Fixpunkte von Mengenabbildungen

Teilnehmer:

Peter Frentrup	Heinrich-Hertz-Oberschule
Gregor Pasemann	Georg-Forster-Oberschule
Olof Peters	Herder-Oberschule
Irena Weiß	Herder-Oberschule
Daniel Will	Heinrich-Hertz-Oberschule

Gruppenleiter:

Konrad Gröger	Humboldt-Universität zu Berlin

Die Gruppe hat sich mit der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf Abbildungen befasst, die spezielle Teilmengen der Ebene auf ebensolche Mengen abbilden. Zur Vorbereitung sind die dafür erforderlichen Begriffe und Sachverhalte aus der Theorie der metrischen Räume erarbeitet worden. Darüber hinaus ist der Hausdorffabstand von Teilmengen der Ebene eingeführt worden.
Das durch den Banachschen Fixpunktsatz nahegelegte Verfahren zur näherungsweisen Fixpunktbestimmung ist für spezielle strikt kontraktive Abbildungen F durch ein Computerprogramm realisiert worden. Die Ergebnisse des Programms zeigen, dass sehr einfach definierte Abbildungen F zu überraschend strukturierten Fixpunkten führen können. Unter anderem ergeben sich als Fixpunkte selbstähnliche Mengen, d. h. Mengen, die zu einer echten Teilmenge ähnlich sind.

1 Grundlagen

Definition 1: Als **Metrik** auf einer beliebigen Menge M wird eine Funktion d bezeichnet, die den Elementen von $M \times M$ nichtnegative reelle Zahlen zuordnet und die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} d(u,v) &= 0 \iff u = v, && (1)\\ d(u,v) &= d(v,u) \quad \text{(Symmetrie)}, && (2)\\ d(u,w) &\leqslant d(u,v) + d(v,w) \quad \text{(Dreiecksungleichung)}. && (3) \end{aligned}$$

Die Zahl $d(u,v)$ wird als Abstand von u und v interpretiert. Ein Paar (M,d), bestehend aus einer Menge M und einer Metrik d auf M, wird als **metrischer Raum** bezeichnet. Wenn die benutzte Metrik aus dem Zusammenhang klar ist, spricht man auch vom metrischen Raum M.

Die Elemente eines metrischen Raumes nennt man oft **Punkte** des Raumes, auch dann, wenn es sich bei den Elementen nicht um Punkte im üblichen Sinne handelt.

Definition 2: Eine Folge (x_n) von Punkten eines metrischen Raumes (M,d) heißt **konvergent**, wenn es ein $x^* \in M$ gibt, sodass

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0 \tag{4}$$

gilt. Man schreibt statt (4) auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

und nennt x^* **Grenzwert** der Folge (x_n).

Definition 3: Eine Teilmenge $A \subset M$ [1]) heißt **abgeschlossen** im metrischen Raum (M,d), wenn A die Grenzwerte aller in (M,d) konvergenten Folgen enthält, deren Glieder Elemente von A sind.

Satz 1. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen eines metrischen Raumes M ist wieder eine abgeschlossene Menge.*

Beweis: Seien A_i $(i \in I)$ abgeschlossene Teilmengen von M und A der Durchschnitt aller A_i; dabei kann die Menge I der Indizes beliebig sein (endlich, abzählbar oder auch nicht abzählbar). Ferner sei (x_n) eine konvergente Folge in A mit dem Grenzwert x^*. Dann ist (x_n) für jedes i auch eine Folge mit

[1]) $X \subset Y$ bedeutet: Jedes Element von X ist auch Element von Y. Es ist also $X = Y$ nicht ausgeschlossen.

Gliedern aus A_i. Wegen der Abgeschlossenheit von A_i muss auch x^* in A_i liegen. Weil x^* in allen A_i enthalten ist, muss es auch in A enthalten sein. Dies gilt für alle konvergenten Folgen (x_n). Somit ist A abgeschlossen.

Satz 2. *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen eines metrischen Raumes M ist wieder eine abgeschlossene Menge.*

Beweis: Seien A_i $(i = 1, \dots, k)$ endlich viele abgeschlossene Teilmengen von M und A die Vereinigung aller A_i. Ferner sei (x_n) eine konvergente Folge in A mit dem Grenzwert x^*. Dann gibt es nach dem Schubkastenprinzip wenigstens eine Menge A_i, in der unendlich viele Folgenglieder sind. In dieser Menge hat die Folge daher den Grenzwert. Da A diese Menge jedoch als Teilmenge enthält, ist der Grenzwert auch ein Element von A. Dies gilt für alle konvergenten Folgen (x_n). Daher ist A abgeschlossen.

Definition 4: Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann definiert man $\overline{A}$ als Durchschnitt aller derjenigen abgeschlossenen Teilmengen von M, die A enthalten, und man nennt $\overline{A}$ die **abgeschlossene Hülle** von A.

