

Fressen und Gefressen werden

Teilnehmer:

Ssohrab Borhanian	Heinrich-Hertz-Oberschule
Kristin Emmrich	Heinrich-Hertz-Oberschule
Johannes Jendersie	Georg-Forster-Oberschule
Sophia Ketterl	Herder-Gymnasium
Arne Müller	Herder-Gymnasium
Thao Phuong Nguyen	Andreas-Gymnasium
Felix Rehn	Heinrich-Hertz-Oberschule

Gruppenleiter:

Falk Ebert	Technische Universität Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
------------	---

Die Gruppe erstellt Modelle zur Beschreibung der Entwicklung von Populationen durch Differentialgleichungen. Dabei werden einfache Wachstumsmodelle (geometrisches Wachstum, exponentielles Wachstum) betrachtet und darauf aufbauend das logistische Wachstum entwickelt. Zur Approximation der Lösungen der betrachteten Differentialgleichungen wird das Eulersche Polygonenzugverfahren eingeführt. Damit können auch kompliziertere Modelle wie Konkurrenz- und Räuber-Beute-Beziehungen betrachtet werden, deren Differentialgleichungen keine geschlossene Lösung besitzen. Bei letzteren wird betrachtet, für welche Systemparameter Koexistenz oder Ausschluss möglich ist und Fixpunkte sowie deren Eigenschaften ermittelt.

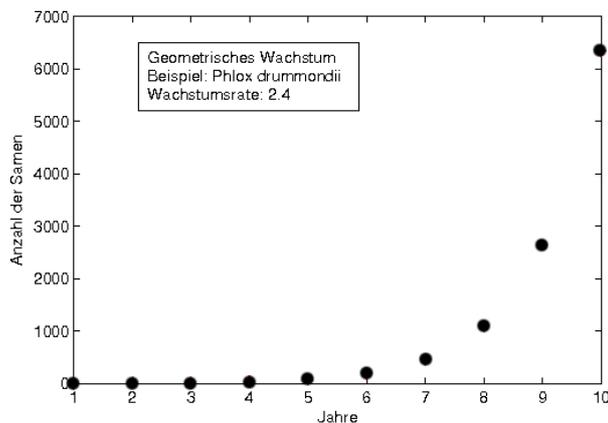
Inhaltsverzeichnis

1	Unbeschränkte Wachstumsvorgänge	14
1.1	Geometrisches Wachstum	14
1.2	Exponentielles Wachstum	15
2	Logistisches Wachstum	16
3	Das Eulerverfahren	19
3.1	Die Problemstellung	19
3.2	Das Eulerverfahren - allgemein	20
3.3	Das Eulerverfahren an einem Beispiel	20
3.4	Verbessertes Eulerverfahren	21
4	Lotka-Volterra-Konkurrenzmodell	22
4.1	Fixpunkte	23
5	Lotka-Volterra-Räuber-Beute-Modell	24
5.1	Fixpunkte und Oszillation	24
5.2	Trajektorien	26
6	Das Fress-Experiment	28
7	Zusammenfassung der Woche	29

1 Unbeschränkte Wachstumsvorgänge

1.1 Geometrisches Wachstum

Als erstes betrachten wir Hefezellenwachstum. Wir nehmen an, dass sich eine Hefezelle alle 12 Stunden teilt. Die Anfangspopulation zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist ein Individuum.



Annuelle *Phlox drummondii*



Abbildung 1: Geometrisches Wachstum beim einjährigen *Phlox drummondii*

Für $t = 12h \cdot n$ gilt:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= 2^n \\
 h(12h \cdot n) &= 2^n \\
 h(t) &= 2^{\frac{t}{12h}}
 \end{aligned}$$

Allgemeiner formuliert haben wir eine Funktion der Population p in Abhängigkeit der Zeit, die einer natürlichen Zahl eine reelle zuordnet: $p(n) = r^n$. Dabei ist r die Wachstumsrate der Population, d.h. die durchschnittliche Anzahl an Nachkommen pro Zeiteinheit und Individuum.

Anderes Beispiel: *Phlox drummondii*

Jedes Individuum entwickelt sich so, dass im Durchschnitt 2,4 Samen produziert werden. Für die Population ergibt sich also nach n Jahren $p(n) = (2,4)^n$.

1.2 Exponentielles Wachstum

Der ganze Vorgang lässt sich noch mehr verallgemeinern, indem man die Zeit nicht diskret, sondern als kontinuierlich betrachtet. Der Zuwachs in einem kleinen Zeitintervall Δt ist proportional zur Länge des Zeitintervalls und der Größe der Population.

$$\begin{aligned}
 p(t + \Delta t) &= p(t) + \alpha \cdot \Delta t \cdot p(t) \\
 \Leftrightarrow \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} &= \alpha \cdot p(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Die linke Seite der Gleichung (1) stellt einen Differenzenquotienten dar, dessen Grenzwert für Δt gegen Null die Änderung der Population über der Zeit, also deren erste Ableitung darstellt. Dies führt auf folgende Differentialgleichung:

$$\dot{p}(t) = \alpha \cdot p(t)$$

Diese wird durch Integration gelöst:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = \frac{dp}{dt} &= \alpha \cdot p(t) \\ \frac{dp}{p} &= \alpha dt \\ \int \frac{1}{p} dp &= \alpha \cdot \int dt \\ \ln(p) &= \alpha \cdot t + C_1 \\ p &= e^{\alpha t} \cdot C_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Da die Lösung (2) unserer Differentialgleichung eine Exponentialfunktion ist, nennt sich diese Art des Wachstums *exponentielles Wachstum*.

