Graphen, Färbungen und algebraische Kurven

Teilnehmer:

Jonas Beuchert	Herder-Oberschule, Berlin
Frederik Sieth	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Julius Tens	Herder-Oberschule, Berlin
Jonas Windmüller	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Simone Zahn	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Gavril Farkas	Humboldt-Universität zu Berlin
Angela Ortega	Humboldt-Universität zu Berlin

Betrachtet man eine politische Landkarte, so fällt auf, dass aneinandergrenzende Gebiete nie mit der gleichen Farbe eingefärbt sind. Bei einer Karte mit sehr wenigen Ländern mag es noch sehr einfach sein, eine solche Kolorierung zu finden, doch wie kann man beispielsweise eine Weltkarte unter der genannten Bedingung mit möglichst wenigen Farben kolorieren?
Mit der Modellierung und der Lösung genau solcher Probleme beschäftigt sich die *Graphentheorie*. Das Ziel in unserem Kurs war es, dieses Gebiet vorzustellen und den *Satz von Riemann-Roch*, einen zentralen Satz der Graphentheorie, zu beweisen. Um diesen Beweis führen zu können, erarbeiteten wir zunächst einige Grundlagen der Kombinatorik, anschließend widmeten wir uns Ordnungs- und Äquivalenzrelationen und Gruppen bzw. Operationen. Als letztes erhielten wir eine Einführung in die Grundbegriffe der Graphentheorie und beschäftigten uns mit dem so genannten *chip-firing game*. Eine Wiedergabe des kompletten Beweises, der die gerade angeführten behandelten Themenkomplexe miteinander verknüpft, sprengte leider den Rahmen dieses Berichtes. Aus diesem Grund beschränken wir uns hier auf Erläuterungen zu den gerade genannten Themen, die allerdings ohne den Beweis teilweise etwas zusammenhanglos erscheinen können.

1 Kombinatorische Grundlagen

1.1 Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen $x \in X$ zu Elementen $y \in Y$

1. f ist injektiv $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2. f ist surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
3. f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv.

Es ist leicht ersichtlich, dass, wenn es eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ gibt, $|X| = |Y|$ gelten muss.
Gesucht werden nun die Anzahl aller möglichen Abbildungen von einer Menge $X = \{x_1, \dots, x_a\}$ in eine Menge $Y = \{y_1, \dots, y_b\}$:

$$Abb(X \to Y) := \{f : X \to Y\}.$$

Jedes $x_i \in X$ kann einem der b $y_j \in Y$ zugeordnet werden. Da in X a Elemente enthalten sind, beträgt die gesuchte Anzahl:

$$|Abb(X \to Y)| = b^a.$$

$Inj(X \to Y) := \{f : X \to Y : f \text{ ist injektiv}\}$
Bei den injektiven Abbildungen gibt es für $x_1 \in X$ b mögliche Funktionswerte, für x_2 die $b-1$ verbliebenen Funktionswerte usw. Das letzte $x_a \in X$ hat nur noch $b - a + 1$ mögliche $y \in Y$. Dann gilt

$$|Inj(X \to Y)| = \frac{b!}{(b-a)!}.$$

$Bij(X \to Y) := \{f : X \to Y : f \text{ ist bijektiv }\}$
Die Überlegungen hier sind analog zum oberen Fall, da für bijektive Abbildungen $a = b$ gilt, gibt es für das letzte $x_a \in X$ nur eine verbleibende Möglichkeit:

$$|Bij(X \to Y)| = a! = b!.$$

1.2 Kardinalitäten von Vereinigungsmengen

Seien $A_1, \dots, A_n$ endliche Mengen.
Für die Vereinigungen zweier bzw. dreier Mengen lassen sich folgende Formeln für deren Kardinalitäten herleiten:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Diese Identität lässt sich verallgemeinern für n Mengen:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j}^{n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Mithilfe der Methode der vollständigen Induktion kann man diese Indentität leicht beweisen.
Ausserdem kann man sie dazu benutzen, um die noch unbekannte Anzahl aller surjektiven Abbildungen zu bestimmen:
Seien die Mengen $X = \{x_1, \ldots, x_a\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_b\}$ gegeben.
Es werden zusätzlich folgende Mengen definiert:

$$M_i := \{f : X \to Y \backslash \{y_i\}\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |Surj(X \to Y)| &= |Abb(X \to Y)| - |M_1 \cup \cdots \cup M_b| \\ &= b^a - (\sum_{i=1}^{b} |M_i| - \sum_{i<j}^{b} |M_i \cap M_j| + \cdots + (-1)^{b-1} |M_1 \cap \cdots \cap M_b|). \end{aligned}$$

Ferner gilt aufgrund der Definition der M_i:

$$|M_i| = (b-1)^a$$
$$|M_i \cap M_j| = (b-2)^a.$$

Für die Schnittmenge von k Mengen gilt allgemein:

$$|M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = (b-k)^a.$$

Folglich

$$\begin{aligned} |Surj(X \to Y)| &= b^a - (\sum_{i=1}^{b} (b-1)^a - \sum_{i<j}^{b} (b-2)^a + \cdots + (-1)^{b-1} (b-b)^a) \\ &= b^a - b(b-1)^a + \binom{b}{2} (b-2)^a - \cdots + (-1)^{b-1} b. \end{aligned}$$

2 Relationen

Definition 2.1. R ist eine Relation auf der Menge M, wenn $R \subset M \times M$

Beispiele
Sei M die Menge aller Schüler und für die folgende Relationen $R_1, R_2 \subset M \times M$ gelte:

- $R_1 : (x, y) \in R_1 \Leftrightarrow x$ geht auf die selbe Schule wie y. Der Schüler x ist genau dann in Relation mit dem Schüler y, wenn x auf die selbe Schule geht wie y.
- $R_2 : (x, y) \in R_2 \Leftrightarrow x$ ist nicht älter als y. Der Schüler x ist genau dann in Relation mit dem Schüler y, wenn x nicht älter ist als y.

2.1 Ordnungsrelationen

Definition 2.2. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt genau dann (reflexive) *Ordnungsrelation* auf M, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

1. $(x, x) \in R$ (Reflexivität)
2. $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
3. $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (Transitivität).

R_2 ist also eine Ordnungsrelation.

Definition 2.3. Eine Ordnungsrelation $R \subset M \times M$ heißt genau dann starke Ordnungs- oder *Totalrelation*, wenn gilt: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.
R_2 ist folglich eine starke Ordnungsrelation, weil zwei beliebige Elemente aus M direkt miteinander vergleichbar sind.

Definition 2.4. Eine Ordnungsrelation $R \subset M \times M$ heißt genau dann schwache Ordnungsrelation, wenn gilt: $\exists x, y \in M : (x, y) \notin R \vee (y, x) \notin R$.

Seien $d \in \mathbb{N}$ und $M = \{d|12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ die Menge der natürlichen Teiler von 12. Für die Ordnungsrelation R_3 soll gelten:

$$R_3 : (d_1, d_2) \in R_3 \Leftrightarrow d_1|d_2.$$

d_1 ist genau dann in Relation mit d_2, wenn d_1 ein natürlicher Teiler von d_2 ist.
R_3 ist eine schwache Ordnungsrelation, weil nicht alle Elemente aus M direkt miteinander vergleichbar sind.
Weil 4 ein natürlicher Teiler von 12 ist, sind 4 und 12 in Relation bzw. vergleichbar. Weder ist 4 ein natürlicher Teiler von 6, noch ist dies 6 von 4, somit sind 4 und 6 nicht in Relation bzw. nicht vergleichbar.

2.2 Äquivalenzrelationen

Definition 2.5. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt genau dann *Äquivalenzrelation* auf M, wenn für $x, y, z \in M$ gilt:

1. $(x, x) \in R$ (Reflexivität)
2. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (Symmetrie)
3. $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (Transitivität).

R_1 ist also eine Äquivalenzrelation.