Definition 5: Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (M, d) heißt **Cauchyfolge**, wenn

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

gilt. Ein metrischer Raum (M, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge aus M gegen einen Punkt in M konvergiert.

Definition 6: Eine Funktion $F : M \to M$ heißt **strikt kontraktiv** im metrischen Raum (M, d), wenn für beliebige $x, y \in M$ und ein $q \in [0, 1[$ Folgendes gilt:

$$d(F(x), F(y)) \leqslant q\, d(x, y). \tag{5}$$

Eine Zahl q, für die die Formel (5) gilt, nennt man **Kontraktionskonstante** von F.

Satz 3 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und F eine strikt kontraktive Funktion von M in M. Dann existiert genau ein Punkt $x^* \in M$, für den*

$$F(x^*) = x^*$$

gilt. Ist x_0 in M beliebig gewählt und $x_n := F(x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge (x_n) gegen den Punkt x^*.

Einen Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes findet man im Bericht über die 2. Sommerschule *Lust auf Mathematik* in Blossin 2002, aber auch in vielen Analysislehrbüchern.

2 Ein spezieller metrischer Raum

Im Folgenden sei

$$Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1, x_2 \in [0, 1]\}.$$

Für $x = (x_1, x_2)$ setzen wir, wie üblich, $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. In Q sei d der herkömmliche Abstand, d. h., für zwei Punkte $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ sei $d(x, y) := |x - y|$. Ferner sei $\mathcal{M}$ die Menge aller abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen von Q. Auf dieser Menge soll eine Metrik eingeführt werden. Zur Vorbereitung definieren wir für Mengen aus $\mathcal{M}$ eine Art von Umgebungen.

Für $A \subset Q$ und $r > 0$ sei $U_r(A)$ die Menge aller Punkte x aus Q, zu denen es jeweils einen Punkt y aus A gibt, dessen Abstand von x kleiner als r ist:

$$U_r(A) := \{x \in Q;\ |x - y| < r \text{ für ein } y \in A\}.$$

Für $A, B \in \mathcal{M}$ sei

$$\delta(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0;\ A \subset U_\varepsilon(B)\}$$

und

$$d_H(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}.$$

Die Zahl $d_H(A, B)$ bezeichnet man als **Hausdorffabstand** von A und B, und die Funktion d_H nennt man **Hausdorffmetrik** auf $\mathcal{M}$. Diese Redeweise wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 4. *Die Funktion d_H ist eine Metrik auf $\mathcal{M}$.*

Beweis: 1a) Wenn zwei Mengen $A, B \in \mathcal{M}$ gleich sind, dann liegen sie auch für alle $\varepsilon > 0$ in ihren ε-Umgebungen. Folglich ist $\delta(A, B) = \delta(B, A) = 0$. Somit ist auch der Hausdorffabstand dieser Mengen gleich Null.

1b) Ist $d_H(A, B) = 0$, so müssen sowohl $\delta(A, B)$ als auch $\delta(B, A)$ gleich Null sein. Wir zeigen im nächsten Beweisschritt, dass aus $\delta(A, B) = 0$ die Beziehung $A \subset B$ folgt. Aus $\delta(A, B) = \delta(B, A) = 0$ ergibt sich daher, dass $A \subset B$ und $B \subset A$ und damit $A = B$ ist.

1c) Sei $\delta(A, B) = 0$ für zwei beliebige A, B. Angenommen, es gäbe ein $x \in A$, das nicht in B liegt. Sowohl A als auch B sind abgeschlossen. Daher kann der Abstand zwischen x und Elementen aus B nicht beliebig klein gemacht werden, weil sonst eine gegen x konvergente Folge aus B existieren würde und x somit ein Element von B wäre. Folglich kann $\delta(A, B)$ nicht Null sein, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Somit folgt aus $\delta(A, B) = 0$, dass alle Elemente von A in B liegen.

2. Die Symmetrie des Hausdorffabstandes folgt aus der Beziehung

$$d_H(A, B) = \max(\delta(A, B), \delta(B, A)) = \max(\delta(B, A), \delta(A, B)) = d_H(B, A).$$

3. Zum Beweis der Dreiecksungleichung zwischen den Mengen $A, B, C \in \mathcal{M}$ wählen wir zunächst ein $r > \delta(A, B)$ und ein $s > \delta(B, C)$. Dann ist sowohl $A \subset U_r(B)$ als auch $B \subset U_s(C)$. Daraus folgt: $A \subset U_r(U_s(C))$.