2 Logistisches Wachstum

Das exponentielle Wachstum beschreibt zwar das Wachstum bei unbeschränktem Platz und unbeschränkten Ressourcen, dies ist in der Natur aber nur sehr selten anzutreffen. Wir machen also die Wachstumsrate α abhängig von der bereits vorhandenen Population:

$$\dot{p} = \alpha(p) \cdot p \tag{3}$$

Dabei muss α zwei Voraussetzungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha_0 \\ \alpha(K) &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei ist α_0 die Wachstumskonstante des exponentiellen Wachstums und K die Kapazität des Habitats, also die maximale Population, die ein vorgegebener Lebensraum beherbergen kann.

Die einfachste Funktion, die diese Voraussetzungen erfüllt, ist eine Gerade mit der Funktionsvorschrift

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= -\frac{\alpha_0}{K} \cdot p + \alpha_0 \\ &= \alpha_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Die Annahme dieses linearen Abfallens der Wachstumsrate in Abhängigkeit von der Populationsgröße läßt sich auch experimentell belegen, siehe dazu Abb. 2.

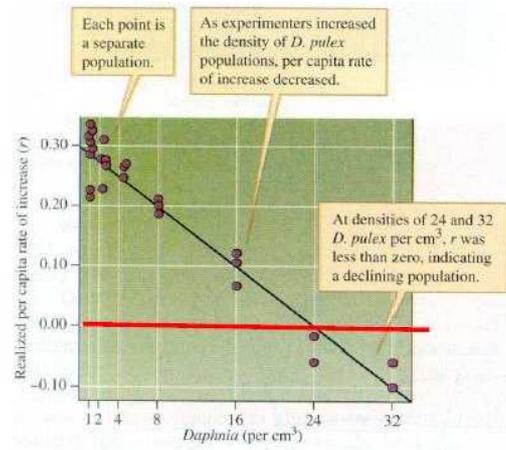


Abbildung 2: Wachstumsrate in Abhängigkeit von der Populationsgröße für Daphnienpopulationen

Setzen wir nun die Gleichung (4) in die Differentialgleichung (3) ein, erhalten wir:

$$\dot{p} = \alpha_0 \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) \quad (5)$$

Auch diese Differentialgleichung kann mit Integration gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{p} = \frac{dp}{dt} &= \alpha_0 \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) \\ \frac{dp}{p - \frac{p^2}{K}} &= \alpha_0 \cdot dt \\ \int \frac{1}{p - \frac{p^2}{K}} dp &= \alpha \cdot \int dt \\ \int \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{K - p} dp &= \alpha \cdot \int dt \\ \int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{K - p}\right) dp &= \alpha \cdot \int dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(p) - \ln(K - p) &= \alpha \cdot t + C_1 \\
-\ln(p) + \ln(K - p) &= -\alpha \cdot t - C_1 \\
\frac{K - p}{p} &= e^{-\alpha_0 \cdot t} \cdot \underbrace{e^{-C_1}}_{C_2} \\
\frac{K}{p} &= 1 + e^{-\alpha_0 \cdot t} \cdot C_2 \\
p &= \frac{K}{1 + e^{-\alpha_0 \cdot t} \cdot C_2}
\end{aligned}$$

Vergleich exponentielles und logistisches Wachstum:

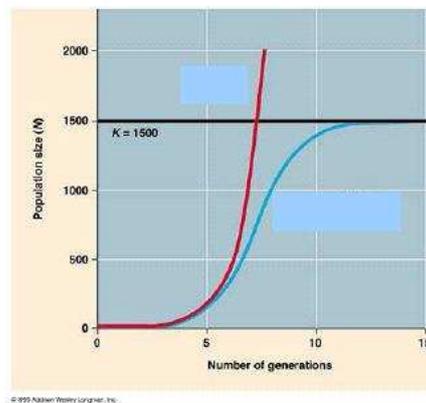


Abbildung 3: Exponentielles Wachstum (dunkel) im Vergleich zu logistischem Wachstum (hell)

Die Konstante C_2 muss dabei aus der Anfangspopulation bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
p(t_0) &= p_0 \\
\frac{K}{1 + e^{-\alpha_0 \cdot t_0} \cdot C_2} &= p_0 \\
1 + e^{-\alpha_0 \cdot t_0} \cdot C_2 &= \frac{K}{p_0} \\
e^{-\alpha_0 \cdot t_0} \cdot C_2 &= \frac{K - p_0}{p_0} \\
C_2 &= \frac{K - p_0}{p_0} \cdot e^{\alpha_0 \cdot t_0}
\end{aligned}$$

Zudem hat das logistische Wachstumsverhalten zwei Fixpunkte. Davon ist einer anziehend, der andere abstoßend. Dabei ist 0 der abstoßende Fixpunkt, d.h. bei

einer beliebig kleinen positiven Population, entfernt sich diese immer von 0. Der andere Fixpunkt ist K , d.h. eine Population in der Nähe von K strebt immer gegen diesen Punkt.