2.3 Äquivalenzklassen

Die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in M$ ist die folgende Teilmenge

$$[x] := \{y \in M : (x, y) \in R\}.$$

Die folgende Aussage gilt: $[x] = [y] \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

2.4 Gruppen und Ordnungen

Definition 2.6. Eine Abbildung $\circ : M \times M \to M$ heißt *Operation* auf M.

Jetzt betrachten wir Operationen, deren Eigenschaften den Eigenschaften der Addition reeller Zahlen ähneln.

Definition 2.7. $(M, \circ)$ heißt genau dann *Gruppe*, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

1. $\circ$ ist eine Operation auf M
2. $\circ$ ist assoziativ: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
3. $\circ$ besitzt ein neutrales Element: $\exists n \in M : a \circ n = n \circ a = a$
4. Jedes Element von M besitzt dort auch ein inverses Element bezüglich $\circ$: $\exists \overline{a} \in M : a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = n$.

Definition 2.8. $(M, \circ)$ heißt genau dann *abelsche Gruppe*, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:

1. $(M, \circ)$ ist eine Gruppe
2. $\circ$ ist kommutativ: $a \circ b = b \circ a$, für alle $a, b \in M$.

Beispiele von Gruppen sind $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ oder $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

3 Graphen

Ein Graph $G(V, E)$ besteht aus Knoten $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ und Kanten $(\in E)$, die jeweils zwei Knoten miteinander verbinden. Für die Nachbarschaft $N(v)$ eines Knotens $v \in V$ gilt: $N(v) = \{y \in V : \{v, y\} \in E\}$. Als den Grad $deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ bezeichnet man die Anzahl seiner Nachbarn, d. h. $deg(v) = |N(v)| = |E_v|$, wobei $E_v = \{\{x, y\} \in E : x = v\}$. Ein Graph $G(V, E)$ heißt *vollständig*, wenn $\forall v_i, v_j \in V : \{v_i, v_j\} \in E$ gilt. Die Anzahl der Kanten in einem vollständigen Graphen $G(V, E)$ ist $|E| = \binom{|V|}{2}$.
Ein Weg w der Länge n ist eine endliche Folge $a_0, a_1, ..., a_n$ von Knoten, wobei jedes Folgeglied benachbart zu seinem Nachfolger ist. Zudem muss $a_m \neq a_{m+2} \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$ gelten. Ein Graph $G(V, E)$ heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn für alle $v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$ ein Weg w der Länge n existiert, für den $p, q \in \mathbb{N}, p, q \leq n$ mit $w_p = v_i, w_q = v_j$ existieren. Alle Wege w der Länge n, für die $w_n = w_0$ gilt, heißen *Zykel*.

3.1 Bäume

Ein zusammenhängender Graph ohne Zykel heißt *Baum*. Man bezeichnet einen Knoten $v_b \in V$ eines Baumes $B(V, E)$ genau dann als *Blatt*, wenn $deg(v_b) = 1$ gilt.

Lemma 3.1. *Jeder endliche Baum hat mindestens ein Blatt.*

Beweis. Wäre $deg(v) \geq 2 \ \forall v \in V$, so könnte man jeden Punkt als Startpunkt w_0 eines Weges w wählen, wobei w unendlich viele Knoten enthielte, da aufgrund der obigen Annahme jeder Knoten mindestens zwei verschiedene Nachbarn hätte und somit für jeden Knoten $w_n = v \in V$ ein nächstes Folgeglied des Weges w_{n+1} existierte, ohne dass die Bedingung $w_{n-1} \neq w_{n+1}$ verletzt würde. Es existierte also ein Weg w, der unendlich viele Knoten enthält. Da aufgrund der Zykellosigkeit eines Baumes keine zwei Folgeglieder des Weges gleich sein dürfen und dieser somit nur voneinander verschiedene Knoten enthält, enthält auch der Baum unendlich viele voneinander verschiedene Knoten. Dies steht im Widerspruch zu unserer Bedingung, dass es sich bei dem betrachteten Baum um einen endlichen Baum handelt. Jeder endliche Baum hat also mindestens ein Blatt.