Es werde für ein beliebiges $x \in U_r(U_s(C))$ ein $y \in U_s(C)$ so gewählt, dass $|x - y| < r$ gilt. Weiterhin werde für das gefundene y ein $z \in C$ so gewählt, dass $|y - z| < s$ gilt. Aufsummiert ergibt sich:

$$|x - y| + |y - z| < r + s$$

Daraus folgt über die Dreiecksungleichung für Elemente aus Q:

$$|x - z| < r + s.$$

Somit ist x ein Element von $U_{r+s}(C)$ und dementsprechend $A \subset U_{r+s}(C)$. Dies bedeutet, dass $\delta(A, C) \leqslant r+s$ ist. Da sich r beliebig an $\delta(A, B)$ annähern kann und auch s beliebig nahe an $\delta(B, C)$ angenähert werden kann, gilt

$$\begin{aligned} \delta(A, C) &\leqslant \delta(A, B) + \delta(B, C) \\ &\leqslant d_H(A, B) + d_H(B, C). \end{aligned}$$

Analoge Schlussfolgerungen lassen sich für $\delta(C, A)$ ziehen. Somit gilt die Dreiecksungleichung

$$d_H(A, C) \leqslant d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

Satz 5. *Es sei (A_n) eine absteigende Folge aus $\mathcal{M}$, d. h., es gelte:*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

Dann ist der Durchschnitt $A^* := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ Grenzwert der Folge (A_n).

Beweis: 1. Wir zeigen, dass A^* nicht leer ist. Zu diesem Zweck wählen wir aus jeder Menge A_n einen Punkt x_n aus. Die so gefundene Punktfolge (x_n) ist beschränkt, weil alle x_n zum Quadrat Q gehören. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (angewandt auf die Folgen der Koordinaten der Punkte x_n) hat die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_j}). Der Grenzwert dieser Teilfolge sei x^*. Ist m eine beliebige natürliche Zahl, so ist $n_j \geq m$ für alle hinreichend großen j. Für diese j gilt $x_{n_j} \in A_{n_j} \subset A_m$. Weil die Menge A_m abgeschlossen ist, muss der Grenzwert x^* zu A_m gehören. Da m beliebig war, gehört x^* zum Durchschnitt aller A_m, also zu A^*. Damit ist gezeigt, dass A^* nicht leer ist. Da A^* als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, gehört A^* zu $\mathcal{M}$.

2. Es ist $\delta(A^*, A_n) = 0$, denn es ist $A^* \subset A_n$ für alle n.

3. Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass $A_n \subset U_\varepsilon(A^*)$ gilt für alle hinreichend großen n. Dann ist nämlich $d_H(A_n, A^*) < \varepsilon$ für diese n. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass $A_n \not\subset U_\varepsilon(A^*)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Punkte $x_n \in A_n$, die nicht zu $U_\varepsilon(A^*)$ gehören. Nach Beweisschritt 1 gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}), die gegen einen Punkt $x^* \in A^*$ konvergiert. Dem widerspricht die Tatsache, dass die Punkte x_{n_j} nicht zu $U_\varepsilon(A^*)$ gehören. Ihr Abstand zu jedem Punkt von A^*, also insbesondere ihr Abstand zu x^* ist mindestens ε. Der Widerspruch widerlegt die Annahme, dass keine der Mengen A_n in $U_\varepsilon(A^*)$ liegt. Da die Folge (A_n) absteigend ist, liegen also von einem Index an alle Mengen A_n in $U_\varepsilon(A^*)$.

Hilfssatz. *Für zwei Elemente C und D von $\mathcal{M}$ gelte die Beziehung $C \subset D$. Dann gilt auch $\overline{C} \subset \overline{D}$.*

Beweis: Es gilt $C \subset D \subset \overline{D}$. Somit ist $\overline{D}$ ein abgeschlossene Menge, in der C enthalten ist. Da $\overline{C}$ nach Definition der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen ist, die C enthalten, ist $\overline{C}$ eine Teilmenge von $\overline{D}$.

Satz 6. *Der metrische Raum $(\mathcal{M}, d_H)$ ist vollständig.*

Beweis: Sei (A_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{M}$. Dann werde eine Folge (B_n) wie folgt definiert:

$$B_n := \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}.$$

Die Folge (B_n) ist absteigend, da für jedes n das Folgenglied B_n die Vereinigung aus A_n und B_{n+1} ist. Nach Satz 5 hat (B_n) für $n \to \infty$ einen Grenzwert, der mit A^* bezeichnet werde. Nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$d_H(A_n, A^*) \leqslant d_H(A_n, B_n) + d_H(B_n, A^*).$$

