

# Simulation elektrischer Schaltungen

**mittels Modifizierter Knotenanalyse**

*Teilnehmer:*

Artur Stephan	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Andreas Dietrich	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Thomas Schoppe	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Maximilian Gruber	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Jacob Zschuppe	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Sven Wittig	Herder-Oberschule, Berlin

*Gruppenleiter:*

René Lamour	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
-------------	---

Um einen Schaltkreis und sein Verhalten zu analysieren, muss man ihn nicht zusammenlöten und messen, sondern kann ihn auch mathematisch simulieren. Da dies sehr rechenintensiv ist, ist die Verwendung eines Computers sinnvoll. Die dazu notwendigen Gleichungen werden hier abgeleitet.

# 1 Modifizierte Knotenanalyse

## 1.1 Grundlagen der Basisbauteile

Um einen elektrischen Schaltkreis untersuchen zu können, benötigen wir die physikalischen Grundlagen der Bauteile. Dabei haben wir festgestellt, dass man mittels Ohmschen Widerstands, Spule, Kondensators, Spannungs- und Stromquelle Ersatzschaltungen für alle anderen Bauelemente finden kann. Es ist also immer möglich, Schaltungen auf diese fünf Bauteile zurückzuführen.



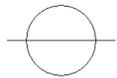
Ohmscher Widerstand Es gilt das Ohmsche Gesetz:  
 $R = \frac{U}{I} \Leftrightarrow G = R^{-1} = \frac{I}{U}$



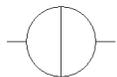
Kondensator Für den (idealen) Kondensator gilt:  
 $I = C \cdot \dot{U}$



Spule Bei der (idealen) Spule ist  
 $U = L \cdot \dot{I}$



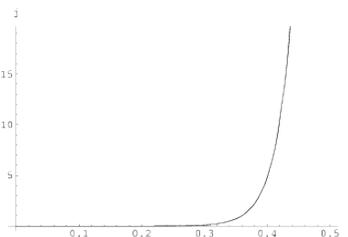
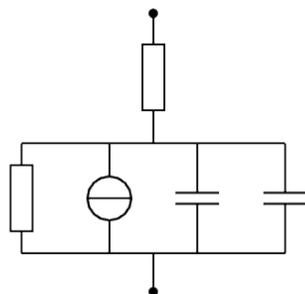
Spannungsquelle  $u = u(t)$



Stromquelle  $i = i(t)$

Als Beispiel für ein Ersatzschaltbild haben wir die Diode betrachtet, die bis zu einer Grenzspannung  $U_G$  einen sehr hohen Widerstand hat und sich danach im Idealfall wie ein Ohmscher Widerstand verhält, d.h.  $(U - U_G) I$ .

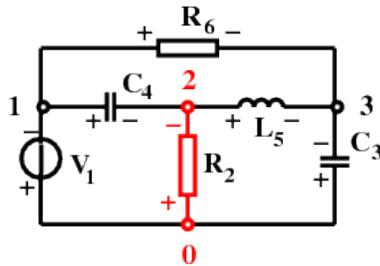
Ein mögliches Ersatzschaltbild, welches das Verhalten der Diode annähernd imitiert, und die dazugehörige Kennlinie sähen z.B. so aus:



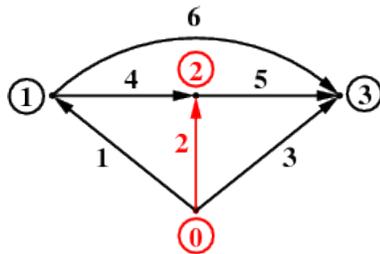
## 1.2 Netzwerktopologie

### 1.2.1 Schaltkreis modellieren

Ein jeder Schaltkreis kann mit Hilfe der Graphentheorie vereinfacht dargestellt werden. Nehmen wir zur Veranschaulichung ein Beispiel.