Aus dieser Eigenschaft folgt:

Satz 3.2. *Jeder endliche Baum hat mindestens zwei Blätter.*

Beweis. Sei $B(V, E)$ ein Baum mit dem Blatt v_b, dessen Nachbar als v_n bezeichnet sei. „Schneidet" man nun das Blatt v_b ab, erhält man einen neuen Baum $B_1(V \setminus \{v_b\}, E \setminus \{\{v_b, v_n\}\})$. Nach Satz 3.1 hat auch B_1 mindestens ein Blatt. Dieses Blatt ist entweder v_n oder ein anderer Knoten v_r des Baumes B_1. Gilt letzteres, ist die Annahme bewiesen, da beim Entfernen des Blattes v_b der Grad des Blattes v_r aufgrund der Blatteigenschaften nicht verändert wurde und v_r somit auch Blatt des Baumes B wäre. Ist jedoch v_n ein Blatt, so muss der Schritt der Entfernung des Blattes und somit der Reduzierung der Knotenzahl maximal $|V| - 1$-mal durchgeführt werden. Entweder die Annahme wurde wie zuvor erklärt bewiesen, oder es wurde noch kein solcher Knoten v_r gefunden und für den Baum $B(V, E)$ muss somit $deg(v) = 2\ \forall v \in V$ gelten. Ein solcher Baum hat genau zwei Blätter, die Annahme ist somit bewiesen.

3.2 Verwendung von Graphen

Graphen spielen eine wichtige Rolle bei der Modellierung bestimmter Probleme. Das wohl bekannteste auf Graphen zurückzuführende Problem ist das Euler'sche Brückenproblem, dessen Vorstellung im Jahre 1736 zugleich den Grundstein für die Graphentheorie legte. Das Euler'sche Brückenproblem beschreibt die Frage, ob es möglich sei, in einem Spaziergang durch Königsberg alle Brücken der Stadt genau einmal zu überqueren. Dieses Problem lässt sich relativ einfach mithilfe von Graphen modellieren: Die Knoten des Graphes sind die Plätze, die die verschiedenen Brücken verbinden, und die Brücken selber werden durch Kanten zwischen den entsprechen Kanten dargestellt.
Doch auch andere Probleme lassen sich mithilfe von Graphen modellieren. Eine sehr bekannte Problemklasse ist die der so genannten Färbungsprobleme. Das in der Einleitung vorgestellte Problem ist beispielsweise ein solches Färbungsproblem. In diesem Fall repräsentierten die Knoten eines Graphen die verschiedenen Länder, die Kanten stellten die Grenzen zwischen den jeweiligen Ländern dar.

4 Riemann-Roch-Satz für Graphen

Definition 4.1. Wir definieren eine Ordnung in $Div(G)$ wie folgt:

$$D \geq D' \Leftrightarrow \forall v \in V : D(v) \geq D'(v).$$

Ein Divisor $E \in Div(G)$ ist *effektiv*, falls $E \geq 0$.

Definition 4.2. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(G)$ die abelsche Gruppe bestehend aus allen ganzzahl-wertigen Funktionen auf den Knoten von G.
Wir definieren den *Laplace-Operator* $\Delta : \mathcal{M}(G) \to Div(G)$ durch

$$\Delta(f) = \sum_{v \in V(G)} \Delta_v(f)(v),$$

wobei

$$\begin{aligned}\Delta_v(f) &= deg(v)f(v) - \sum_{e=wv\in E_v} f(w)\\ &= \sum_{e=wv\in E_v} (f(v)-f(w)).\end{aligned}$$

Definition 4.3. Ein Divisor D heißt *Hauptdivisor* falls $D \in Im(\Delta)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch:

$$D \sim D' \Leftrightarrow D - D' \text{ ist ein Hauptdivisor.}$$

Definition 4.4. Für einen Divisor $D \in Div(G)$ definieren wir das Linearsystem $|D|$ bezüglich D als Menge aller effektiven Divisoren äquivalent zu D. Die Dimension $r(D)$ eines Linearsystems $|D|$ ist $r(D) = -1$, falls $|D| \neq \emptyset$, ansonsten ist für jede ganze Zahl $s \geq 0, r(D) \geq s$, wenn $|D - E| \neq \emptyset$ für alle effektiven Divisoren E vom Grad s.