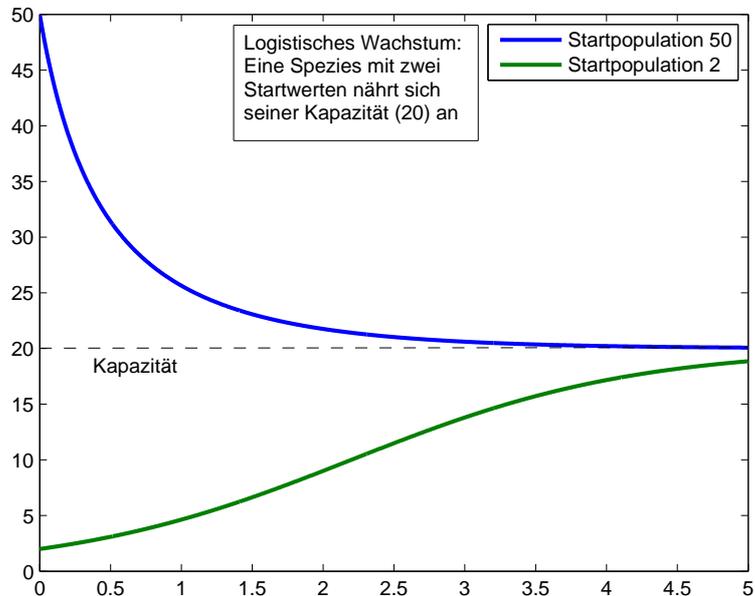


Abbildung 4: Annäherung an den anziehenden Fixpunkt von unten und oben

3 Das Eulerverfahren

3.1 Die Problemstellung

Die Differentialgleichung für logistisches Wachstum ist schon recht kompliziert analytisch lösbar. Allerdings gibt es auch Differentialgleichungen, die nicht analytisch lösbar sind. Es ist aber möglich, Näherungslösungen numerisch zu bestimmen. Ein solches Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen ist das Eulerverfahren oder auch Polygonenzugverfahren.

3.2 Das Eulerverfahren - allgemein

Für den Algorithmus müssen die Differentialgleichungen der folgenden Form entsprechen:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= f_1(p_1, p_2, \dots) \\ \dot{p}_2 &= f_2(p_1, p_2, \dots) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Außerdem müssen die Startwerte der einzelnen Funktionen also $(p_1(0), p_2(0), \dots)$ gegeben sein. Nach der Sekantengleichung gilt für eine Funktion p für kleine Δt :

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &\approx \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}, \\ \Leftrightarrow p(t + \Delta t) &\approx \dot{p}(t) \cdot \Delta t + p(t).\end{aligned}\tag{6}$$

Mit den gegebenen Differentialgleichungen und (6) folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned}p_1(t + \Delta t) &\approx \dot{p}_1(t) \cdot \Delta t + p_1(t) = f_1(p_1(t), p_2(t), \dots) \cdot \Delta t + p_1(t), \\ p_2(t + \Delta t) &\approx \dot{p}_2(t) \cdot \Delta t + p_2(t) = f_2(p_1(t), p_2(t), \dots) \cdot \Delta t + p_2(t). \\ &\vdots\end{aligned}$$

Dies kann ausgenutzt werden um die Funktionen q_i zu berechnen, die p_i jeweils approximieren, indem wir q_i folgendermaßen berechnen:

$$q_i(t + \Delta t) = f_i(q_1(t), q_2(t), \dots) \cdot \Delta t + q_i(t).$$

Somit können wir schrittweise die Funktionswerte der Funktionen approximiert berechnen.

3.3 Das Eulerverfahren an einem Beispiel

Wir haben erklärt, dass man mit dem Eulerverfahren z.B. auch die Lösung der Differentialgleichung des logistischen Wachstums berechnen kann.

