

Schuss und Tor – Flug eines Balls

Mathematische Beschreibung, Eigenschaften, Visualisierungen

Teilnehmer:

Paul Grau	Immanuel-Kant-Oberschule
Matthias Holz	Herder-Oberschule
Lukas Neumann	Herder-Oberschule
Andreas Dietrich	Heinrich-Hertz-Oberschule
Benjamin Herfort	Immanuel-Kant-Oberschule
Artemij Amiranashvili	Herder-Oberschule

Gruppenleiter:

René Lamour	Humboldt-Universität zu Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
-------------	--

Als mathematisches Modell eines Problems bezeichnet man ein System von Gleichungen, dessen Lösung die realen Gegebenheiten ausreichend gut beschreibt. Im Allgemeinen existieren für solche Gleichungen keine expliziten Lösungen, so dass man auf Näherungsverfahren zu ihrer Berechnung zurückgreifen muss.

Wir haben ausgehend von den physikalischen Grundlagen möglichst realistische Modelle des Fluges eines Balles in Form von Differentialgleichungen aufgestellt. Diese Gleichungen haben wir mittels numerischer Verfahren gelöst und durch die Variation von Einflussparametern, z.B. in Reibungsgesetzen und der Kraftrichtungen, versucht reale Bahnen wie beim Fußball oder Tischtennis zu modellieren.

1 Physikalische Grundlagen

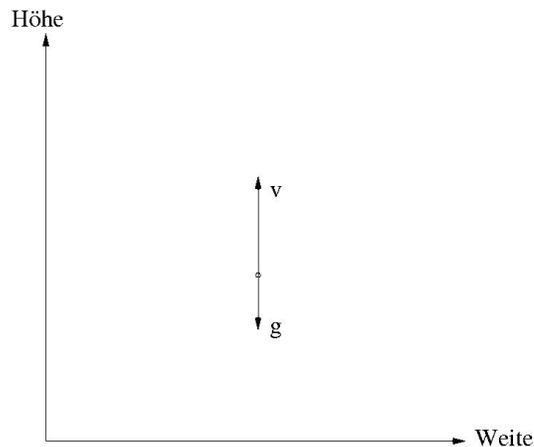
Bei der Betrachtung des Wurfes müssen wir mehrere Kräfte berücksichtigen. Es wirkt die Gewichtskraft, die Luftreibung, doch auch den Magnuseffekt gilt es mit einzubeziehen. Beginnen wollen wir jedoch mit den Newton'schen Axiomen:

1. Ein Körper mit der Masse m ist in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung, solange keine Kraft F auf ihn wirkt (Trägheitsgesetz).
2. Es gilt: $F = \frac{d}{dt}(mv) \Rightarrow F = \frac{d}{dt}(ms')$ (Newton'sches Grundgesetz);
 v sei die Geschwindigkeit und s der Weg.
3. Aktio = Reaktio (Wechselwirkungsgesetz).
4. Das Superpositionsprinzip, auch Überlagerungsprinzip genannt, beinhaltet die Addition von Vektoren.

Besonders das zweite Newton'sche Axiom ermöglicht es uns, den Flug des Balles mit Hilfe von Differentialgleichungen zu beschreiben.

1.1 Gravitationskraft

Die Gravitationskraft g wirkt nur senkrecht nach unten und ist eine Komponente des schrägen Wurfes.

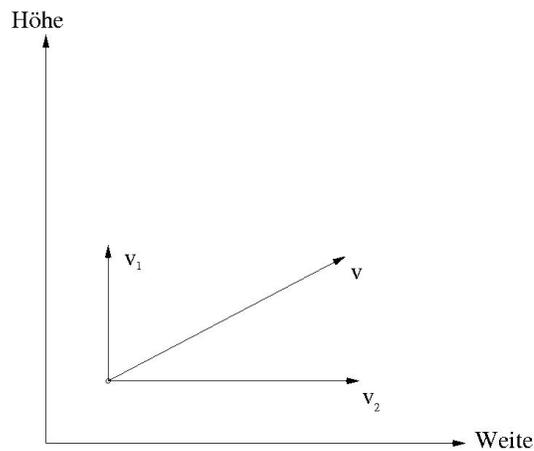


Aus der Schule kennen wir für den senkrechten Wurf den Zusammenhang

$$x(t) = x_0 - \frac{g}{2}t^2 + v_0t$$

x_0 und v_0 sind die Startposition und -geschwindigkeit.

