Matrixspiele und Brouwer-Fixpunkte

Zusammenhänge und Lösungsverfahren

Teilnehmer:

Jorin Diemer	Herder-Oberschule
Jakob Dobberow	Immanuel-Kant-Oberschule
Michael Schneider	Herder-Oberschule
Marlene Schulz	Herder-Oberschule
Alexandra Stepanova	Herder-Oberschule
Artur Stephan	Heinrich-Hertz-Oberschule

Gruppenleiter:

Bernd Kummer	Humboldt-Universität zu Berlin

1 Einleitung

Zwischen (Brouwer-) Fixpunkten und Spiele gibt es viele Zusammenhänge. Am einfachsten sieht man das anhand von Matrixspielen. Die Lösungen sind dann Fixpunkte einer speziell konstruierten Funktion.

Wir befassten uns mit 2 Beweisen des Brouwerschen Fixpunktsatzes (ein destruktiver, aber schöner, mittels des Sperner Lemmas und ein konstruktiver). Daneben haben wir davon überzeugt, dass der Brouwer-Satz zu zwei anderen, einfach formulierbaren Aussagen equivalent ist: Dem Retraktsatz für die Kugel und dem sogenannten Arbeitslemma. Ausserdem betrachteten wir einen klassischen Algorithmus von Julia Robinson zur Lösung von Matrixspielen. Er kann ebenso wie der konstruktive Fixpunktalgorithmus als Lösungsmethode für Spiele fungieren. So können beide Algorithmen direkt verglichen werden.

2 Matrixspiel

Es sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten; (m, n) Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Das entsprechende Matrixspiel erfolgt so: Spieler 1 wählt eine Zeile i, Spieler 2 (ohne i zu kennen) eine Spalte j. Im Ergebnis bekommt Spieler 1 den Gewinn $a_{i,j}$ von Spieler 2.

Beispiel Stein-Schere-Papier:

$$A = \begin{pmatrix} GEWINN & Stein & Schere & Papier \\ Stein & 0 & 1 & -1 \\ Schere & -1 & 0 & 1 \\ Papier & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man stelle sich vor, das Spiel werde oft gespielt. Dann kann Spieler 1 seine Strategien i mit gewissen Wahscheinlichkeiten (relat. Häufigkeiten) x_i wählen ($x_i \geq 0, \sum x_i = 1$). Gleiches gilt für Spieler 2, seine Wahscheinlichkeiten seien y_j ($y_j \geq 0, \sum y_j = 1$). Bei unabhängiger Wahl von $x = (x_1, ..., x_m)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$ wird dann

$$q(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j$$

der *Erwartungswert* des Gewinns für Spieler 1.
Gleichgewicht:

Betrachte zulässige x, y und $\bar{x}, \bar{y}$. Dann heißt $(\bar{x}, \bar{y})$ ein Gleichgewichtspaar, wenn gilt

$$q(x, \bar{y}) \leq q(\bar{x}, \bar{y}) \leq q(\bar{x}, y) \qquad \forall x, y.$$

Wenn Spieler 1 von $\bar{x}$ abweicht, erhält er nicht mehr. Wenn Spieler 2 von $\bar{y}$ abweicht, verliert er höchstens mehr.

Ein Matrixspiel heißt schiefsymmetrisch, wenn

$$m = n \text{ und } \ a_{i,j} = -a_{j,i} \ \forall i, j.$$

Dann ist stets $q(x, x) = 0$, was zu Vereinfachungen führt.

Insbesondere folgt leicht:
y ist Bestandteil eines GGW-Paares (x, y) genau dann, wenn

$$z_i(y) := \sum_j a_{i,j} \ y_j \leq 0 \ \forall i = 1, ..., n, \qquad \sum_j y_j = 1, \ y_j \geq 0 \ \forall j. \tag{2}$$

Man hat also nur ein System linearer Gleichungen und Ungleichungen zu lösen.

3 Brouwers Fixpunktsatz

Wir brauchen folgende Begriffe für Mengen und Punkte im R^n(kennzeichnet alle reellen n-Tupel $x = (x_1, ..., x_n)$). Eine Teilmenge $M \subset R^n$ heisst
-*konvex*, wenn für beliebige 2 Punkte $x, y \in M$ auch die Verbindungsstrecke in M enthalten ist. Sie besteht aus allen Punkten der Form $z = \lambda x + (1-\lambda) y, \ 0 \leq \lambda \leq 1$;
-*abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält;
-*beschränkt*, wenn M in einer (hinreichend grossen) Kugel um den Ursprung enthalten ist.