Unser logistisches Wachstumsproblem beginnt bei einer Anfangspopulation $p_0 = 2$ und sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben, siehe Sektion 2:

$$\dot{p} = \alpha_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) \cdot p.$$

Da man zum Zeitpunkt t_0 den Funktionswert $u_0 = p_0$ hat, kann man mit der Tangentensteigung, die man durch die Differentialgleichung berechnet, u_1 an der Stelle $t_1 = t_0 + \Delta t$ bestimmen, indem man annimmt, dass die Funktion an der

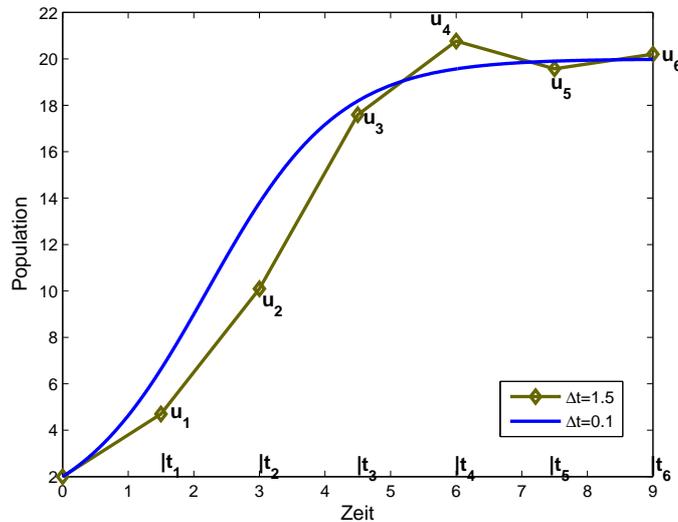


Abbildung 5: p ist die exakte Lösung, u_i Punkte der Approximation q

Stelle einigermaßen linear verläuft. Analog können u_2, u_3, \dots ermittelt werden, bis die gesamte Funktion bis zu einem beliebigen t_{Ende} berechnet ist.

Wie an der Graphik leicht zu sehen ist, ist u nur eine Approximation von p , allerdings geht der Fehler mit kleinerer Schrittgröße Δt zurück (ohne Beweis):

$$|u_i - y(t_i)| \leq c \cdot \Delta t.$$

3.4 Verbessertes Eulerverfahren

Das Eulerverfahren birgt das Problem, dass es bei zu großen Schrittweiten zu Instabilitäten führt. Dies ist mit dem verbesserten Eulerverfahren ausgleichbar.

Das Eulerverfahren betrachtet immer nur die Steigung am jeweiligen Entwicklungspunkt, wodurch der weitere Steigungsverlauf im Intervall ignoriert wird. Das verbesserte Eulerverfahren versucht deswegen die mittlere Steigung zu finden. Das Problem besteht darin, dass der eine Schrittweite entfernte Punkt nicht bekannt ist und somit die mittlere Steigung nicht genau berechenbar ist. Deswegen approximieren wir diesen Punkt mit v_{i+1} , den wir mit Hilfe des einfachen Eulerverfahrens berechnen.

$$v_{i+1} = u_i + f(u_i) \cdot \Delta t$$

Mit der nun berechenbaren mittleren Steigung (aus u_i und v_{i+1} mit der Funktion f aus der Differentialgleichung) kann der nächste Punkt u_{i+1} analog zum einfachen

Eulerverfahren berechnet werden.

$$u_{i+1} = u_i + \frac{f(u_i) + f(v_{i+1})}{2} \cdot \Delta t$$

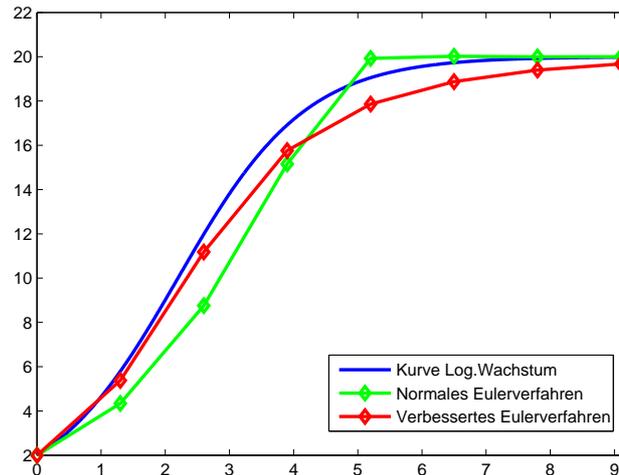


Abbildung 6: Vergleich zwischen dem einfachen und verbesserten Eulerverfahren

Wie leicht zu sehen ist, ist bei einer Schrittweite von $\Delta t = 1,3$ das verbesserte Eulerverfahren besser als das normale. Für kleinere Schrittweiten reduziert sich das Fehlerverhältnis noch mehr (auch ohne Beweis):

$$|u_i - y(t_i)| \leq c \cdot \Delta t^2.$$

4 Lotka-Volterra-Konkurrenzmodell

Da in der Natur selten eine einzige Spezies alleine in einem Habitat lebt, erweitern wir unser Modell um eine weitere. Die Populationen p_1 und p_2 konkurrieren miteinander um dieselben Ressourcen.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \alpha_1 \cdot p_1 \cdot \left(1 - \frac{p_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{p_2}{K_1}\right) \\ \dot{p}_2 &= \alpha_2 \cdot p_2 \cdot \left(1 - \frac{p_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{p_1}{K_2}\right) \end{aligned}$$

K_i ist die Kapazität des Habitats bezüglich der Spezies i und α_{ij} ist der Konkurrenzkoeffizient der Spezies j auf i . Wie auch bei den Wachstumsfaktoren nehmen wir an, dass alle Konkurrenzkoeffizienten positiv sind.