Nun werden an Verzweigungen bzw. zwischen zwei Bauteilen Knoten gelegt, so dass zwischen zwei Knoten immer genau ein Bauteil liegt. Des weiteren geben wir jeder Verbindung zwischen den Knoten eine Richtung. Da ein Pfeil immer nur durch ein Bauteil geht, steht er stellvertretend für den Strom im Bauteil.



### 1.2.2 Inzidenzmatrix

Unter Zuhilfenahme dieses Graphen lässt sich nun eine Inzidenzmatrix aufstellen, die die Struktur vollständig wiedergibt. Dabei gelten folgende Regeln zum Aufstellen:

- 1 - Pfeil zeigt vom entsprechenden Knoten weg
- 0 - Pfeil hat keine Verbindung zum entsprechenden Knoten
- 1 - Pfeil zeigt auf den entsprechenden Knoten hin

$$\bar{A} = \begin{array}{cccccc|c} I_1 & R_2 & C_3 & C_4 & L_5 & R_6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}$$

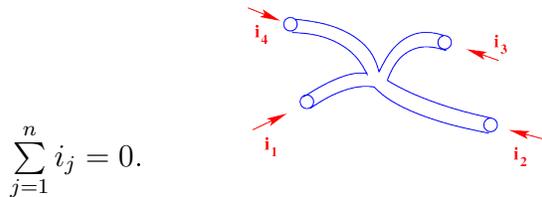
Wie man gut erkennen kann, lässt sich jede Zeile vollständig durch die verbleibenden wiederherstellen. Daher lässt man eine Zeile (im Beispiel die erste) weg und erhält die eigentliche Inzidenzmatrix  $A$ . Der weggelassene Knoten sei der Masseknoten und erhält daher das Potenzial  $e_0 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 1.3 Kirchhoffsche Gesetze

### 1.3.1 Knotensatz

Allgemein besagt der Knotensatz, dass die Summe aller Ströme in einem Knoten gleich null ist. Es fließt also genauso viel Strom zum Knoten, wie auch wieder weg.



$$\sum_{j=1}^n i_j = 0.$$

### 1.3.2 Verbindung von Knotensatzes und Inzidenzmatrix

	Knoten	
	0	$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$
Der Knotensatz gilt in unserem Beispiel in jedem Knoten:	1	$-i_1 + i_4 + i_6 = 0,$
	2	$-i_2 - i_4 + i_5 = 0,$
	3	$-i_3 - i_5 - i_6 = 0.$

Sei nun  $i$  der Vektor, der die Stromstärken enthält, also

$$i^T = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6).$$

Das obige Gleichungssystem kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{A} \cdot i = \begin{pmatrix} i_1 + i_2 + i_3 + 0 + 0 + 0 \\ -i_1 + 0 + 0 + i_4 + 0 + i_6 \\ 0 - i_2 + 0 - i_4 + i_5 + 0 \\ 0 + 0 - i_3 + 0 - i_5 - i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

sodass auch

$$A \cdot i = \vec{0} \tag{1}$$

gilt.

### 1.3.3 Herleitung einer passenden DAE

Gesucht ist ein System von Differential-algebraischen Gleichungen (DAE), das den zeitlichen Verlauf der unbekanntenen Größen beschreibt.

Wie im Schaltbild zu erkennen, sind die Knoten nummeriert. Die Spannungen an den Bauelementen ergeben sich somit als Differenzen der Potentiale der angrenzenden Knoten:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_0 - e_1, \\ u_2 &= e_0 - e_2, \\ u_3 &= e_0 - e_3, \\ u_4 &= e_1 - e_2, \\ u_5 &= e_2 - e_3, \\ u_6 &= e_1 - e_3. \end{aligned}$$

Sei  $e$  der Vektor der Potentiale  $e_1 \dots e_3$ , wobei  $e_0 = 0$  ist, und  $u$  der Vektor der Spannungen  $u_1 \dots u_6$ . Dann ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 + 0 + 0 \\ 0 - e_2 + 0 \\ 0 + 0 - e_3 \\ e_1 - e_2 + 0 \\ 0 + e_2 - e_3 \\ e_1 + 0 - e_3 \end{pmatrix} = A^T \cdot e.$$

