt werden kann.

Man erkennt, dass das Newtonsche Grundgesetz zu einer ganz bestimmten Sorte von Gleichungen führt! (46) stellt einen Zusammenhang her zwischen der interessierenden Funktion $x(t)$ und ihrer zweiten Ableitung $\ddot{x}(t)$. Das ist eine gewöhnliche[21] Differentialgleichung, und zwar eine von *2. Ordnung*, weil die Ableitung höchster Ordnung, die vorkommt, von 2. Ordnung ist.

Übrigens werden nicht alle Federn durch die lineare Hookesche Gleichung (44)

[20]Im Vergleich zur Masse m des Massenpunkts.

[21]Der Zusatz „gewöhnlich“ wird gemacht, weil es noch einen anderen Typ von Differentialgleichungen gibt: sogenannte *partielle* Differentialgleichungen.

ausreichend gut modelliert. Man betrachtet auch sogenannte *nichtlineare Federmodelle.* Anstelle von (44) tritt dann zum Beispiel die folgende Annahme

$$F = F(x) = -(kx + \gamma x^3), \tag{47}$$

wobei γ positiv oder negativ sein kann und dem Betrag nach typischerweise klein ist. Wenn $\gamma > 0$ gilt, nennt man die Feder *hart* (weil eine grössere Kraft erforderlich ist um eine gewisse Auslenkung x zu erreichen, als im Fall $\gamma = 0$), andernfalls heisst die Feder *weich.* Legt man die Annahme (47) zu Grunde um die Bewegung eines schwingenden Massenpunkts der Masse m auf der Grundlage des Newtonschen Bewegungstheorie zu untersuchen, tritt an Stelle der Differentialgleichung (46) die folgende

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \gamma[x(t)]^3. \tag{48}$$

Doch bleiben wir bei einer linearen Hookeschen Feder und nehmen wir an, dass die Bewegung des Massenpunkts in Abbildung 11 noch durch eine *Dämpfungskraft* beeinflusst werde. Diese könnte durch ein Medium hervorgerufen werden, in dem sich der Massenpunkt bewegt, oder durch Reibung an einer Führungsschiene (die dafür sorgt, dass die Bewegung geradlinig, entlang von g erfolgt.)

Dämpfungs- und Reibungskräfte sind *geschwindigkeitsabhängig.* Am einfachsten ist die Annahme, die Dämpfungskraft F sei proportional zur Geschwindigkeit v mit der sich der Massenpunkt gerade bewegt

$$F = F(v) = -dv. \tag{49}$$

(Man mache sich klar, dass das Minuszeichen nötig ist, wenn die Dämpfungskraft die Bewegung hemmen soll.)

Da $x(t)$ den Ort angibt, an dem sich der sich bewegende Massenpunkt zur Zeit t befindet, und $v(t) = \dot{x}(t)$ seine momentane Geschwindigkeit zur Zeit t, lautet die zur Zeit t auf den Massenpunkt wirkende Kraft, die sich aus Feder- und Dämpfungskraft zusammen setzt

$$-kx(t) - d\dot{x}(t).$$

Mit dem Newtonschen Grundgesetz erhält man die folgende Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t),$$

die meist in der Form

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{50}$$

geschrieben wird.

Die Quintessenz: Die Beschreibung und Prognose von Bewegungen ist dank Newtons Bewegungstheorie primär eine mathematische Aufgabe: Es sind Differentialgleichungen zu untersuchen!

Das grosse Anliegen Newtons war, eine Theorie der Bewegungen der Planeten zu entwickeln. Durch die Postulierung des sogenannten *Gravitationsgesetzes*, wonach zwei Massenpunkte gegenseitig Anziehungskräfte aufeinander ausüben, deren Grösse proportional zum Produkt der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist, erreichte er dieses Ziel in famoser Weise. Auch den ersten grossen Test, der darin besteht die Keplerschen Gesetze aus dem Grundgesetz der Mechanik und dem Gravitationsgesetz unter der Annahme herzuleiten, dass das Planetensystem lediglich aus der Sonne und einem einzigen Planeten bestehe, konnte er erbringen. Auf Wunsch der Teilnehmenden in unserer Arbeitsgruppe haben wir in unserer letzten Sitzung im Rahmen der Sommerschule just diesen Nachweis ebenfalls geführt.

Die Frage allerdings, wie sich $N > 2$ Massenpunkte, die sich paarweise nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen, gemäss dem Grundgesetz der Mechanik über einen (sehr) langen Zeitraum bewegen, ist alles andere als abschliessend geklärt und deshalb ein faszinierender mathematischer Forschungsgegenstand, über den man einiges weiss, bei dem es aber noch viel mehr zu entdecken gibt. Hier wesentliche Fortschritte zu erzielen wird wohl Musse und Talent erfordern. Dringlicher sind zur Zeit Differentialgleichungsmodelle, die Prognosen über die Ausbreitung der etwas unheimlichen Schweinegrippe ermöglichen!