Der Geschwindigkeitsvektor v_0 wirkt hier nur in eine Richtung, senkrecht nach oben, wohingegen beim schrägen Wurf auch eine Geschwindigkeitskomponente in der Horizontale existiert. In diese Richtung ist die Geschwindigkeit gleichförmig.

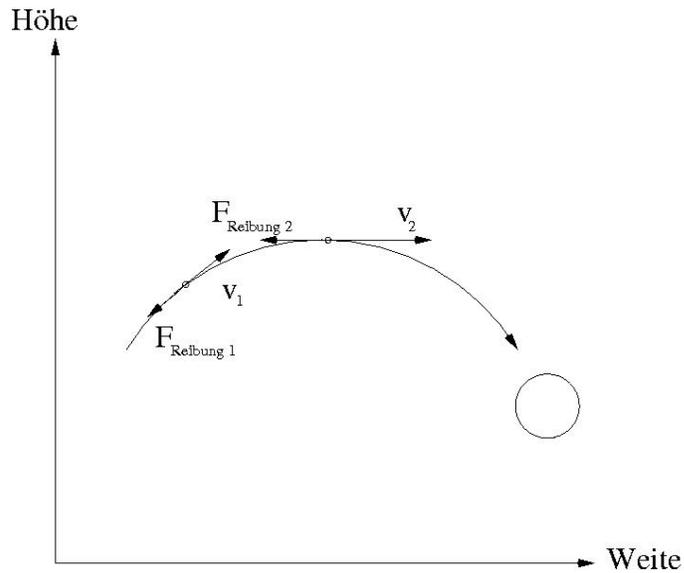


1.2 Luftwiderstand

Die Luftreibung wirkt immer entgegen der Wurfrichtung bzw. Flugrichtung (siehe Grafik) und hängt linear bis quadratisch von der Größe der Geschwindigkeit ab.

R sei die Reibungskraft, ε die spezifische Stoffkonstante. s ist bei niedrigen Geschwindigkeiten 1 und nimmt bei höheren Geschwindigkeiten bis auf 2 zu. $|v|$ bezeichnet die Länge des Vektors v und entspricht der Wurzel der Summe der Quadrate der einzelnen Komponenten

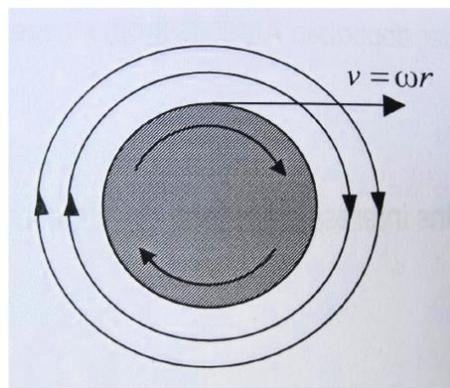
$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}.$$



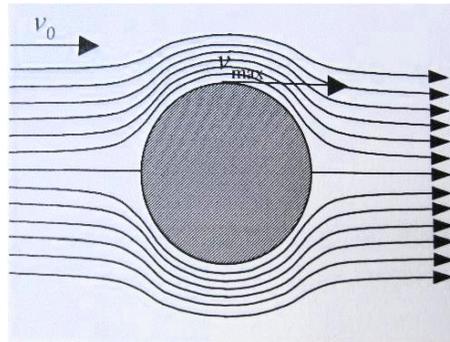
$$R = -\varepsilon v |v|^{s-1} \text{ mit } s \geq 1$$