Wenn $n \to \infty$ geht, so geht $d_H(B_n, A^*)$ gegen Null. Um zu zeigen, dass auch $d_H(A_n, B_n)$ gegen Null geht, muss man dies für $\delta(A_n, B_n)$ und für $\delta(B_n, A_n)$ zeigen. Für $\delta(A_n, B_n)$ ist die Aussage trivial, da $A_n \subset B_n$ ist. Um zu beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} \delta(B_n, A_n) = 0$ ist, muss man zunächst die Eigenschaft der Cauchyfolgen nutzen: $d_H(A_m, A_n) < \varepsilon$ für alle hinreichend grossen m und n. Somit existiert ein N, sodass $A_m \subset U_\varepsilon(A_n)$ für alle $m, n \geq N$ gilt. Damit ist für $n \geq N$ auch

$$\bigcup_{m \geq n} A_m \subset U_\varepsilon(A_n)$$

Die abgeschlossene Hülle der Vereinigung der A_m befindet sich, großzügig abgeschätzt, in der 2ε-Umgebung von A_n. Diese abgeschlossene Hülle ist per Definition gerade B_n, d. h., es ist

$$B_n \subset U_{2\varepsilon}(A_n)$$

Daher ist $\delta(B_n, A_n) < 2\varepsilon$, also kleiner als jeder beliebige Wert für hinreichend grosse n. Somit konvergiert $d_H(A_n, B_n)$ gegen Null. Mit der obigen Dreiecksungleichung ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} d_H(A_n, A^*) \leqslant 0.$$

Deshalb konvergiert die Cauchyfolge (A_n) gegen A^*.

3 Strikt kontraktive Abbildungen im metrischen Raum $(\mathcal{M}, d_H)$

Eine Möglichkeit, Funktionen in $\mathcal{M}$ zu definieren, besteht darin, zunächst Funktionen in dem Quadrat Q zu definieren. Diese können wie folgt aussehen:

$$f(x) = q(x - \xi) + \xi$$

Hierbei sei q eine Zahl aus dem Intervall $[0, 1[$ und ξ ein Punkt des Quadrats Q. Die Argumente x der Funktion f sind ebenfalls Punkte in Q. Diese

Funktion bewirkt, dass die Argumente um den Faktor q in Richtung ξ gezogen werden. Es handelt sich bei f um eine strikt kontraktive Funktion mit q als Kontraktionskonstante, denn für beliebige x, y aus Q ist

$$|q(x-\xi)+\xi \ - \ (q(y-\xi)+\xi)| = |q(x-\xi-y+\xi)| = q|x-y|.$$

Eine Funktion $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ kann nun wie folgt definiert werden:

$$F(A) := \{f(x);\ x \in A\} \ \text{ für } A \in \mathcal{M}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass eine solche Abbildung im Raum $\mathcal{M}$ strikt kontraktiv ist.

Satz 7. *Es sei $f : Q \longrightarrow Q$ eine Abbildung, die für ein $q \in [0,1[$ der Bedingung*

$$|f(x)-f(y)| \leqslant q|x-y| \ \text{ für alle } x, y \in Q \tag{6}$$

genügt. Ferner sei

$$F(A) := \{f(x);\ x \in A\} \textit{ für } A \in \mathcal{M}.$$

Dann ist $F(A) \in \mathcal{M}$ und $d_H(F(A), F(B)) \leqslant q\, d_H(A, B)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$.

Beweis: 1. Ist $A \in \mathcal{M}$, so ist A nicht leer. Deshalb ist auch $F(A)$ nicht leer. Um zu zeigen, dass $F(A)$ abgeschlossen ist, nehmen wir an, es sei (ξ_n) eine konvergente Folge von Punkten aus $F(A)$ mit dem Grenzwert ξ^*. Wir haben zu zeigen, dass ξ^* zu $F(A)$ gehört. Es ist $\xi_n = f(x_n)$ für geeignete Punkte x_n aus A. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge. Es gelte etwa $x_{n_j} \longrightarrow x^*$ für $j \to \infty$. Weil A abgeschlossen ist, gehört x^* zu A und damit $f(x^*)$ zu $F(A)$. Aus (6) folgt

$$|f(x_{n_j}) - f(x^*)| \leqslant q|x_{n_j} - x^*| \longrightarrow 0 \ \text{ für } j \to \infty.$$

Daher gilt

$$\xi^* = \lim_{j\to\infty} \xi_{n_j} = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(x^*) \in F(A).$$

2. Es seien A, B Mengen aus $\mathcal{M}$. Wir wählen $r > d_H(A, B)$. Zu einem beliebigen Punkt $\xi \in F(A)$ existiert ein $x \in A$, für das $f(x) = \xi$ ist. Zu x existiert dann ein $y \in B$, für das $|x-y| < r$ ist, denn es ist $A \subset U_r(B)$. Es ist $\eta := f(y) \in F(B)$ und

$$|\xi - \eta| = |f(x) - f(y)| \leqslant q|x-y| < qr.$$

Folglich ist $F(A) \subset U_{qr}(F(B))$ und damit $\delta(F(A), F(B)) < qr$. Aus Symmetriegründen gilt ebenso $\delta(F(B), F(A)) < qr$. Daher gilt die Ungleichung $d_H(F(A), F(B)) < qr$. Weil r dem Wert $d_H(A, B)$ beliebig nahe kommen darf, folgt daraus $d_H(F(A), F(B)) \leqslant q\, d_H(A, B)$.