Es ist also

$$A^T \cdot e = u. \tag{2}$$

Für unser Beispiel gelten darüber hinaus die entsprechenden Formeln aus der Tabelle:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= i_1(t) \\
 i_2 &= G_2 \cdot u_2 \\
 i_3 &= C_3 \cdot \dot{u}_3 \\
 i_4 &= C_4 \cdot \dot{u}_4 \\
 u_5 &= L_5 \cdot i'_5 \\
 i_6 &= G_6 \cdot u_6
 \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein und behält die Gleichung für die Spule bei, so ergibt sich ein System von Differentialgleichungen mit den gesuchten Größen  $e_1, e_2, e_3$  und  $i_5$ :

$$\begin{array}{rcl}
 -i_1(t) + C_4 \cdot \dot{u}_4 + G_6 \cdot u_6 = 0 & & -i_1(t) + C_4 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{e}_2) + G_6 \cdot (e_1 - e_3) = 0 \\
 -G_2 \cdot u_2 - C_4 \cdot \dot{u}_4 + i_5 = 0 & \stackrel{(2)}{\iff} & G_2 \cdot e_2 - C_4 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{e}_2) + i_5 = 0 \\
 -C_3 \cdot \dot{u}_3 - i_5 - G_6 \cdot u_6 = 0 & & C_3 \cdot \dot{e}_3 - i_5 - G_6 \cdot (e_1 - e_3) = 0 \\
 u_5 - L \cdot i'_5 = 0 & & (e_2 - e_3) - L_5 \cdot i'_5 = 0
 \end{array}$$

## 1.4 Modifizierte Knotenanalyse

Da reale Schaltungen im allgemeinen aus vielen hundert bis Millionen Bauteilen bestehen, gibt man folgende allgemeine Form der Inzidenzmatrix an:

$$A = (A_C \quad A_R \quad A_L \quad A_U \quad A_I).$$

Dabei sind die einzelnen  $A_X$  Matrizen, die wiederum aus den Spaltenvektoren jedes einzelnen Bauteils aufgebaut sind (und somit angeben, zwischen welchen Knoten welches Bauteil liegt).

Multipliziert man nun die allgemeine Inzidenzmatrix mit dem Vektor aller Stromstärken, so ergibt sich folgendes System von Gleichungen. Dabei ist  $C$  eine Matrix mit den einzelnen Kapazitäten auf der Hauptdiagonalen und  $G$  analog dazu eine Matrix mit den Kehrwerten der Widerstände.

$$\begin{aligned}
 A &= (A_C \quad A_R \quad A_L \quad A_U \quad A_I) \\
 i^T &= (i_C \quad i_R \quad i_L \quad i_U \quad i_I) \\
 Ai &= \vec{0} \quad \text{(Knotensatz)} \\
 \vec{0} &= A_C i_C + A_R i_R + A_L i_L + A_U i_U + A_I i_I
 \end{aligned}$$

$$A_C C A_C^T \dot{e} + A_R G A_R^T e + A_L i_L + A_U i_U + A_I i_I = \vec{0} \quad (3)$$

$$A_L^T e = L i'_L \quad (4)$$

$$A_U^T e = u(t) \quad (5)$$

## 2 Numerische Integration von Differentialgleichungen

Bei der Modifizierten Knotenanalyse liegen nun Systeme von DAEs vor, die im Falle von Index-1-Gleichungen in Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführt werden können, also Differentialgleichungen, in denen nur eine unabhängige Variable vorkommt. Diese haben im Allgemeinen die Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),$$

wobei  $x(t)$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$  und  $t$  aus einem gegebenen Intervall sind, also

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \end{pmatrix}.$$

Dieses Differentialgleichungssystem lässt sich durch Integrieren wie folgt umformen:

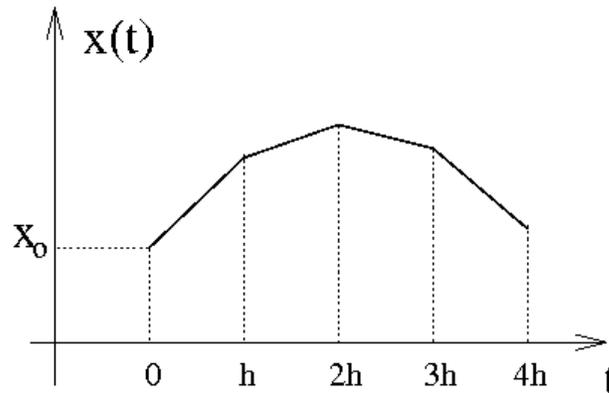
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t), \\ \Rightarrow \int_0^t \dot{x}(\xi) d\xi &= \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi, \\ \Rightarrow x(t) - x(0) &= \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi, \\ \Rightarrow x(t) &= x(0) + \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (ODE) von dem Anfangswert  $x(0) = x_0$  abhängt und nur durch ihn eindeutig bestimmt werden kann.

Die folgenden beiden Lösungsverfahren approximieren schrittweise die Lösung  $x(t)$  des Differentialgleichungssystems.

### 2.1 Das Explizite Eulerverfahren

Das Explizite Eulerverfahren nähert die Lösung von Differentialgleichungssystemen durch die Zusammensetzung von kleinen Teilstrecken an. Durch das gegebene System ist der Anstieg  $f(x(t), t) = \dot{x}(t)$  in jedem Punkt bekannt. Angefangen mit



dem Anfangswert  $x_0$  erhält man einen neuen Punkt, indem man dem Anstieg ein kleines Stück  $h$  folgt. So wird das gesamte Intervall durchschritten, wodurch eine Annäherung der Lösung  $x(t)$  erzielt wird. Dadurch ergibt sich folgende rekursive Bildungsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i).$$

Je kleiner  $h$  gewählt wird, desto genauer wird die Approximation.

Die selbe Formel ergibt sich aus einer bekannten Näherungsformel für die Integralberechnung, die linke Rechteckregel.

Zum Zeitpunkt  $h$  gilt die bereits erwähnten Formel  $x(h) = x(0) + \int_0^h f(x(\xi), \xi)d\xi$ .

Nun ist für kleine  $h$  das Integral  $\int_0^h f(x(\xi), \xi)d\xi$  ungefähr  $hf(x_0, t_0)$ . Ebenso kann

jedes Integral  $\int_{ih}^{(i+1)h} f(x(\xi), \xi)d\xi$  durch  $hf(x_i, t_i)$  angenähert werden, was die Formel  $x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$  ergibt.

## 2.2 Die Implizite Trapezregel

Offensichtlich ist die Abschätzung der linken Rechteckregel nicht die beste Approximation für Integrale. So kann durch die Trapezregel, bei der das Integral durch kleine Trapeze anstelle von Rechtecken angenähert wird, eine bessere Abschätzung erfolgen. Der Flächeninhalt eines Trapezes berechnet sich aus dem Produkt der Höhe und dem arithmetischen Mittel der Längen der parallelen Seiten. So ergibt sich analog zum Eulerverfahren die Formel

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1})).$$

Dieses Verfahren ist im Gegensatz zum expliziten Eulerverfahren implizit, da der unbekannte Vektor  $x_{i+1}$  auf beiden Seiten der Gleichung auftaucht und sich dadurch nicht so leicht berechnen lässt. Formt man die Gleichung zu

$$F(x_{i+1}) = x_{i+1} - x_i - \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1})) = 0$$

um, so erhält man ein äquivalentes Problem, die Nullstellenbestimmung einer Funktion. Die Lösung der Gleichung  $F(x_{i+1}) = 0$  kann mit Hilfe des Newtonverfahrens ermittelt werden. Die iterative Bildungsvorschrift lautet

$$x_{i+1} = x_i - (F'(x_i))^{-1}F(x_i).$$

Da  $x$  und  $F$   $n$ -dimensionale Vektoren sind, ergeben sich einige kleine Schwierigkeiten, die sich jedoch beheben lassen. So kann zum Beispiel keine Division durchgeführt werden, stattdessen lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F'(x_i)z &= F(x_i) \\ x_{i+1} &= x_i - z. \end{aligned}$$