1.3 Magnuseffekt

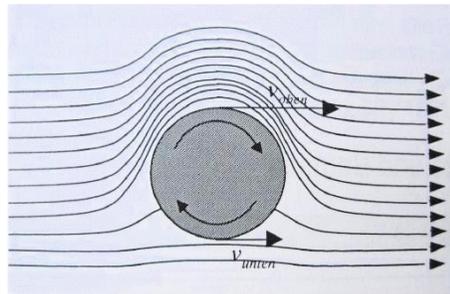
Betrachten wir zunächst einen um sich selbst rotierenden Ball mit dem Radius r . Die Luftmassen um ihn herum werden auf Grund der Reibung an der Balloberfläche ebenfalls in Bewegung versetzt und es entsteht eine Kreisströmung.



Wenn dagegen der Ball nicht rotiert und von einer laminaren Strömung umströmt wird, werden die Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit oberhalb und unterhalb abgelenkt. Hier wirkt der Magnuseffekt noch nicht.



Wenn beide Effekte miteinander verbunden werden, dann verändert sich das Stromlinienbild. Die Geschwindigkeit der Teilchen, die den Ball oberhalb umströmen ist höher als die der Teilchen, die ihn unterhalb umströmen.



Dadurch ändert sich das Druckverhältnis. Daraus resultieren unterschiedliche Drücke und der Ball wird in Richtung des höheren Druckes abgelenkt. Diese Kraft hat die Größe

$$|M| = \pi \rho \omega r |v|.$$

Dabei ist ρ die Luftdichte, ω die Rotationsgeschwindigkeit und v die Fluggeschwindigkeit des Balles.

Die reale Flugbahn des Balles kommt durch die Überlagerung der 3 Effekte Gravitation, Luftreibung und Magnuseffekt zustande. Dies gilt es nun mit Hilfe mathematischer Differentialgleichungen auszudrücken.

2 Differentialgleichungen

2.1 Ohne Reibung

Wir suchen eine Gleichung zur Beschreibung der Wurfbahn in Abhängigkeit von der Zeit. Nach dem 2. Newton'schen Axiom gilt:

$$F(t) = (mv(t))' = ms(t)''$$

mit $s(t), v(t), F(t) \in \mathbb{R}^3$, wobei die Masse m als konstant angenommen wird.

Wir formen das System 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung um.

Dazu definieren wir einen sechsdimensionalen Vektor x , der in den ersten 3 Komponenten den Ort $s(t)$ und in den letzten 3 Komponenten die Geschwindigkeit $v(t)$ enthält. Dann enthält der sechsdimensionalen Vektor x' , sowohl die Geschwindigkeit v als auch die Kraft dividiert durch die Masse $F(t)/m$. Für diesen Vektor gilt demnach:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_4 \\x_2' &= x_5 \\x_3' &= x_6\end{aligned}$$

Wenn man die Reibung vernachlässigt, dann gilt für x :

$$x' = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei g die Fallbeschleunigung ist.

Also ist

$$\begin{aligned}x_4' &= -g \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t x_4'(\xi) d\xi &= - \int_{t_0}^t g d\xi \\ \Leftrightarrow x_4(t) - x_4(t_0) &= -g(t - t_0) \\ \Leftrightarrow x_4(t) &= x_4(t_0) - g(t - t_0)\end{aligned}$$

Wegen $x'_1 = x_4$ folgt:

$$\int_{t_0}^t x'_1(\xi) d\xi = \int_{t_0}^t (x_4(t_0) - g(\xi - t_0)) d\xi$$

$$\Leftrightarrow x_1(t) - x_1(t_0) = x_4(t_0)(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1(t) = x_4(t_0)(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + x_1(t_0)$$

Offensichtlich entspricht das der theoretischen physikalischen Formel für den senkrechten reibungslosen Wurf.