Satz 8. *Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_n$ strikt kontraktive Funktionen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}$. Dann ist auch die durch $F(A) := \bigcup_{i=1}^{n} F_i(A)$ definierte Funktion $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ strikt kontraktiv.*

Beweis: Die Kontraktionskonstante von F_i sei q_i für $i = 1, ..., n$. Mit dem unten bewiesenen Hilfssatz gilt für alle $A, B \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_H(F_i(A), F_i(B)) \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i \, d_H(A, B). \end{aligned}$$

Da die q_i allesamt im Intervall $[0, 1[$ liegen, ist auch F strikt kontraktiv.

Hilfssatz. *Es sei $A := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ mit $A_i \in \mathcal{M}$ für $i = 1, \ldots, n$ und analog $B := B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ mit $B_i \in \mathcal{M}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt:*

$$d_H(A, B) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_H(A_i, B_i). \tag{7}$$

Beweis: Man wähle ein $r > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_H(A_i, B_i)$. Dann ist $A_i \subset U_r(B_i)$ für alle i. Nun ist die r-Umgebung von B gleich der Vereinigung der r-Umgebungen aller B_i. In der r-Umgebung von B ist daher die Vereinigung aller A_i enthalten. Die Vereinigung aller A_i ist nun gerade A. Daher gilt $A \subset U_r(B)$, woraus $\delta(A, B) \leqslant r$ folgt. Analog lässt sich $\delta(B, A) \leqslant r$ herleiten. Somit gilt $d_H(A, B) \leqslant r$. Da r der Zahl $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_H(A_i, B_i)$ beliebig nahe kommen kann, ergibt sich aus vorigen Ungleichung die Behauptung (7).

Um Fixpunkte von Abbildungen zu veranschaulichen, haben wir ein Computerprogramm geschrieben. Es realisiert verschiedene strikt kontraktive Abbildungen $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, zwischen denen der Benutzer des Programms wählen kann. Ist die Funktionsauswahl erfolgt, so werden das Quadrat Q (weiß) und die Startmenge A_0 (farbig) dargestellt. Jeweils bei Mausklick wird das nächste Glied der durch die Formel

$$A_n := F(A_{n-1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

definierten Iterationsfolge (A_n) berechnet und angezeigt. Nach einer gewissen Anzahl von Iterationsschritten wird der Fixpunkt mit der durch die Bildschirmauflösung begrenzten Genauigkeit erreicht. Einfache Abbildungen können zu komplizierten Strukturen der Fixpunktmengen führen.

Wir geben hier exemplarisch vier der im Programm realisierten Abbildungen und die zugehörigen Fixpunktmengen an. Alle vier Abbildungen F werden aus geeigneten Funktionen $f_j : Q \longrightarrow Q$, $j = 1, \ldots, l$, durch die Vorschrift

$$F(A) := \bigcup_{j=1}^{l} F_j(A), \quad F_j(A) := \{f_j(x);\ x \in A\} \text{ für } A \in \mathcal{M},\ j = 1, \ldots, l,$$

gewonnen. Daher genügt bei den Beispielen die Angabe von $f_1, \ldots, f_l$.

Beispiel 1. Wir wählen $l = 3$ und setzen

$$f_1(x) := \frac{1}{2}x,\ f_2(x) := \frac{1}{2}(x_1{+}1, x_2),\ f_3(x) := \frac{1}{2}(x_1, x_2{+}1) \text{ für } x = (x_1, x_2) \in Q.$$