4.1 Fixpunkte

Fixpunkte sind die Punkte \bar{p}_1 und \bar{p}_2 , an denen sich die Population nicht mehr verändert und demnach $\dot{p}_i = 0$ ist.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= \alpha_1 \cdot p_1 \cdot \left(1 - \frac{p_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{p_2}{K_1}\right) = 0 \\ \dot{p}_2 &= \alpha_2 \cdot p_2 \cdot \left(1 - \frac{p_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{p_1}{K_2}\right) = 0\end{aligned}\tag{7}$$

- 1. Fall: $\bar{p}_1 = 0$ und $\bar{p}_2 = 0$
- 2. Fall: $\bar{p}_1 = 0$ und $\bar{p}_2 = K_2$
Dieser Fall kennzeichnet eine Verdrängung der Population p_1 durch die Population p_2 .
- 3. Fall: $\bar{p}_1 = K_1$ und $\bar{p}_2 = 0$
Dieser Fall kennzeichnet eine Verdrängung der Population p_2 durch die Population p_1 .
- 4. Fall: $\bar{p}_1 \neq 0$ und $\bar{p}_2 \neq 0$
Dieser Fall kennzeichnet eine Koexistenz der beiden Populationen.
Aus (7) folgt dann

$$\begin{aligned}1 - \frac{\bar{p}_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{\bar{p}_2}{K_1} &= 0, \\ 1 - \frac{\bar{p}_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{\bar{p}_1}{K_2} &= 0.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \frac{\alpha_{12} \cdot K_2 - K_1}{\alpha_{12} \cdot \alpha_{21} - 1}, \\ \bar{p}_2 &= \frac{\alpha_{21} \cdot K_1 - K_2}{\alpha_{12} \cdot \alpha_{21} - 1}.\end{aligned}$$

Erhält man für einen der beiden Fixpunkte ein negatives Ergebnis, bedeutet das, dass eine der Populationen von der anderen verdrängt wird. Die Population kann den negativen Fixpunkt nicht erreichen, da der andere Fixpunkt des logistischen Wachstums (0), das dem Konkurrenzmodell zugrunde liegt, überquert werden müsste. Die Population fällt also nur auf 0.

5 Lotka-Volterra-Räuber-Beute-Modell

Anders als im Konkurrenzmodell gibt es auch Spezies, die davon profitieren, wenn eine andere Population groß ist. Dies sind zum Beispiel alle Räuberorganismen. Seien p_1 die Räuberpopulation und p_2 die Beutepopulation. Ohne Räuber wächst die Population p_2 exponentiell und p_1 schrumpft ohne Kontakt exponentiell. Ein Beispiel ist in Abb. 7 dargestellt.

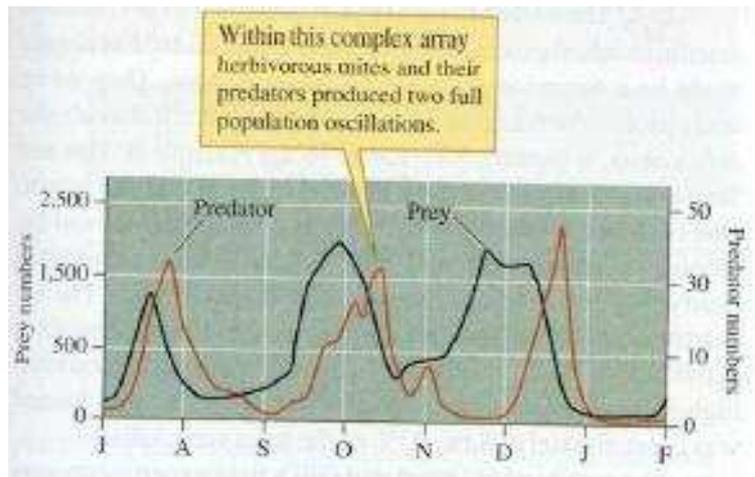


Abbildung 7: Räuber-Beute-Beziehung zwischen Milbenarten

Bei Kontakt reduziert sich die Beutepopulation (sie wird gefressen), der Räuber hingegen kann sich bei häufigem Kontakt vermehren, da er ausreichend Nahrung zu sich nehmen kann. Die Anzahl dieser Kontakte ist proportional zu den beiden Populationen.