Brouwers Fixpunktsatz (ca 1915):
Es sei C eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge und $f : C \to C$ eine stetige Funktion. Dann existiert (wenigstens) ein $x \in C$ mit $f(x) = x$.

4 Simplex als spezielles C

Für m Punkte $P^i \in R^n$ sei definiert:
$x \in conv \ \{P^1, ..., P^m\}$ falls $\exists \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, ..., m)$ mit $\sum \lambda_i = 1$ und

$$x = \sum_i \lambda_i P^i. \tag{3}$$

Die Menge *conv* $\{P^1, ..., P^m\}$ heißt konvexe Hülle der Punkte $P^1, ..., P^m$. Sind die λ_i aus (3) stets eindeutig (für alle $x \in conv\ \{P^1, ..., P^m\}$), so sagt man, dass die Punkte ein *Simplex* bilden. Algebraisch bedeutet das:
Aus

$$\sum_i \lambda_i P^i = 0 \text{ und } \sum_i \lambda_i = 0$$

folgt, dass alle λ_i Null sind. In diesem Fall ist $\lambda = \lambda(x)$ stetig (dies nachzurechnen ist etwas mühsam, aber nicht schwierig).

Es reicht (wieso siehe Abschnitt Projektion), Brouwer's Satz für Simplizes zu beweisen, deshalb sei von jetzt an C ein Simplex.

Dann ist auch $f(x) \in conv\ \{P^1, ..., P^m\}$ und kann ebenso geschrieben werden.

$$f(x) = \sum_i \alpha_i P^i \tag{4}$$

(α ersetzt jetzt λ). Damit gilt:

$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i(x) \geq \alpha_i(x)\ \forall i,$$

weil aus $\lambda_i(x) \geq \alpha_i(x) \forall i$ wegen der Summenbedingung sofort $\lambda_i(x) = \alpha_i(x)$ folgt.

Idee: Suche m Punkte $x^i \in C$ die erstens nahe beeinander liegen und zweitens

$$\lambda_i(x^i) \geq \alpha_i(x^i) \quad (i = 1, ..., m)$$

erfüllen.

Die anderen Ungleichung sind dann von x^i noch immer bis auf ein ε erfüllt (gleichmäßige Stetigkeit und Abstand zwischen x^i und x^j ist klein). Das ε kann man schließlich (im Limes) zu Null machen, wenn nur die x^i alle in einer hinreichend kleinen Kugel liegen).

Wichtig ist zunächst: Für jedes $x \in C$ ist wenigstens eine der Ungleichungen $\lambda_i(x) \geq \alpha_i(x)$ erfüllt. Andernfalls hätten wir $\lambda_i(x) < \alpha_i(x)\ \forall i$. Damit folgte der Widerspruch $1 = \sum_i \lambda_i(x) < \sum_i \alpha_i(x)\ \forall i = 1$.

5 Sperner's Lemma

Um die entscheidenden x^i zu finden, wird C in spezieller Weise unterteilt.

Die Unterteilungen definiert man induktiv mit Hilfe einer Randunterteilung und des Schwerpunktes $s = \frac{\sum P^i}{m}$ eines Simplex wie im Bild.

Teilsimplizes mit den Nummern $1, 2, .., m$ *heißen normal.*
Die zugeordnete Nr. i bedeutet für einen Unterteilungspunkt x: die i-te Ungleichung $\lambda_i(x) \geq \alpha_i(x)$ *ist erfüllt.*

Wir brauchen die Existenz wenigstens eines normalen Teilsimplex für jede Unterteilung.

Sperner's Lemma (ca 1912): Die Anzahl normaler Teilsimplizes ist UNGERADE.
Beweis:
Betrachte Teilsimplizes $T(k)$ und definiere: Eine ausgezeichnete Seite ist eine Seite eines Teilsimplex' $T(k)$ mit zugeordneten Werten $1, ..., m-1$. "Normales"$T(k)$: zugeordnete Werte sind $1, ..., m$.

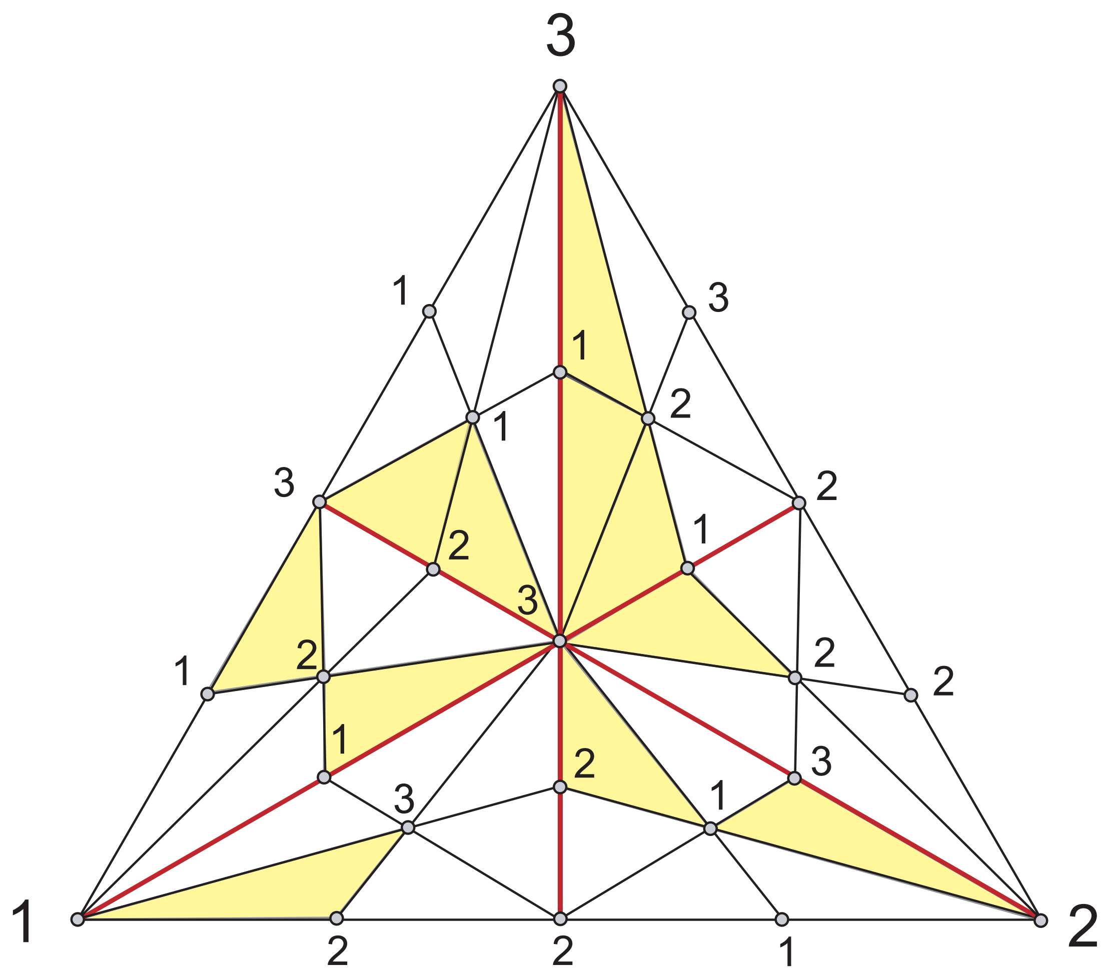

Abbildung 1: Unterteilung des Simplex und 11 normale Teilsimplizes

Für $C = \ conv \ \{P_1\}$ ist die Aussage trivial. Sie sei für $C = \ conv \ \{P_1, ..., P_{m-1}\}$ bereits bewiesen.

Idee: Sehen und gesehen werden !
1) sehen: Wir laufen durch alle $T(k)$ und zählen die dort zu sehenden ausgezeichneten Seiten σ. Das seien $t(k)$ Stück. Sei

$$a = \sum t(k).$$

Wenn $T(k)$ normal, ist offenbar $t(k) = 1$. Sonst: $t(k) = 0$ oder $t(k) = 2$. Also gilt

a ist gerade $\Leftrightarrow$ die Anzahl normaler $T(k)$ ist gerade.
2) gesehen werden:
Wir fragen nun, wie oft eine ausgezeichnete Seite σ gezählt wurde.

Fall 1: σ liegt in der Original- Simplexseite der Knoten $P_1, ..., P_{m-1}$: Genau einmal.

Fall 2: σ liegt nicht in dieser Simplexseite: Dann liegt sie wegen der Zulässigkeits-Bedingung auch in keiner anderen Seite des Originalsimplex S. Sie wird deshalb von genau zwei Teilsimplizes $T(k), T(k')$ aus gesehen (die an der Seite σ gespiegelt sind). Bezeichnet b_1 und b_2 die Anzahl der ausgezeichneten Seiten zu beiden Fällen, folgt also

$$a = b_1 + 2b_2.$$

Damit ist a gerade $\longleftrightarrow$ b_1 gerade.

Nun ist b_1 zugleich die Anzahl normaler Teilsimplizes in einem Simplex kleinerer Dimension. Daher ist b_1 ungerade, folglich auch a, was zu zeigen war. Tatsächlich ließ sich diese schärfere Aussage leichter beweisen als die, die wir brauchen.

Gesamtbeweis: Wir haben dann bei entsprechend feiner Unterteilung je ein normales Teilsimplex , wo die Ungleichungen bis auf $\varepsilon_k \to 0$ erfüllt sind. Mit einem y^k, das mit irgendeinem der x^i des Teilsimplex zusammenfällt, sind dann die Ungl. bis auf ε_k erfüllt. Für eine unendl. Teilfolge konvergieren die y^k gegen ein $\bar{y}$. Das gehört wegen der Abgeschlossenheit zu C und ist nun ein Fixpunkt, weil der Fehler hier Null ist.

Beweis im Wesentlichen nach [1].

6 Anderes (konstruktives) Vorgehen

Andere Teilsimplizes und eine andere Indexfunktion führen sogar zu einem Weg zu einem normalen Teilsimplex. Jetzt interessieren wir uns für diejenigen i mit

$$\lambda_i(x) \leq \alpha_i(x).$$

Wieder reicht es uns ein x zu finden, so dass $\lambda_i(x) \leq \alpha_i(x)\ \forall i$. Für jedes x mit $\lambda_i(x) = 0$ ist Ungleichung i offenbar erfüllt. Deshalb bekommen diese Punkte die Nummer i. Für die anderen wählen wir irgendein passendes i. Das führt zur zweiten angegebenen Nummerierung und der entsprechenden Unterteilung des Simplex. Ecken und Kanten werden *abgefeilt*. Wir starten in der Ecke gegenüber P^m, wo die Nummern $1, ..., m-1$ schon auftreten. Anschließend laufen wir durch ausgezeichnete Seiten (mit Nr. 1,...,m-1). Da es keinen Zyklus geben kann, bricht die Prozedur in einem normalen Teilsimplex ab (für höhere Dimensionen ist der Beweis technisch schwieriger als der von Sperner; Idee stammt von Scarf und Hoang Tuy).

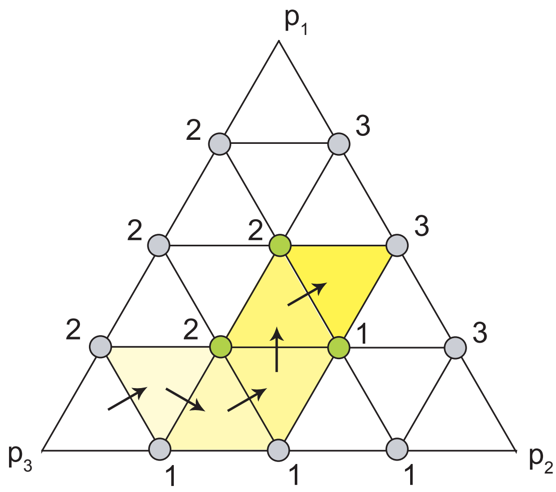

Abbildung 2: Weg zu einem normalen Teilsimplex

7 Projektion

Ist C eine beliebige konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge, dann wählen wir ein Simplex S, das C enhält. Für jedes $x \in S$ sei $\pi(x)$ derjenige Punkt aus C, der den kleinsten (Euklidischen) Abstand zu x hat. Wegen der Voraussetzungen an C ist $\pi(x)$ eindeutig und wiederum stetig (ein technischer Beweis, den wir weglassen). Damit kann man definieren:

$$F(x) = f(\pi(x)),$$

was wieder Werte in C hat und S stetig in S abbildet. Also hat nun F einen Fixpunkt. Aus $x = F(x)$ folgt aber $x \in C$, also auch $\pi(x) = x \in C$ und damit schließlich $f(x) = x$.

8 Fixpunkt und schiefsymmetrisches Matrixspiel

Man bilde mit $C = \{\ y \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0\ \forall j\ \}$

$$z_i(y) = \sum_j a_{i,j}\ y_j, \quad \text{wobei} \quad \sum_j y_j = 1,\ y_j \geq 0 \quad \forall j,$$

$$z_i^+ = \max\{0, z_i\}, \qquad s(y) = \sum_i z_i^+,$$

$$y_i' = \frac{y_i + z_i^+}{1 + s(y)} \quad \forall i, \quad \text{sowie schließlich} \quad f(y) = (y_1', ..., y_n').$$

Man sieht leicht, dass $f(y) \in C$ gilt und f, aus stetigen Funktionen gebildet, wieder stetig ist.