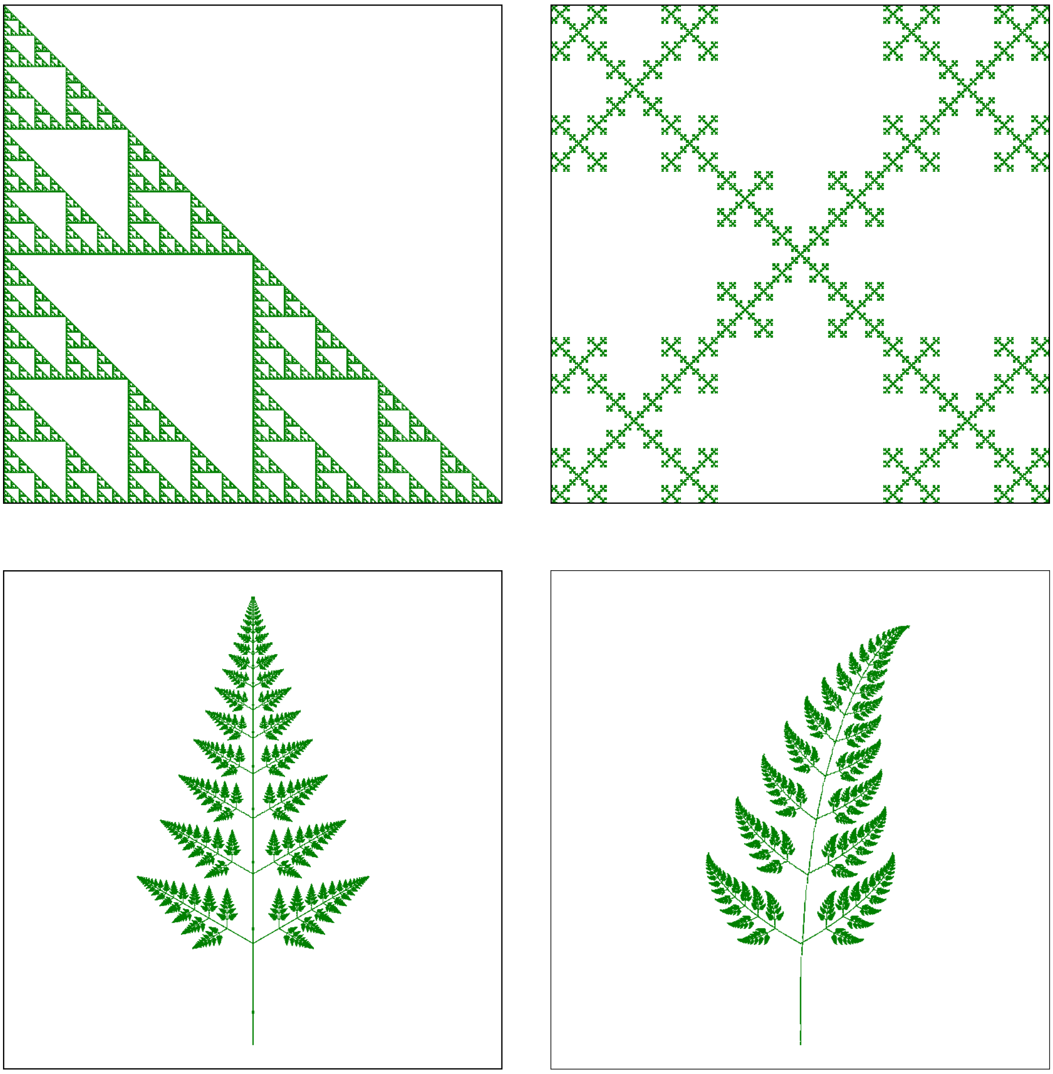

Abbildung 1: Fixpunkte zu den Beispielen 1 - 4

Der Fixpunkt, der hierdurch entsteht, wird Sierpińskidreieck genannt.

Beispiel 2. Wir wählen $l = 5$ und setzen

$$f_j(x) := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\xi_j \quad \text{für } x \in Q,\ j = 1, \ldots, 5;$$

dabei sei

$$\xi_1 := (0,0),\ \xi_2 := (0,1),\ \xi_3 := (1,0),\ \xi_4 := \frac{1}{2}(1,1),\ \xi_5 := (1,1).$$

Charakteristisch für die in den Beispielen 1 und 2 betrachteten Abbildungen F ist folgender Sachverhalt: Das Bild $F(A)$ einer Menge A ist die Vereinigung von l zu A *ähnlichen* Mengen, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Der Fixpunkt A^* von F muss deshalb gleich der Vereinigung von l Mengen sein, die zu A^* selbst ähnlich sind. Man sagt daher, dass A^* eine *selbstähnliche* Menge sei.

Beispiel 3. Wir wählen $l = 4$ und setzen für $x = (x_1, x_2) \in Q$

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= (0.8x_1 + 0.1, 0.8x_2 + 0.19), \\ f_2(x) &:= (0.15x_1 - 0.26x_2 + 0.439, 0.26x_1 + 0.15x_2 + 0.115), \\ f_3(x) &:= (0.15x_1 + 0.26x_2 + 0.411, -0.26x_1 + 0.15x_2 + 0.375), \\ f_4(x) &:= (0.006x_1 + 0.497, 0.2x_2 + 0.04). \end{aligned}$$

Beispiel 4. Wir wählen $l = 4$ und setzen für $x = (x_1, x_2) \in Q$

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= (0.8x_1 + 0.05x_2 + 0.1, -0.05x_1 + 0.8x_2 + 0.216), \\ f_2(x) &:= (0.15x_1 - 0.26x_2 + 0.179, -0.26x_1 + 0.15x_2 + 0.375), \\ f_3(x) &:= (-0.15x_1 + 0.26x_2 + 0.561, -0.26x_1 + 0.15x_2 + 0.115), \\ f_4(x) &:= (0.006x_1 + 0.497, 0.21x_2 + 0.04). \end{aligned}$$

Um den Approximationsprozess zu veranschaulichen, der zum Fixpunkt A^* führt, geben wir auf der letzten Seite für Beispiel 1 auch noch die Näherungen $A_0, \ldots, A_7$ an, die man erhält, wenn man mit $A_0 = Q$ startet.