Zur exakten Bestimmung der Lösung benötigt man zusätzlich Anfangswerte. Das führt auf ein Anfangswertproblem:

$$x' = f(x, t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

2.2 Mit Reibung

Für den Betrag der Reibungskraft R gilt:

$$|R| = -\varepsilon|v|^s.$$

mit $s \geq 1$. Nun wollen wir die Richtung von R bestimmen.

Da $|\alpha v| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2 \alpha^2} = |\alpha||y|$, gilt $|\frac{y}{|y|}| = 1$, d.h. der Vektor $|\frac{y}{|y|}|$ hat die Länge 1.

Also ist:

$$R = -\varepsilon \frac{v}{|v|} |v|^s = \begin{pmatrix} -\varepsilon v_1 |v|^{s-1} \\ -\varepsilon v_2 |v|^{s-1} \\ -\varepsilon v_3 |v|^{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon x_4 |v|^{s-1} \\ -\varepsilon x_5 |v|^{s-1} \\ -\varepsilon x_6 |v|^{s-1} \end{pmatrix}$$

2.3 Mit Magnuseffekt

Wir beschränken uns bei der Darstellung des Magnuseffekts auf die Drehung um eine vertikale Achse. Der Vektor der Magnuskraft sei M , wobei daher $M_1 = 0$ gilt. Der dreidimensionale Vektor y habe die gleiche Richtung wie M . Per Definition gilt für orthogonale Vektoren:

$$v \perp y \Leftrightarrow v^T y = 0$$

Also gilt :

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0$$

y ist nicht eindeutig bestimmbar, da es z.B. mehrere Vektoren unterschiedlicher Länge gibt, die die Gleichung erfüllen. Wir können allerdings einen bestimmten Vektor finden, indem wir $y_3 = 1$ setzen. Dann ist $y_2 = -\frac{v_3}{v_2} = -\frac{x_6}{x_5}$
Also ist

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_6}{x_5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Vektor in Richtung der Magnuskraft. Außerdem kennen wir bereits den Betrag der Magnuskraft: $|M| = \pi \rho \omega r^2 |v|$

Diesen Betrag multiplizieren wir mit einem Vektor der Länge 1 in Richtung von y , um auf die tatsächlich wirkende Magnuskraft zu kommen:

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_6}{x_5} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\pi \rho \omega r^2 |v|}{\sqrt{\frac{x_6^2}{x_5^2} + 1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_6}{x_5} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x_5 \pi \rho \omega r^2 |v|}{\sqrt{x_6^2 + x_5^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_6 \\ x_5 \end{pmatrix} \pi \rho \omega r^2$$

3 Näherungsverfahren

Um Näherungsverfahren für ein Anfangswertproblem zu konstruieren, wird die Differentialgleichung

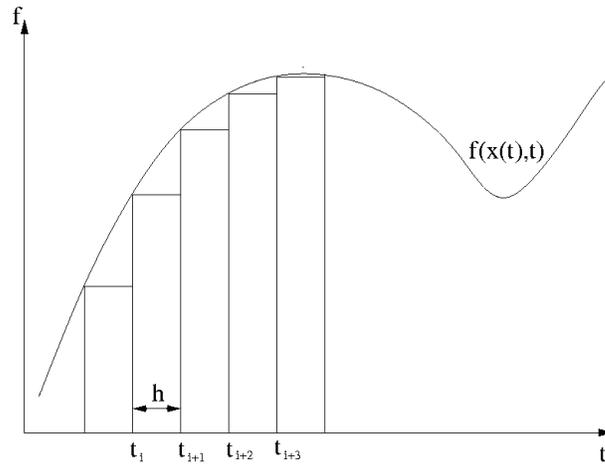
$$x'(t) = f(x(t), t)$$

von t_0 bis t integriert.

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(x(\xi), \xi) d\xi$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\xi), \xi) d\xi$$

3.1 Das explizite Euler-Verfahren



Wie in der Graphik zu erkennen, bestimmen wir näherungsweise das Integral mithilfe von Rechtecken.