Außerdem muss  $F'(x)$  über eine Jacobi-Matrix, der Matrix der partiellen Ableitungen  $\frac{Df}{Dx} = \left(\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_l}\right)$ , berechnet werden. Dann ist

$$F'(x_{i+1}) = I - \frac{h}{2} \frac{Df(x_{i+1}, t_{i+1})}{Dx},$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix ist.

Erstaunlicherweise kann man zeigen, dass nach genau einem Schritt der Fehler des Newtonverfahrens in der Größenordnung des Fehlers der Trapezregel ist.

Als Startwert wird der bereits bekannte Wert  $x_i$  benutzt.

## 3 Beispiele

Die oben beschriebenen Verfahren wurden in MATLAB implementiert. Um nun konkrete Schaltungen simulieren zu können, muss für die jeweilige Schaltung das Differentialgleichungssystem und die zugehörige JACOBI-Matrix aufgestellt und in Matlab-Code überführt werden. Dies wurde exemplarisch für zwei verschiedene Schaltungen durchgeführt.

### 3.1 RCL-Schwingkreis

Der untersuchte Schwingkreis Abb. 1 besteht aus konstanten Widerstand  $R$ , Kapazität  $C$ , Induktivität  $L$  und einer zeitlich abhängigen Spannungsquelle  $v(t)$ . Mit dieser allgemeinen Schaltung lässt sich sowohl der ungedämpfte ( $R = 0$ ) als auch der gedämpfte Fall ( $R \neq 0$ ) simulieren.

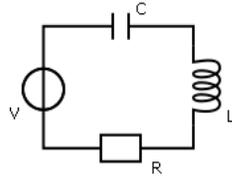


Abbildung 1: RCL-Schwingkreis

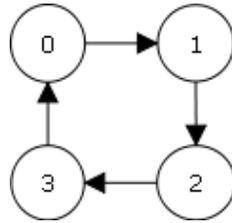


Abbildung 2: Topologie des Schwingkreises

### 3.1.1 Modifizierte Knotenanalyse

Für den Schwingkreis wird zunächst eine modifizierte Knotenanalyse nach Abschnitt 1.4 durchgeführt. Aus Abbildung 1 ergibt sich die Netzwerktopologie wie in Abbildung 2 dargestellt, mit der sich die Inzidenzmatrix  $A$  aufstellen lässt (Die Spalten bezeichnen die Bauteile  $V$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $R$ , die Zeilen die Knoten 1, 2 und 3.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der besprochenen Gleichungen (KIRCHHOFFSche Gesetze) ermittelt sich

für das betrachtete Potenzial  $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$  und den Strom  $i = \begin{pmatrix} i_v \\ i_C \\ i_L \\ i_R \end{pmatrix}$  das Differentialgleichungssystem zu

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} * i_L \\ \frac{1}{L} * (e_1 - (R * i_L + v(t))) \end{pmatrix},$$