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_{12} \cdot p_1 \cdot p_2 \\ \dot{p}_2 &= \alpha_2 \cdot p_2 - \alpha_{21} \cdot p_1 \cdot p_2\end{aligned}\quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= p_1 \cdot (\alpha_{12} \cdot p_2 - \alpha_1), \\ \dot{p}_2 &= p_2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_{21} \cdot p_1).\end{aligned}$$

5.1 Fixpunkte und Oszillation

Bedingung für die Fixpunkte \bar{p}_1 und \bar{p}_2 :

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0$$

- 1. Fall: $\bar{p}_1 = 0$ und $\bar{p}_2 = 0$
- 2. Fall:

$$\begin{aligned} \bar{p}_2 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_{12}} \\ \bar{p}_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_{21}} \end{aligned} \quad (9)$$

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die Populationen im 2. Fall um die Fixpunkte oszillieren.

Wir betrachten die Substitutionen

$$\begin{aligned} p_1 &= \bar{p}_1 + \delta_1, \\ p_2 &= \bar{p}_2 + \delta_2. \end{aligned}$$

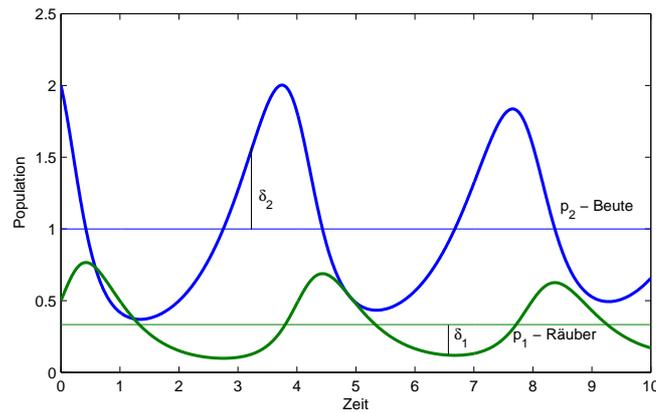


Abbildung 8: Räuber-Beute-Modell mit Fixpunkten

Eingesetzt in (8) ergibt das

$$\begin{aligned} (\bar{p}_1 + \delta_1)' &= -\alpha_1 \cdot (\bar{p}_1 + \delta_1) + \alpha_{12} \cdot (\bar{p}_1 + \delta_1) \cdot (\bar{p}_2 + \delta_2), \\ (\bar{p}_2 + \delta_2)' &= \alpha_2 \cdot (\bar{p}_2 + \delta_2) - \alpha_{21} \cdot (\bar{p}_1 + \delta_1) \cdot (\bar{p}_2 + \delta_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Leitet man (10) ab und setzt (9) in (10) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \bar{p}_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \delta_2 + \alpha_{12} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= -\bar{p}_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \delta_1 - \alpha_{21} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Für p_1 und p_2 nahe \bar{p}_1 und \bar{p}_2 sind δ_1 und δ_2 klein.

Deswegen können wir das Gleichungssystem (11) linearisieren, indem wir $\delta_1 \cdot \delta_2 = 0$ setzen.

Linearisiertes Differentialgleichungssystem (11):

$$\dot{\delta}_1 = \bar{p}_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \delta_2 \quad (12)$$

$$\dot{\delta}_2 = -\bar{p}_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \delta_1 \quad (13)$$

Leitet man noch einmal ab, erhält man

$$\ddot{\delta}_1 = \bar{p}_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \dot{\delta}_2, \quad (14)$$

$$\ddot{\delta}_2 = -\bar{p}_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \dot{\delta}_1. \quad (15)$$

Setzt man nun (13) in (14) und (12) in (15) ein, erhält man

$$\ddot{\delta}_1 = -\bar{p}_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{p}_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \delta_1, \quad (16)$$

$$\ddot{\delta}_2 = -\bar{p}_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{p}_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \delta_2. \quad (17)$$

Nun setzt man $\sqrt{\bar{p}_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{p}_2 \cdot \alpha_{21}} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \omega$ und setzt es in (16) und (17) ein. Das ergibt:

$$\ddot{\delta}_1 = -\omega^2 \cdot \delta_1$$

$$\ddot{\delta}_2 = -\omega^2 \cdot \delta_2$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind nach Tafelwerk

$$\delta_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t),$$

$$\delta_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t) + B_2 \cdot \sin(\omega t).$$

Die Kosinus- und Sinusfunktionen in den Gleichungen zeigen, dass sich δ_1 und δ_2 periodisch verändern. Die Populationen oszillieren also um die Fixpunkte.

5.2 Trajektorien

Trägt man die Anzahl der Räuber über der Anzahl der Beute ab, so erhält man auf Grund der periodischen Oszillation geschlossene Kurven (Trajektorien) um den Fixpunkt, siehe Abb. 9.