5 Chip-firing game

G sei ein Graph, wobei den Knoten ganzzahlige Geldbeträge zugeordnet werden. Knoten mit negativen Geldbeträgen sind verschuldet. Man kann die Geldbeträge mithilfe eines so genannten Divisors zuordnen, diese Zuordnung wird als anfängliche Konfiguration bezeichnet.

Definition 5.1. Ein Divisor in G ist eine Summe von Knoten mit Koeffizienten $a_v \in \mathbb{Z}$:

$$D = \sum_{v\in V} a_v \cdot v.$$

Wir bezeichnen a_v mit $D(v)$ und

$$deg(v) := \sum_{v\in V} a_v.$$

Die Menge aller Divisoren ($Div(G)$) bildet eine Gruppe mit der Verknüpfung für

$$D + D' = \sum_{v\in V}(D(v) + D'(v)) \cdot v.$$

Ziel des Spiels ist es, durch eine Folge von Bewegungen eine Konfiguration zu erreichen, bei der dann keine verschuldeten Knoten mehr existieren. Dies wird als gewinnende Strategie bezeichnet. Um Bewegungen durchzuführen, nimmt oder übergibt ein Knoten an einen Nachbarknoten einen Geldbetrag. Nachbarknoten sind Koten, die mit einer Kante zum Knoten verbunden sind. Dabei bleibt der Gesamtbetrag vom Geld stets gleich.

Es werden zwei Fälle unterschieden:

1. $N \geq g$, dann existiert immer eine Lösung.
2. $N \leq g - 1$, dann gibt es mindestens eine anfängliche Konfiguration ohne mögliche Lösung.

Zwei Divisoren D und D' in G sind genau dann linear äquivalent, wenn es eine Folge von Bewegungen gibt, die D zu D' bringt. Daher folgt, dass es für anfängliche Konfigurationen eine gewinnende Strategie gibt, wenn $N \geq g$.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch: $D \sim D'$, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist. Diese Äquivalenzrelation wird Lineaäquivalenz genannt. Da ein Hauptdivisor den Grad null besitzt, folgt das zwei lineare äquivalente Divisoren den gleichen Grad haben. Ein Divisor ist effektiv, wenn die Koeffizienten nicht negativ sind. Für einen Divisor $D \in Div(G)$ definieren wir das Linearsystem $|D|$ bezüglich D als Menge von allen effektiven Divisoren, die äquivalent zu D sind. Die Dimension $r(D)$ eines Linearsystems $|D|$ ist $r(D) = -1$, falls $|D| = \emptyset$, ansonsten ist für jede ganze Zahl $s \geq 0, r(D) \geq s$, wenn $|D - E| \neq \emptyset$ für alle effektiven Divisoren E vom Grad s.

Der kanonische Divisor K im Graph G ist wie folgt definiert:

$$K = \sum_{v \in V(G)} (deg(v) - 2)(v)$$

$deg(v)$ steht für die Anzahl der anliegenden Kanten am Knoten v. Der kanonische Divisor wird für den Riemann-Roch-Satz benötigt.

Satz 5.1. *(Riemann-Roch-Satz für Graphen) Sei G ein Graph und D ein Divisor in G. Dann*

$$r(D) - r(K - D) = deg(D) + 1 - g.$$

Mithilfe des Satzes kann man den Wert der Dimension ausrechnen, welche eine Konfiguration mit gewinnender Strategie besitzt.

Literatur

[1] M. Baker, S. Norine, *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph*, Advances in Mathematics **215** (2007), 766–788.

[2] I. Tomescu, *Introducere in combinatorica si teoria grafurilor*, Editura Academiei Republicci Socialiste Romania, Bucuresti 1981.