sowie die zugehörige Jacobi-Matrix zu

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}.$$

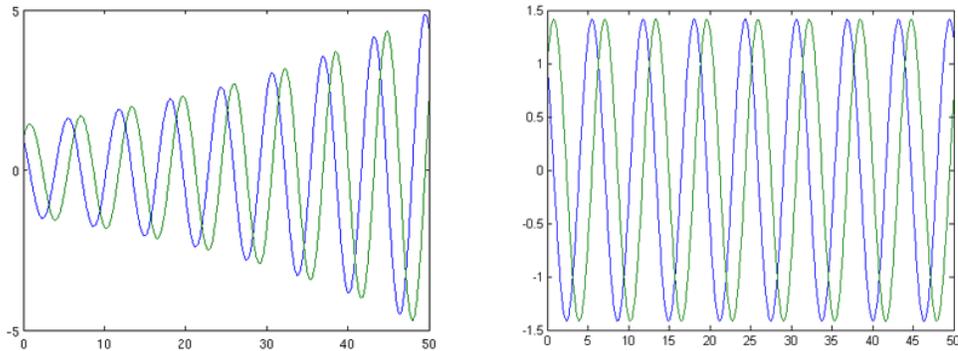


Abbildung 3: Vergleich EULER- und Trapezverfahren

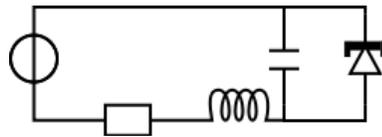


Abbildung 4: Tunnelnioden-Oszillator

### 3.1.2 Simulation in MATLAB

Mit den erhaltenen Gleichungen wird in Matlab das Verhalten der Schaltung bei verschiedenen Parametern (Bauteilkonstanten) simuliert. Die beiden Integrationsverfahren liefern unter Verwendung gleicher Parameter ( $R = 0$ ,  $C = 1$ ,  $L = 1$ ,  $v(t) = 0$ ) die Ergebnisse wie in Abbildung 3. Wie man sieht, unterscheiden sich die Ergebnisse der beiden Verfahren. Während die Simulation mittels der impliziten Trapezregel das Verhalten der Schaltung physikalisch korrekt wiedergibt, wächst beim EULER-Verfahren die Amplitude mit der Zeit an, was bedeuten würde, dass dem System Energie “zugeführt wird”. Dieser Effekt ist zurückzuführen auf den Fehler, der bei jedem Approximationsschritt im EULER-Verfahren besteht. Da die Trapezregel diesen Verfahrensfehler nicht aufweist, liefert sie das bessere Ergebnis.

## 3.2 Tunnelnioden-Oszillator

Für den Tunnelnioden-Oszillator gilt nach [1] das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} * (u_1 - u_2) + \dot{u}_{op} \\ -\frac{1}{R} * (u_1 - u_{op}) + f(u_2) \end{pmatrix}$$

mit der Diodenkennlinie  $f(u) = a_1 * u + a_2 * u^2 + a_3 * u^3$  (Die bauteilspezifischen Koeffizienten sind  $a_1=1,80048$ ,  $a_2=-8,766$ ,  $a_3=10,8$ ).

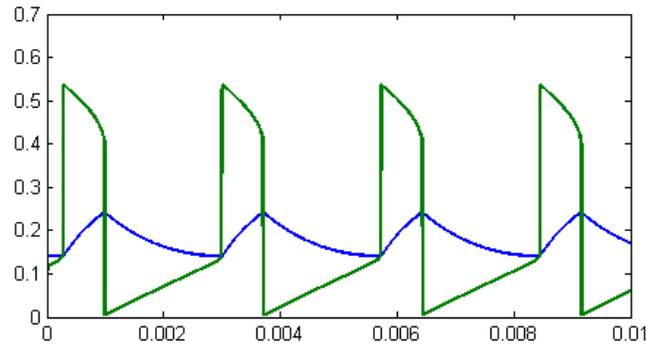


Abbildung 5: Spannungsverlauf Tunnel-Dioden-Oszillator

Da der Oszillator eine sehr hohe Schwingungsfrequenz hat, muss, um einzelne Schwingungen erkennbar zu machen, ein sehr kleines Zeitintervall gewählt werden (im Beispiel  $10^{-2}$ s). Außerdem muss eine sehr kleine Approximationsschrittweite gewählt werden, um die technisch realistisch gesetzten Bauteilkonstanten ( $C = 10^{-7}$  F,  $L = 2 * 10^{-3}$  H,  $R = 1\Omega$ ,  $u_{op} = 0,25$  V) bei der Rechnung auszugleichen.

## Literatur

- [1] W. Kampowsky, P. Rentrop, W. Schmidt. Classification and numerical simulation of electric circuits. *Surv. Math. Ind.* (1992)2, 23–65.