4 Mengen mit nichtganzzahliger Dimension

Zum Abschluss des Berichts gehen wir auf einen Punkt ein, der in der mündlichen Präsentation aus Zeitgründen übergangen worden ist.

Definition 7: Wir teilen das Quadrat Q horizontal und vertikal in n gleichgroße Abschnitte, sodass n^2 Kästchen entstehen. Für $A \in \mathcal{M}$ bezeichnen wir mit $P_n(A)$ die minimale Anzahl an abgeschlossenen Kästchen, mit denen A überdeckt wird. Wenn es eine reelle Zahl d gibt, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(A)}{n^d}$$

existiert und positiv ist, dann nennen wir d die **Dimension** von A.

Zur Motivation dieser Definition betrachten wir Beispiele.

Beispiel 5. Wir bestimmen die Dimension von Q: Zur Überdeckung von Q benötigt man alle n^2 Kästchen. Folglich muss

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^d} = c$$

gelten, was nur für $d = 2$ möglich ist, wenn c reell und positiv sein soll.

Beispiel 6. Wir bestimmen die Dimension der Strecke

$$G := \{x = (x_1, x_2) \in Q;\ x_2 = 1/2\}.$$

Zur Überdeckung von G werden n Kästchen benötigt. Folglich muss

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^d} = c$$

gelten, was nur für $d = 1$ möglich ist, wenn c reell und positiv sein soll.

Für die beiden Beispiele 5 und 6 entspricht das Ergebnis den üblichen Dimensionsvorstellungen.

Beispiel 7. Die Dimension des Sierpińskidreiecks A^* soll bestimmt werden (vgl. Beispiel 1). Weil bei der entsprechenden Abbildung einer Menge A die Vereinigung von drei Mengen zugeordnet wird, die aus A durch Halbierung der Abstände (und unterschiedliche Verschiebungen) entstehen, beschränken wir uns bei der Bestimmung von $P_n(A^*)$ auf Werte von n, die Potenzen von 2 sind. Die in Abbildung 2 gezeigten Mengen $A_0, \ldots, A_7$ zeigen, dass man zum Überdecken des Fixpunkts A^* genau 3^k Kästchen der Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$ benötigt. Für $n = 2^k$ ist also $P_n(A^*) = 3^k$. Folglich gilt

$$\frac{P_n(A^*)}{n^d} = \frac{3^k}{(2^k)^d} = \Big(\frac{3}{2^d}\Big)^k.$$

Lässt man k und damit auch n gegen Unendlich streben, so konvergiert der letzte Wert nur dann gegen eine von Null verschiedene reelle Zahl, wenn $\frac{3}{2^d} = 1$ ist, also $d = \mathrm{ld}(3)$ (das ist der Logarithmus von 3 zur Basis 2). Dieser Wert liegt echt zwischen 1 und 2. Man kann durch zusätzliche Überlegungen zeigen, dass sich auch dann, wenn man n *alle* natürlichen Zahlen durchlaufen lässt, der gleiche Grenzwert ergibt. Das Sierpińskidreeick ist also eine Menge, der man eine nicht ganze Zahl als Dimension zuschreibt.

Wir verallgemeinern das Beispiel und geben eine Klasse von Abbildungen F an, für die sich die Dimension des jeweiligen Fixpunkts bestimmen lässt.

Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $l \in \{1, 2, \ldots, m^2\}$ fixiert. Ferner seien ξ_j, $j = 1, \ldots, l$ verschiedene Punkte von Q, deren Koordinaten ξ_{j1} und ξ_{j2} Zahlen aus der Menge $\Big\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\Big\}$ sind. Wir setzen

$$f_j(x) := \frac{1}{m}\, x + \xi_j \quad \text{für } x \in Q,\ j = 1, \ldots, l,$$

$$F_j(A) := \{f_j(x);\ x \in A\} \quad \text{für } A \in \mathcal{M},\ j = 1, \ldots, l,$$

und

$$F(A) := \bigcup_{j=1}^{l} F_j(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{M}.$$

Dann ist $F_j(A)$ gegenüber A um den Faktor $\frac{1}{m}$ verkleinert (und um ξ_j verschoben). Die Abbildung F ist dementsprechend strikt kontraktiv mit der Kontraktionskonstanten $\frac{1}{m}$. Setzt man $A_0 := Q$ und $A_k := F(A_{k-1})$ für

$k \in \mathbb{N}$, so ist, wie man induktiv zeigen kann, A_k die Vereinigung von l^k Teilquadraten der Seitenlänge $\frac{1}{m^k}$. Für den Fixpunkt A^* von F gilt $P_{m^k}(A^*) = l^k$, weil alle l^k Teilquadrate von A_k benötigt werden, um A^* zu überdecken. Folglich ist für $n = m^k$

$$\frac{P_n(A)}{n^d} = \frac{P_{m^k}(A)}{(m^k)^d} = \frac{l^k}{(m^d)^k} = \left(\frac{l}{m^d}\right)^k.$$

Lässt man k und damit auch n gegen Unendlich streben, so konvergiert der letzte Wert nur dann gegen eine von Null verschiedene reelle Zahl, wenn $\frac{l}{m^d} = 1$ ist, also $d = \log_m(l)$ (das ist der Logarithmus von l zur Basis m). Weil l zwischen $1 = m^0$ und m^2 liegt, ist die Dimension d eine Zahl aus dem Intervall $[0, 2]$.

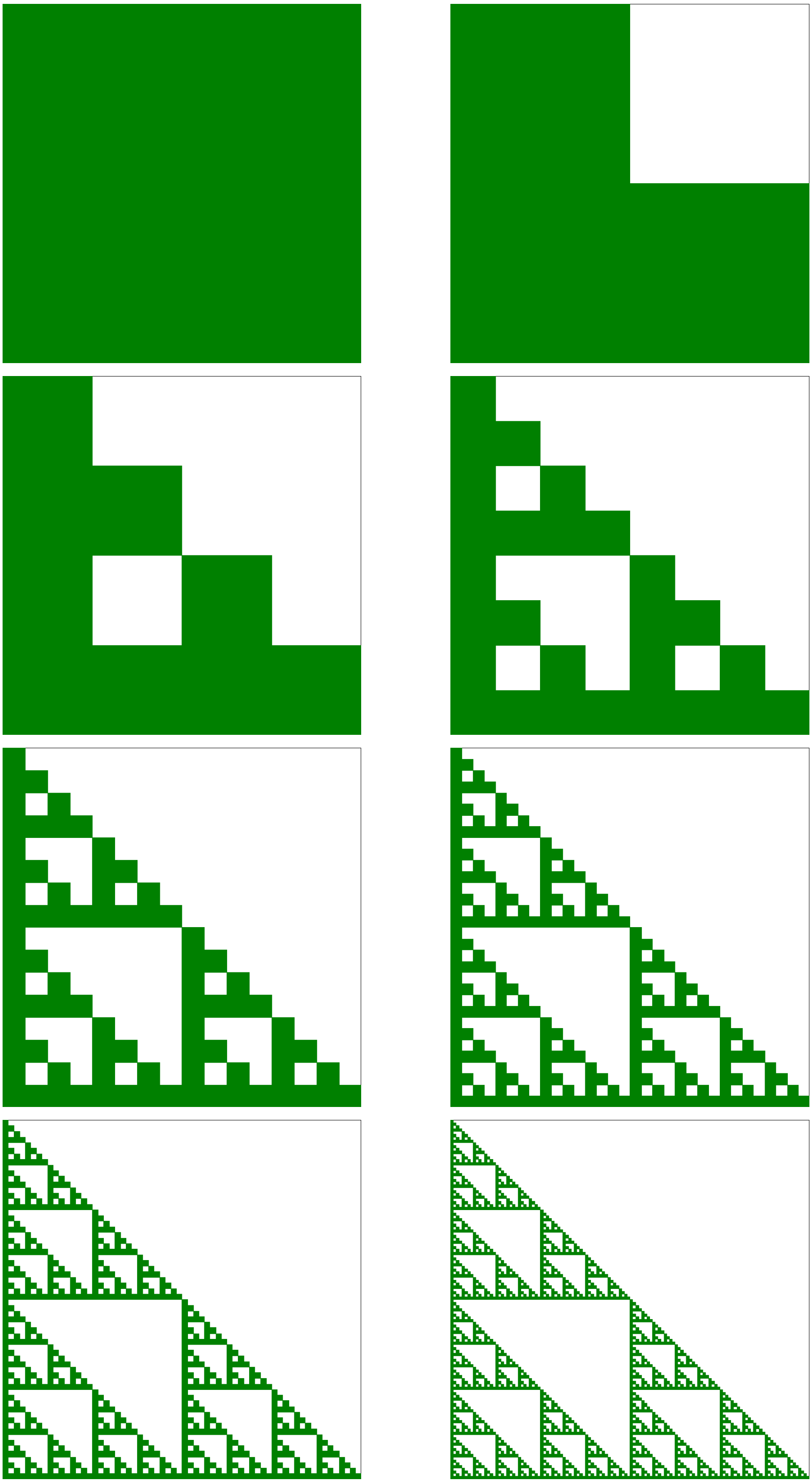

Abbildung 2: Näherungen A_0 - A_7 zu Beispiel 1