Mit $x_0 = x(t_0)$ und t_0 haben wir die Anfangswerte für das Näherungsverfahren. Für die Bestimmung der weiteren Reihenglieder ergibt sich die rekursive Bildungsvorschrift:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

Die Summe der Volumen der Rechtecke ist die Annäherung an das Integral, deren Genauigkeit vom Abstand h abhängt.

3.1.1 Genauigkeit des Euler-Verfahrens

Zur Bestimmung der Genauigkeit setzen wir in die Näherungsformel die exakten Werte ein. Der entstehende Fehler τ bezeichnet den sogenannten *lokalen Diskretisierungsfehler*.

Mithilfe der Taylor-Reihen

$$\begin{aligned} a(t+h) &= \frac{h^0}{0!}a(t) + \frac{h^1}{1!}ha'(t) + \frac{h^2}{2!}a''(t) + \frac{h^3}{3!}a'''(t) + O(h^4) \\ &= a(t) + ha'(t) + \frac{h^2}{2!}a''(t) + \frac{h^3}{3!}a'''(t) + O(h^4) \end{aligned}$$

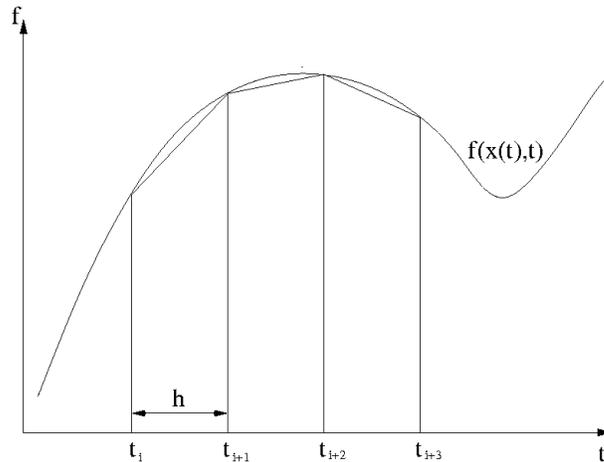
approximieren wir die Funktion durch eine Polynomfunktion. Das ist möglich, wenn $x(t)$ hinreichend oft differenzierbar ist.

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3)$$

Das setzen wir nun in die Gleichung für den lokalen Diskretisierungsfehlers für das Eulerverfahren ein:

$$\begin{aligned} \tau_E &= \frac{x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3) - x(t)}{h} - f(x(t), t) \\ &= \frac{hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3)}{h} - x'(t) \\ \Rightarrow \tau_E &= \frac{h}{2}x''(t) + O(h^2) \end{aligned}$$

3.2 Das Euler-Heun-Verfahren



Nun bestimmen wir das Integral mithilfe einer genaueren Annäherung durch Trapeze. Für die Fläche eines Trapezes ergibt sich:

$$A_{i+1} = \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1}))$$

Dadurch erhalten wir die rekursive Bildungsvorschrift:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1}))$$

Dies ist allgemein bekannt als *Trapezregel*. Dafür reicht allerdings x_i als Anfangswert für jeden Schritt nicht aus, sodass wir x_{i+1} unter Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens näherungsweise bestimmen:

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

Eingesetzt erhalten wir das Euler-Heun-Verfahren

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(\tilde{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

3.2.1 Genauigkeit des Euler-Heun-Verfahren

Wir berechnen wieder den lokalen Diskretisierungsfehler, indem wir das exakte Ergebnis in das Euler-Heun-Verfahren einsetzen. Allerdings beschränken wir uns der Einfachheit halber auf skalare f :

$$\tau_{EH} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \frac{1}{2}(f(x(t), t) + \underbrace{f(x(t) + hf(x(t), t), t+h)}_{y(t+h)})$$

Für $y(t+h)$ wenden wir wieder die Taylor-Reihe an. Das Problem dabei besteht darin, dass wir die Taylor-Reihe bzgl. h in t anwenden müssen:

$$y(t+h) = f(x(t), t) + h \underbrace{(f_x f + f_t)}_{x''(t)} + \frac{h^2}{2} x'''(t) + O(h^3)$$

wegen

$$x''(t) = \frac{d}{dt} x'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t), t) = f_x x' + f_t = f_x f + f_t$$