Diese Trajektorien lassen sich explizit bestimmen. Hierfür ersetzt man in den Differentialgleichungen zunächst \dot{p}_1 durch $\frac{dp_1}{dt}$ und \dot{p}_2 durch $\frac{dp_2}{dt}$:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_{12} \cdot p_1 \cdot p_2,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \alpha_2 \cdot p_2 - \alpha_{21} \cdot p_1 \cdot p_2.$$

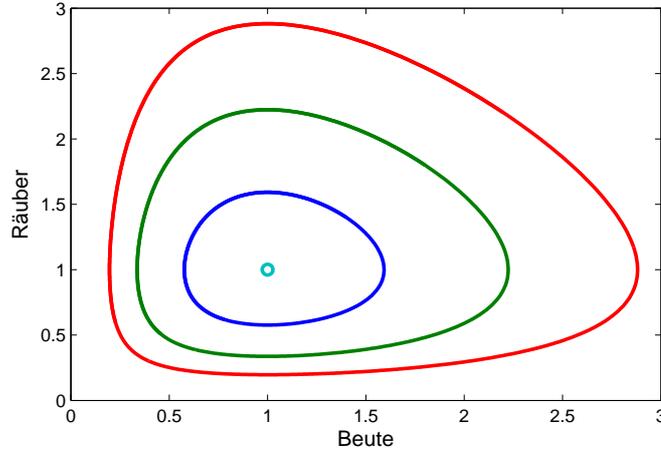


Abbildung 9: Trajektorien beim Räuber-Beute-Modell

Beide Gleichungen lassen sich nach dt umformen und dann gleichsetzen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{(-\alpha_1 + \alpha_{12} \cdot p_2) \cdot p_1} &= \frac{dp_1}{(\alpha_2 - \alpha_{21} \cdot p_1) \cdot p_2}, \\ \frac{\alpha_2 - \alpha_{21} \cdot p_1}{p_1} \cdot dp_1 &= \frac{-\alpha_1 + \alpha_{12} \cdot p_2}{p_2} \cdot dp_2, \\ \left(\frac{\alpha_2}{p_1} - \alpha_{21}\right) \cdot dp_1 &= \left(-\frac{\alpha_1}{p_2} + \alpha_{12}\right) \cdot dp_2, \\ \alpha_2 \cdot \int \frac{1}{p_1} dp_1 - \alpha_{21} \cdot \int dp_1 &= -\alpha_1 \cdot \int \frac{1}{p_2} dp_2 + \alpha_{12} \cdot \int dp_2, \\ \alpha_2 \cdot \ln(p_1) - \alpha_{21} \cdot p_1 &= -\alpha_1 \cdot \ln(p_2) + \alpha_{12} \cdot p_2 + C, \\ \alpha_2 \cdot \ln(p_1) + \alpha_1 \cdot \ln(p_2) - \alpha_{21} \cdot p_1 - \alpha_{12} \cdot p_2 &= C. \end{aligned}$$

Welche dieser Trajektorien man in einem speziellen Fall erhält, lässt sich über den Parameter C bestimmen.

Da in diesem Modell die Beute aber ohne Räuber wieder unbeschränkt wachsen würde, bietet es sich an, für die Beute eine Kapazität einzuführen.

$$\dot{p}_1 = p_1 \cdot (\alpha_{12} \cdot p_2 - \alpha_1) \quad (18)$$

$$\dot{p}_2 = p_2 \cdot \left(\alpha_2 \cdot \left(1 - \frac{p_2}{K}\right) - \alpha_{12} \cdot p_1\right) \quad (19)$$

Um hier wieder die Fixpunkte auszurechnen, setzt man \dot{p}_1 und \dot{p}_2 gleich 0 und

erhält durch Umformungen:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_{21}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{12} \cdot K}\right) \\ \bar{p}_2 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_{12}} \end{aligned}$$

Der Fixpunkt für die Räuberpopulation im erweiterten Modell unterscheidet sich also von dem im einfachen Räuber-Beute-Modell. Zudem lässt sich beobachten, dass durch die Einführung einer Kapazität der Fixpunkt anziehend wird. Siehe dazu Abb. 10.

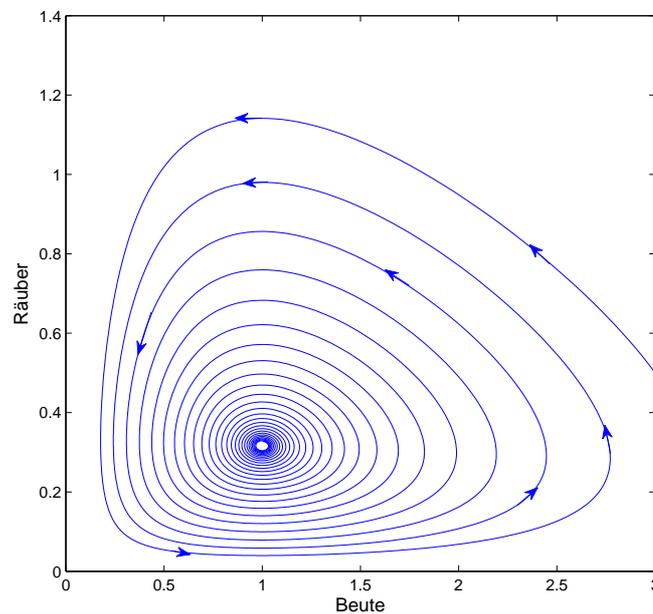


Abbildung 10: Räuber-Beute-Modell mit Kapazität

6 Das Fress-Experiment

Am 29.7.07 führten wir im Rahmen unserer Präsentation eine interaktive rundenbasierte Echtzeit-Simulation des Konkurrenzmodells durchs.