Den Zusammenhang zwischen Fixpunkten und Lösungen des Spiels stellt nun diese Aussage her: $\quad y = f(y) \Longleftrightarrow y$ ist eine Lösung von

$$z_i(y) := \sum_j a_{i,j}\ y_j \leq 0\ \forall i = 1, ..., n, \qquad y \in C. \tag{5}$$

Beweis:
Ist y eine Lösung des Spiels, sind alle z_i^+ und $s(y)$ Null. Also folgt $y' = y$. Umgekehrt: Sei $y' = y$. Dann folgt

$$\begin{array}{ll} y_i(1 + s(y)) = y_i + z_i^+ & \forall i, \\ y_i s(y) = z_i^+ & \forall i. \end{array}$$

Ist $s(y) = 0$, haben wir wie verlangt eine Lösung von (5); sei $s(y) > 0$. Dann ist $y_i > 0 \Leftrightarrow z_i > 0$. Wir multiplizieren mit y_i, summieren über diese i und erhalten:

$$\begin{array}{l} 0 < s(y) \sum_{i:\ y_i>0} y_i \\ = \sum_{i:\ y_i>0} y_i\ z_i \\ = \sum_{i:\ y_i>0} y_i\ (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ y_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} \quad y_i\ (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ y_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ y_i\ y_j \\ = \ q(y, y). \end{array}$$

Im schiefsymmetrischen Spiel ist aber $q(y, y) = 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass nur $s(y) = 0$ sein kann, also (5) gilt.

Man kann also irgendeinen Fixpunktalgorithmus auf diese konkrete Funktion f anwenden, um eine Lösung des Spiels zu finden. Gleichzeitig wissen wir (nach Brouwer), dass es eine Lösung gibt.

9 Julia Robinson Algorithmus

Beginnend mit irgendeinem $y^1 \in C$, bilde man

$$y^{k+1} = \frac{k\ y^k\ +\ e^{i(k)}}{k+1} \qquad k = 1, 2, ...$$

Was ist $i(k)$? Der Vektor $z(y^k)$ hat (mindestens) eine maximale Komponente. Wir nehmen irgendeinen entsprechenden Index und nennen ihn $i(k)$.
$e^{i(k)}$ ist der $(n = m)$- dimensional Einheitsvektor Nr. $i(k)$,

$$(0, ..., 0, 1, 0, ...0) \quad 1 \text{ an Stelle } i(k)$$

Satz (J. Robinson [2]):
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $k(\varepsilon)$, so dass $z_i(y^k) \leq \varepsilon\ \forall i$, falls nur $k > k(\varepsilon)$. Dabei hängt $k(\varepsilon)$ nicht von der speziellen Wahl des Startpunktes y^1 ab.

Damit folgt:
Für jede unendliche Teilfolge k_ν, so dass die y^{k_ν} konvergieren, $y^{k_\nu} \to \bar{y}$, folgt wegen Stetigkeit $z_i(\bar{y}) \leq 0\ \forall i$; also ist $\bar{y}$ eine Lösung des Spiels. Da es so eine Teilfolge wegen Beschränktheit und Abgeschlossenheit von C immer gibt, beweist dies ebenfalls die Existenz einer Lösung.

Die (nichtnegativen) Zahlen $\delta_k = \max_i z_i(y^k)$ kann man als Fehler von y^k deuten. Sie streben also stets gegen Null. Allerdings zumeist nicht monoton und sehr langsam !

10 Nachtrag

Brouwer's Satz kann man in vielen Versionen äquivalent formulieren.
1. Als sogenannten Restraktsatz:
Dann lautet er: Es gibt keine stetige Funktion f, die die Euklidische Einheitskugel auf ihren Rand abbildet, so dass $f(x) = x$ für sämtliche Randpunkte gilt.

2. Als *Arbeitslemma*:
Dann lautet er so: Sei das Arbeitspensum 1 auf n Arbeiter zu verteilen $x = (x_1, ..., x_n), x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1$ und sei X_i die Menge der Verteilungen x, mit welchen Arbeiter i einverstanden ist. Wir fordern:

-X_i sei stets abgeschlossen,
-wenn $x_i = 0$ (i hat nichts zu tun), so ist $x \in X_i$,
-zu jedem x findet sich wenigstens ein i, so dass $x \in X_i$.

Behauptung:
Dann gibt es ein solches x, dass $x \in X_i$ gleichzeitig für alle i gilt (Der Meister kann alle zufrieden stellen).

Die Äquivalenzbeweise lassen wir als Übungsaufgabe. Viel Spass !

Literatur

[1] L.W. Kantorovich and G.P. Akilov. Funktionalanalysis in normierten Räumen. Akademie Verlag, Berlin 1964.

[2] J. Robinson. An iterative method of solving a game. Annals of Mathematics, 54: 296–301, 1951.