Beim Einsetzen in die Gleichung für den lokalen Diskretisierungsfehler erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tau_{EH} &= \frac{hx' + \frac{h^2}{2}x'' + \frac{h^3}{3!}x''' + O(h^4)}{h} - \frac{1}{2}(2x' + hx'' + \frac{h^2}{2}x''' + O(h^3)) \\ &= -\frac{h^2}{12}x''' + O(h^3) \end{aligned}$$

Für Polynomfunktionen 2. Grades wird x''' und alle weiteren Ableitungen 0, so dass $\tau_{EH} = 0$ folgt. Also ist das Verfahren für quadratische Funktionen exakt.

4 Implementierung

Zur Implementierung der Wurfvorgänge benutzen wir das Programm Matlab. Dies zeichnet sich durch einfache Handhabung und praktische Anwendung bei komplexen mathematischen Problemen aus.

Das Prinzip der Implementierung besteht aus der Darstellung der Differentialgleichung und der näherungsweise Berechnung dieser.

4.1 Euler'sches Näherungsverfahren

Wir gehen von der Gleichung $x_{i+1} = x_i + h * f(x_i, t_i)$ aus. Diese implementieren wir, indem wir von Anfangswerten ausgehen:

```
x=x0 ;  
t=t0 ;
```

und näherungsweise mit Hilfe einer for-Schleife die weiteren Werte berechnen.

```
for i=1:N          N steht für die Anzahl der Schritte  
    x=x+h*feval(f,x,t) ;    h steht für die Schrittweite  
    t=t+h ;                t wird um die Schrittweite erhöht  
end
```

Der Befehl feval berechnet die Funktion f mit den Parametern x und t .

4.2 Funktion f

Die Funktion gibt die zeitliche Änderung der Werte von x_1 bis x_6 aus. Die zeitliche Änderung, also Ableitung der Koordinaten x_1 bis x_3 ist die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt. Diese Werte sind in x_4 bis x_6 gespeichert und werden in y_1 bis y_3 ausgegeben.

```
y(1)=x(4) ;  
y(2)=x(5) ;  
y(3)=x(6) ;
```

Nacheinander berücksichtigen wir die Veränderung der Geschwindigkeit (also die Beschleunigung) beim freien Flug, Flug mit Reibung und Flug mit Magnuseffekt.

4.2.1 Freier Flug

Beim freien Flug wirkt nur die Gravitationskraft in x_1 Richtung und demnach muss die Funktion f nur durch folgenden Code vervollständigt werden.

```
g=9.81 ;  
y(4)=-g ;  
y(5)=0.0 ;  
y(6)=0.0 ;
```

4.2.2 Flug mit Reibung

Durch den Luftwiderstand verändern sich die wirkenden Kräfte. Nach der physikalischen Herleitung gilt $R = -\varepsilon v|v|^{s-1}$, wobei ε der Reibungsfaktor ist. Zuerst berechnen wir den Betrag von v :

```
betrag_v=sqrt(x(4)*x(4)+x(5)*x(5)+x(6)*x(6)) ;
```

Jetzt berechnen wir die Reibung für die einzelnen Komponenten und subtrahieren sie von den Beschleunigungen:

```
Ra=reibungsfaktor*betrag_v^(s-1) ;  
R(1)=Ra*x(4) ;  
R(2)=Ra*x(5) ;  
R(3)=Ra*x(6) ;  
  
y(4)=-g-R(1) ;  
y(5)=-R(2) ;  
y(6)=-R(3) ;
```

4.2.3 Flug mit Magnuseffekt

Für den Magnuseffekt gilt die Formel $F = \pi \rho \omega r v$. Die Kraft berechnen wir nun in Abhängigkeit von v für die senkrechte Drehachse.

```

rho=1.293 ;
omega=2*(2*r*pi) ;
v2=v(1) ;
v3=v(2) ;
Magnus=[-v3;v2]*pi*rho*omega*r*r ;