Es gab zwei Populationen, dargestellt durch Jungen und Mädchen, die um die Ressourcen (Gummibärchentütchen) konkurrieren mussten, um sich zu vermehren. Beide Spezies hatten eine Wachstumskonstante von 2 pro Runde, allerdings mussten die Jungen gegen einen Konkurrenznachteil bestehen. Dieser bestand

darin, dass sie 2 Gummibärentütchen „verspeisen“ mussten, um sich zu vermehren, den Mädchen genügte jedoch eine Tüte.

Bevor das Experiment begann, war es unklar, ob es zur Verdrängung der Jungen oder zu einer Koexistenz der beiden Populationen kommen würde. Vor allem am Anfang, als die Ressourcen knapp wurden, sah es tatsächlich so aus, als ob die Mädchen die Jungen verdrängen würden. Allerdings gelang es den Jungen durch eine Aktivierung ihres Aggressionspotentials, sich teilweise durchzusetzen, sodass es nachher doch zu einer Koexistenz kam.

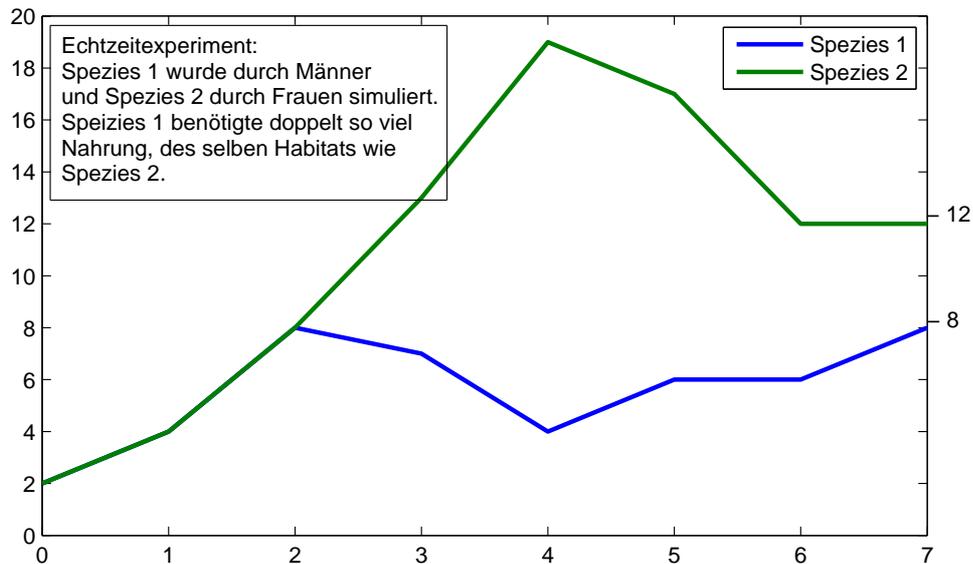


Abbildung 11: Der Populationsverlauf in unserem Experiment

7 Zusammenfassung der Woche

Es wurden zunächst einfache Populationsmodelle, das geometrische und das exponentielle Wachstum, als Differentialgleichungen hergeleitet. Anhand dieser noch analytisch lösbaren Differentialgleichungen wurde das Eulerverfahren zur Annäherung der Lösungen entwickelt. Dieses wurde im Laufe der Woche zum verbesserten Eulerverfahren weiterentwickelt. Mit diesem Mittel konnten dann komplexere Modelle mit Beschränkung und gegenseitiger Beeinflussung hergeleitet und simuliert werden. Das logistische Wachstum führte die natürliche Begrenzung der Lebensräume und das Konkurrenzsystem von Lotka und Volterra die Beeinflussung zwischen den Spezies ein. Um dem friedlichen Zusammenleben ein Ende zu setzen, wurde das Räuber-Beute-System, ebenfalls von Lotka und Volterra,

inklusive Kapazität entwickelt. Bei den beschränkten und konkurrierenden Verfahren traten Effekte wie Oszillation, Koexistenz und Verdrängung auf. Diese stabilisierten sich in Abhängigkeit von der Kapazität in ihren Fixpunkten, welche auch explizit ausgerechnet werden konnten. Die behandelten Systeme können jedoch nur isolierte natürliche Vorgänge simulieren. In der Natur existieren viele gekoppelte Habitate, in denen die Spezies leben und sich bewegen können. Dieser Sachverhalt kann mittels Diffusion ebenfalls simuliert werden; dies wurde jedoch nur angeschnitten.