```

Nun werden für y_5 und y_6 die Kraft des Magnuseffektes addiert, y_4 bleibt gleich.

```

y(4)=-g-R(1) ;
y(5)=-R(2)+Magnus(1) ;
y(6)=-R(3)+Magnus(2) ;

```

4.3 Euler-Heun'sches Näherungsverfahren

Diese andere Möglichkeit der Approximation liefert genauere Werte als das Euler'sche Näherungsverfahren. Es muss nur die for-Schleife verändert werden.

```

for i=1:N
    fn=feval(f,x,t);
    xL=x+h*fn ;
    t=t+h ;
    x=x+h/2*(fn+feval(f,xL,t));
end

```

5 Experimente

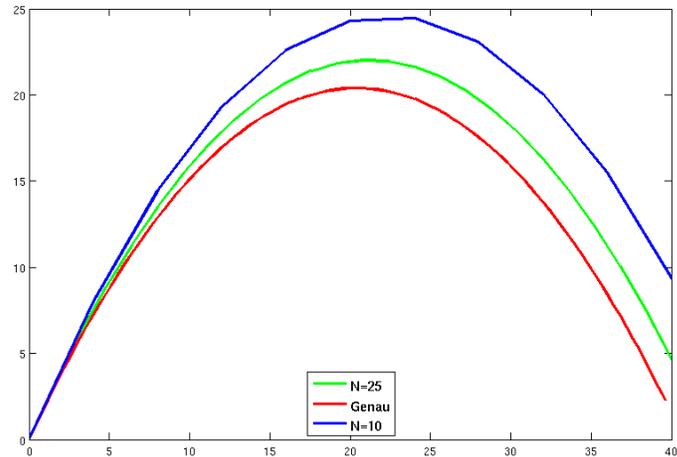
Nachdem wir alles implementiert haben, fangen wir nun an Flugkurven zu zeichnen. Gerade mit Matlab lässt sich dies leicht verwirklichen. Alle berechneten Punkte werden nacheinander gespeichert und dann gezeichnet. Nachdem wir uns in die Materie des Plot-Befehls eingearbeitet haben, konnten wir mit den geeigneten Experimenten beginnen.

5.1 Vergleich der Näherungsverfahren

Zuerst betrachten wir den Fall des Schusses ohne Luftreibung, um die Approximationsverfahren auf ihre Genauigkeit zu untersuchen.

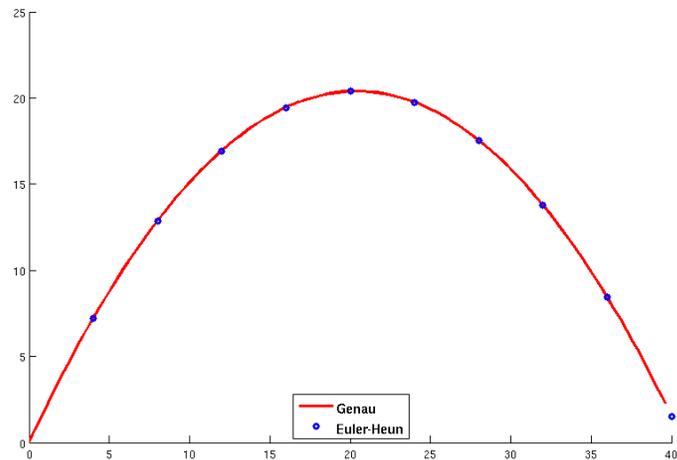
5.1.1 Euler-Verfahren

In dieser Grafik werden die genaue Kurve, sowie die Annäherungen mit 10 und 25 Schritten dargestellt.



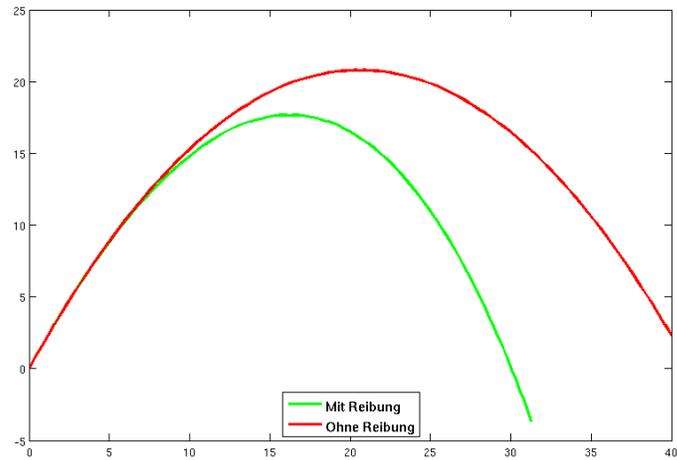
5.1.2 Euler-Heun-Verfahren

Jetzt vergleichen wir das Euler-Heun Approximationsverfahren mit der genauen Kurve. Nach unseren Berechnungen sollte das Verfahren mit den exakten Werten übereinstimmen.



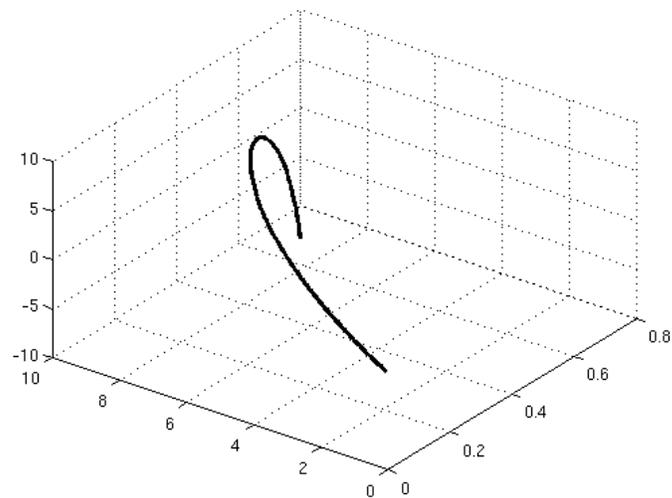
5.2 Flug mit Luftreibung

Hier berechnen wir die Flugkurve unter Berücksichtigung der Luftreibung im Vergleich zum reibungsfreien Schuss.

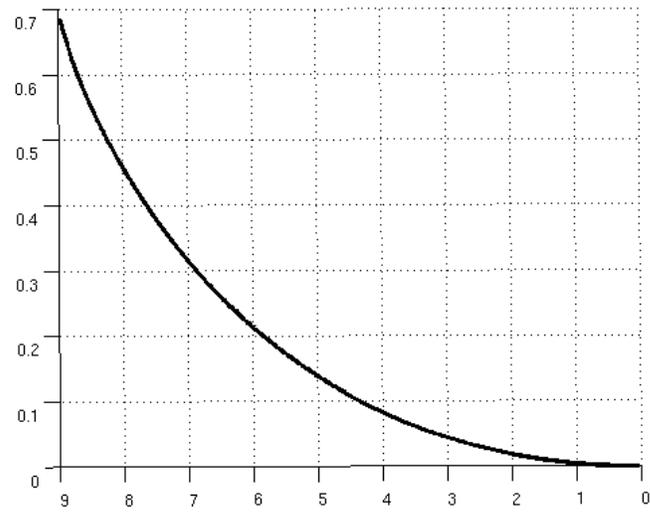


5.3 Flug mit Magnuseffekt

Zuletzt betrachten wir den Flug unter Berücksichtigung des Magnuseffektes. Da diese Kraft zur Seite wirkt, wird die Kurve dreidimensional dargestellt.



Jetzt den Effekt von oben betrachtet:



Hier nochmal alle Flugbahnen im Vergleich:

