

Geometrie der Brüche

Teilnehmer:

Ssohrab Borhanian	Heinrich-Hertz-Oberschule
Sebastian Biegel	Georg-Forster-Oberschule
Georg Hieronimus	Herder-Oberschule
Julius Mielke	Herder-Oberschule
Thu Hien Nguyen	Heinrich-Hertz-Oberschule
Joscha Podlesny	Herder-Oberschule

Gruppenleiter:

Heino Hellwig	Humboldt-Universität zu Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
---------------	--

Unsere Gruppe untersuchte die rationalen Zahlen \mathbb{Q} auf geometrische Weise. Es mag überraschen sich eine Woche lang mit Brüchen zu beschäftigen, von denen man meint, alles in der Sekundarstufe I bereits gelernt zu haben. Wie der Bericht jedoch zeigt, ermöglicht eine geometrische Deutung der Brüche ein tieferes Verständnis ihrer Eigenschaften und einen einfachen, anschaulichen Zugang zur elementaren Zahlentheorie. Anhand der Originalarbeiten von Pick und Ford studierten wir das Wechselspiel zwischen geometrischer und arithmetischer Interpretation der Brüche. Die Ergebnisse ermöglichten uns u.a. lineare diophantische Gleichungen zu lösen und die Berechnung der Kettenbrüche geometrisch zu verstehen.

Inhaltsverzeichnis

1	Gitter und der Satz von Pick	19
2	Farey-Folgen	22
3	Lineare diophantische Gleichungen	27
4	Kettenbrüche	28
5	Ford-Kreise	32

1 Gitter und der Satz von Pick

Der Satz von Pick und die Theorie der Gitter sind einfache aber nützliche Hilfsmittel um Brüche und deren Eigenschaften geeignet zu visualisieren und geometrisch darzustellen.

Definition:

Ein **Gitter** wird durch die äquidistante Parallelverschiebung in Richtung zweier Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, um zwei feste, nicht notwendigerweise gleiche, diskrete Werte erzeugt. Diese parallelen Geraden bezeichnet man als Hauptgitterstrahlen, deren Schnittpunkte wir Gitterpunkte nennen. Gitterpolygone sind Polygone, deren Ecken auf Gitterpunkten liegen. Wir definieren als **Flächengrundeinheit** A_G des Gitters die Fläche des Parallelogramms, welches durch den Ursprung und seine Verbindung mit den nächsten Gitterpunkten auf den erzeugenden Geraden aufgespannt wird.

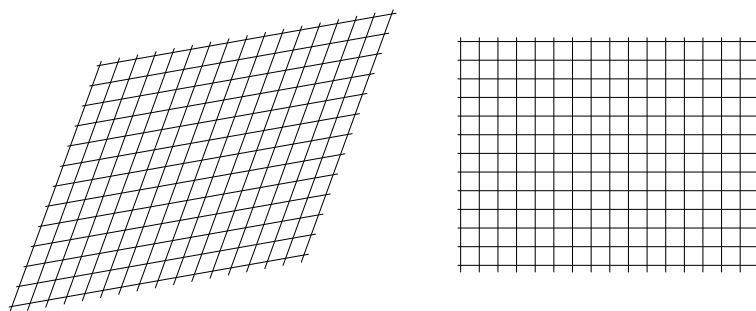


Abbildung 1: Beispiele zweier Gitter.

Satz:

Die Fläche eines (nicht notwendigerweise konvexen) Polygons $P \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Gitterpunkten als Ecken ist durch

$$A(P) = i + \frac{u}{2} - 1$$

gegeben, wobei i die Anzahl der inneren Gitterpunkte und u die Anzahl der Randpunkte ist.

Beweis:

Für ein Gitterpolygon P definieren wir die Gitterpunktzahl des Polygons als:

$$G(P) = i + \frac{u}{2} - 1$$

Wir zerschneiden das Polygon durch das Verbinden zweier Randpunkte, sodass zwei neue Polygone entstehen und definieren δ als Anzahl der Gitterpunkte, welche zwischen den beiden Randpunkten auf der Verbindungsgeraden liegen. Wir zeigen nun,

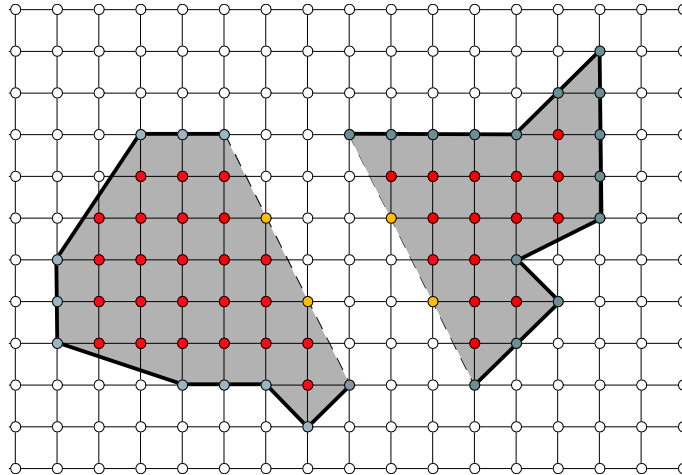


Abbildung 2: Die Zerlegung eines Gitterpolygons P in zwei Teilpolygone P_1 und P_2 .

dass sich die Gitterpunktzahl additiv verhält, d.h. das gilt:

$$G(P) = G(P_1) + G(P_2)$$

Die Gitterpunktzahl der beiden Teilpolygone ist:

$$G(P_1) = i_1 + \frac{u_1}{2} - 1$$

$$G(P_2) = i_2 + \frac{u_2}{2} - 1$$

Weiter berechnet sich:

$$i = i_1 + i_2 + \delta$$

$$u = u_1 + u_2 - 2 \cdot \delta - 2$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 G(P) &= i + \frac{u}{2} - 1 \\
 &= i_1 + i_2 + \delta + \frac{u_1 + u_2}{2} - \delta - 2 \\
 &= i_1 + \frac{u_1}{2} - 1 + i_2 + \frac{u_2}{2} - 1 \\
 &= G(P_1) + G(P_2)
 \end{aligned}$$

Den Flächeninhalt eines Hauptgitterpolygons P_H , dessen Seiten parallel zu den Hauptgitterstrahlen sind, können wir nun über ein ganzzahliges Vielfaches der Flächeneinheit ausdrücken. Für die Gitterpunktzahl G_G der Flächeneinheit mit $i=0$ und $u=4$ folgt:

$$G_G = i + \frac{u}{2} - 1 = 1 = A_G$$

Demnach folgt für den Flächeninhalt eines Hauptgitterpolygons P_H :

$$A(P_H) = G(P_H) = n \cdot A_G = n ; n \in \mathbb{N}$$

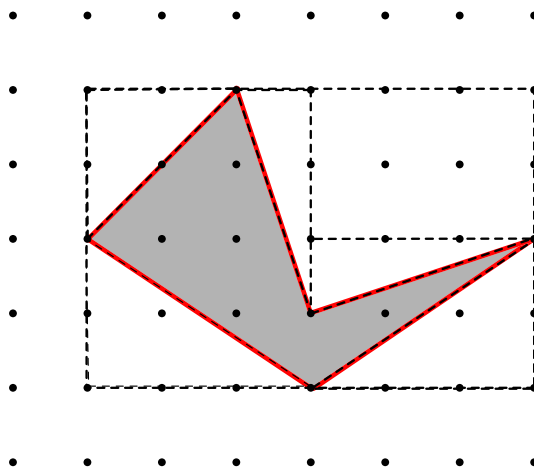


Abbildung 3: Die Fläche eines beliebigen Gitterpolygons wurde mittels Dreiecke so ergänzt, dass die Flächenberechnung auf die Flächenberechnung von Hauptgitterpolygonen hinausläuft.

Nun ist die Fläche eines beliebigen Gitterpolygons so zu ergänzen, dass die Figur nur von Hauptgitterstrahlen begrenzt wird, indem man über allen Seiten die nicht

schon Hauptgitterstrahlen sind, Dreiecke konstruiert, deren andere Seiten Hauptgitterstrahlen sind. Diese Seiten, die nicht Hauptgitterstrahlen sind, können somit als Diagonalen von Parallelogrammen, deren Flächeninhalt dem Doppelten des Flächeninhalts des ergänzenden Dreiecks entspricht, aufgefasst werden. Daraus folgt, dass die Gitterpunktzahl der durch Dreiecke erweiterten Figur gleich dessen Flächeninhalt und somit auch für das ursprüngliche Gitterpolygon die Gitterpunktzahl gleich dem Flächeninhalt ist.

Der Satz von Pick wird im folgenden dazu verwendet, die Haupteigenschaft einer fundamentalen Folge von Brüchen, der Farey-Folge, zu beweisen.

2 Farey-Folgen

Der Geologe J. Farey schrieb im Jahr 1816 an das *Philosophical Magazine* einen Brief, in dem er von einer erstaunlichen Eigenschaft der Brüche berichtete [1]. Er war im Laufe seiner Arbeiten auf ein mathematisches Phänomen gestoßen, dass er sich nicht erklären konnte:

If all the possible vulgar fractions of different values, whose greatest denominator (when in their lowest terms) does not exceed any given number, be arranged in the order of their values, or quotients; then if both the numerator and the denominator of any fraction therein, be added to the numerator and the denominator, respectively, of the fraction next but one to it (on either side), the sums will give the fraction next to it; although, perhaps, not in its lowest terms. For example, if 5 be the greatest denominator given; then are all the possible fractions, when arranged, $1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4,$ and $4/5$; taking $1/3$, as the given fraction, we have $(1+1)/(5+3) = 2/8 = 1/4$ the next smaller fraction than $1/3$; or $(1+1)/(3+2) = 2/5$, the next larger fraction to $1/3$. Again, if 99 be the largest denominator, then, in a part of the arranged Table, we should have $15/52, 28/97, 13/45, 24/83, 11/38,$ etc.; and if the third of these fractions be given, we have $(15+13)/(52+45) = 28/97$ the second: or $(13+11)/(45+38) = 24/83$ the fourth of them: and so in all the other cases. I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been before pointed out; or whether it may admit of any easy or general demonstration; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers; and am Sir, Your obedient humble servant, J. Farey.

Er erhoffte sich, dass ein Leser des Magazins seine Vermutungen beweisen könnte. Cauchy fand in der Tat bald einen Beweis und benannte die Folgen nach Farey. Im Folgenden werden wir nun auf die Definition und die Haupteigenschaften der Farey-Folgen eingehen.

Definition:

Eine **Farey-Folge** der Ordnung n ist die aufsteigende Folge der unkürzbaren Brüche zwischen 0 und 1 mit Nenner $\leq n$.

Definition:

Der **Mediant** zweier Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ mit positiven Nennern ist der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$.

Satz:

Ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so liegt der Mediant genau zwischen diesen Brüchen, d.h. es gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

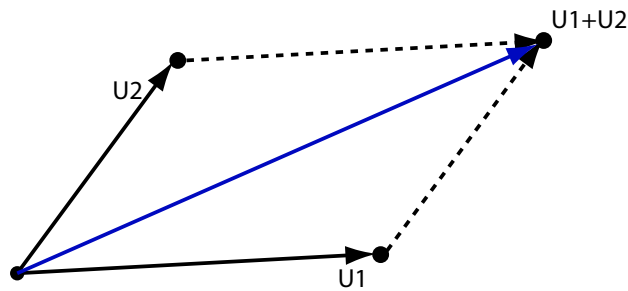
Beweis:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ \Leftrightarrow & a \cdot d < b \cdot c \\ 1. \Leftrightarrow & a \cdot d^2 < b \cdot c \cdot d \\ \Leftrightarrow & a \cdot d^2 + a \cdot b \cdot d < b \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot d \\ \Leftrightarrow & a \cdot d \cdot (b+d) < b \cdot d \cdot (a+c) \\ 2. \Leftrightarrow & a \cdot b \cdot d < b^2 \cdot c \\ \Leftrightarrow & a \cdot b \cdot d + b \cdot c \cdot d < b \cdot c \cdot (b+d) \\ \Leftrightarrow & b \cdot d \cdot (a+c) < b \cdot c \cdot (b+d) \end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & a \cdot d \cdot (b+d) < b \cdot d \cdot (a+c) < b \cdot c \cdot (b+d) \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \end{aligned}$$

Die Medianteneigenschaft hat eine einfache geometrische Deutung: wir ordnen den Brüchen $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{c}{d}$ die Punkte $U_1 = (b; a)$ bzw. $U_2 = B(d; c)$ des Fundamentalgitters zu. Der Mediant $\frac{a+c}{b+d}$ entspricht dann der Diagonalen des Additionsparallelogramms $U_1 + U_2$.



Satz (Haupteigenschaften der Farey-Folgen):

I. Für zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathfrak{F}_n$ gilt:

$$|bc - ad| = 1. \quad (1)$$

II. Für drei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \frac{c}{d} \in \mathfrak{F}_n$ gilt:

$$\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}. \quad (2)$$

Bemerkung:

Hauptsatz I. und Hauptsatz II. sind äquivalent.

Beweis:

(I \Rightarrow II) Seien $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \frac{c}{d} \in \mathfrak{F}_n$ drei aufeinanderfolgende Brüche beliebig gewählt. Nach 1. gilt:

$$\begin{aligned} & bx - ay = 1 \wedge cy - xd = 1 \\ \Rightarrow & x(b+d) = y(a+c) \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

(II \Rightarrow I) beweisen wir durch Induktion.

Der 2. Satz gilt für alle Farey-Folgen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n=1$ $|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0| = 1 \rightarrow 1$. gilt für F_1

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: 1. gilt für \mathfrak{F}_n

Induktionsbehauptung: 1. gilt auch für \mathfrak{F}_n . Beweis : Seien $\frac{a}{b}; \frac{x}{y}; \frac{c}{d}$ drei beliebige benachbarte Brüche der Farey-Folge \mathfrak{F}_n .

Nach 2. gilt: $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$.

Also sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+c}{b+d}$ zwei benachbarte Brüche.

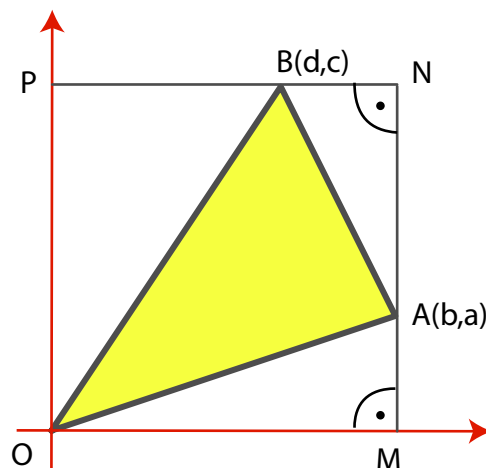
$$|b \cdot (a+c) - a \cdot (b+d)| = |ba + bc - ab - ad| = |bc - ad|$$

Nach der Induktionsannahme gilt:

$$|bc - ad| = 1 \rightarrow |b \cdot (a+c) - a \cdot (b+d)| = 1$$

\rightarrow 1. gilt auch für \mathfrak{F}_n

Für den Beweis der Haupteigenschaften reicht es also, zu beweisen, dass eine Eigenschaft gilt, da sie äquivalent sind. Wir beweisen die erste Eigenschaft geometrisch.



Seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind zwei benachbarte Brüche der Farey-Folge \mathfrak{F}_n . Wir ordnen den Brüchen $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{c}{d}$ die Punkte A(b;a) bzw. B(d;c) des Fundamentalgitters zu und bekommen ein Dreieck $\triangle AOB$. Im Inneren des Dreiecks $\triangle AOB$ können keine weitere Gitterpunkte liegen, da $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ benachbarte Brüche sind.

Auf \overline{OB} und \overline{OA} können auch keine weitere Gitterpunkte liegen, da die Brüche der Farey-Folge unkürzbar sind. Also können wir den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AOB$ mit dem Satz von Pick wie folgt berechnen:

$$A(\triangle AOB) = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

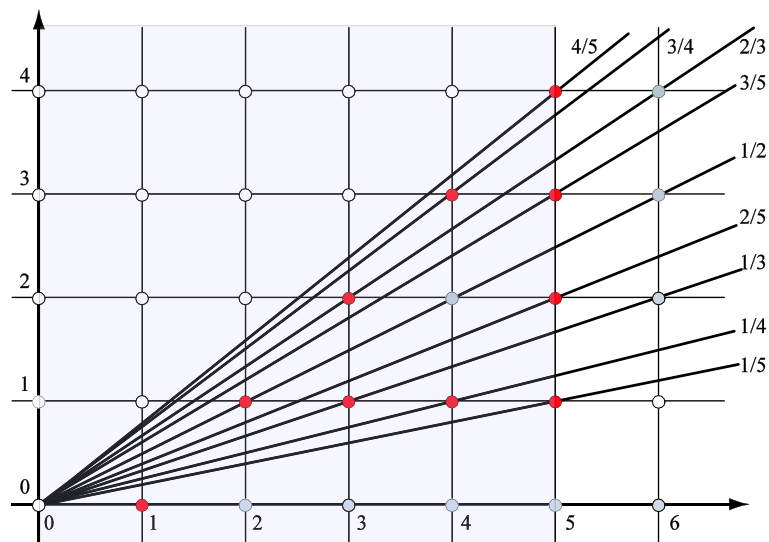


Abbildung 4: Die den Brüchen der Farey-Folge F_5 zugeordneten Ursprungsgeraden. Beachte, dass der Ordnung der Farey-Folge nach Größe der Ordnung der Ursprungsgeraden nach aufsteigender Steigung entspricht.

Wir können außerdem diesen Flächeninhalt auch analytisch berechnen:

$$\begin{aligned}
 A(\triangle AOB) &= A(\square MNP0) - A(\triangle BNA) - A(\triangle AMO) - A(\triangle PBO) \\
 &= \left| b \cdot c - \frac{1}{2} \cdot (c - a) \cdot (b - d) - \frac{1}{2} \cdot ab - \frac{1}{2} \cdot cd \right| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |bc - ad|
 \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
 A(\triangle AOB) &= \frac{1}{2} \cdot |bc - ad| = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow |bc - ad| &= 1 \quad (q.e.d)
 \end{aligned}$$

Die Haupteigenschaften der Farey-Folgen sind wichtige Hilfsmittel um die Größe von Brüchen miteinander zu vergleichen ohne sie auszurechnen zu müssen.

Beispiel

Welcher Bruch ist größer:

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} \quad \text{oder} \quad B = \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1} ?$$

3 Lineare diophantische Gleichungen

Eine lineare Gleichung $15x + 17y = 1$ beschreibt eine Gerade in der Euklidischen Ebene. Gibt es Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die auf dieser Geraden liegen? Zur praktischen Berechnung haben wir das Eulersche Reduktionsverfahren eingeführt. Hier stellen wir nur kurz den zahlentheoretischen Haupteigenschaften zusammen.

Satz: Die lineare diophantische Gleichung der Form

$$ax + by = 1 \quad (3)$$

mit $a; b \in \mathbb{N}$ und $ggT(a; b) = 1$ ist immer ganzzahlig lösbar.

Beweis: o.B.d.A. gilt: $0 < a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$ (1)

Aus $ggT(a; b) = 1$ folgt, dass $\frac{a}{b}$ unkürzbar ist. (2)

Aus (1) und (2) schlussfolgern wir, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ in der Farey-Folge der Ordnung b (also \mathfrak{F}_b) liegen muss.

Daraus folgt, dass es einen benachbarten Bruch $\frac{h}{k} \in F_b$ existiert mit: $\frac{h}{k} < \frac{a}{b}$.

Nach der Eigenschaft 1. der Farey Folge gilt also: $ak - bh = 1$

Also bekommen wir folgende Lösungen für (3): $x = k$ und $y = -h$.

Folgerung: Die allgemeine lineare diophantische Gleichung der Form $ax + by = c$ mit $a; b \in \mathbb{N}$ und $ggT(a; b) = 1$ ist ganzzahlig lösbar.

Begründung: Sei $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ die Lösung für die Gleichung (*), also $ax_0 + by_0 = 1$. Dann ist $x = x_0 \cdot c$ und $y = y_0 \cdot c$ eine mögliche Lösung für die Gleichung $ax + by = c$.

Für den folgenden Satz benötigen wir das fundamentale

Lemma von Euklid:

Falls $ggT(a; b) = 1$ und a teilt das Produkt $b \cdot c$, so muss a die Zahl c teilen.

Bezeichnung: x teilt y schreiben wir als $x|y$.

Beweis:

Da $ggT(a; b) = 1$ hat $ax + by = 1$ nach obigem Satz eine ganzzahlige Lösung x, y . Dann gilt $acx + bcy = c$ und da $b \cdot c$ ein Vielfaches von a ist, können wir das Produkt in der Form $b \cdot c = a \cdot d$ schreiben. Ersetzen wir dies in $acx + bcy = c$ so erhalten wir

$acx + ady = c$, woraus ersichtlich ist, dass $a|c$.

Mithilfe dieses Lemmas von Euklid können wir alle Lösungen von $ax + by = 1$ bestimmen:

Satz:

Sei $\text{ggT}(a; b) = 1$, dann haben alle Lösungen der $ax + by = 1$ die Form:

$$x = x_0 - bt$$

und

$$y = y_0 + at,$$

wobei x_0, y_0 eine beliebige Lösung von (3) und $t \in Z$ ist.

Beweis:

Einfaches Einsetzen zeigt, dass $x = x_0 - bt$ und $y = y_0 + at$ Lösungen von $ax + by = 1$ sind. Das auch alle Lösungen diese Form haben zeigt man wie folgt:

sei x, y eine weitere ganzzahlige Lösungen für $ax + by = 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} a \cdot x_0 + b \cdot y_0 &= a \cdot x + b \cdot y = 1 \\ \Rightarrow a \cdot (x - x_0) &= -b(y - y_0) \end{aligned}$$

Aber $\text{ggT}(a, b) = 1$ impliziert nach Euklids Lemma, dass $a|(y - y_0)$, also $a \cdot t = y - y_0$. Damit folgt aber sofort: $-b \cdot t = x - x_0$.

4 Kettenbrüche

Ein großes Problem der Mathematik war lange Zeit die rationale Approximation von irrationalen Zahlen und Brüchen mit großen Nennern. Mit Hilfe von Kettenbrüchen ist dies möglich. Schon im alten Griechenland entdeckte Euklid eine Methode, die Grundlage für die Erstellung der Kettenbrüche ist:

Euklidischer Algorithmus

Berechnung des größten gemeinsamen Teilers der Zahlen $x, y \in N$ mit $y \geq x$:

$$\begin{aligned} y &= a_1 \cdot x + r_1 \\ x &= a_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_3 \cdot r_2 + r_3 \\ &\dots \\ r_{n+1} &= a_n \cdot r_n + 0 \end{aligned}$$

Dann ist der $ggT(x, y) = r_n$. Über diesen Algorithmus kommen wir auch zur Kettenbruchdarstellung:

Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und a_0 der ganzzahlige Anteil von x . Dann ist

$$x = a_0 + r_0, \quad (4)$$

wobei $0 \leq r_0 < 1$ ist. Ist $r_0 \neq 0$ so können wir

$$\frac{1}{r_0} = a_1 + r_1 \quad (5)$$

berechnen, wobei wieder $0 \leq r_1 < 1$ ist und so fort. Wir erhalten durch Zusammensetzung der einzelnen Ausdrücke dann die regelmässige Kettenbruchentwicklung von x :

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (6)$$

Die Glieder a_i heißen die **Teil- oder Partialnenner** der Kettenbruchentwicklung von x . Berechnet man die Kettenbruchentwicklung bis zum i -ten Partialbruch, so heißen die entstehenden gekürzten Brüche P_i/Q_i die **(Haupt-)Konvergenten** von x :

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{a_0}{1}, \\ \frac{P_1}{Q_1} &= a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1], \\ \frac{P_i}{Q_i} &= [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_i]. \end{aligned}$$

Es gilt:

Satz:

1. Für $k \geq 1$ gilt:

$$\begin{cases} P_{k+1} = a_{k+1} \cdot P_k + P_{k-1} \\ Q_{k+1} = a_{k+1} \cdot Q_k + Q_{k-1}. \end{cases}$$

2. (Determinantensatz der Kettenbrüche)

Für $k \geq 0$ gilt:

$$P_k \cdot Q_{k+1} - P_{k+1} \cdot Q_k = (-1)^k.$$

Beweis: siehe Ford [2].

Beispiel:

Der Goldener Schnitt $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ hat die Kettenbruchentwicklung $\tau = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$

$$\tau = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (7)$$

mit den Konvergenten F_{k+1}/F_k , wobei F_k die k -te Fibonacci-Zahl ist.

Mit Hilfe der Kettenbruchdarstellung kann jede reelle Zahl dargestellt und approximiert werden.

Beispiel:

Bei der Erstellung des Kalenders ergibt sich die Frage, wie stark dieser von dem astronomischen Jahr abweicht und wie man die Anzahl der Schalttage berechnet. Pro Jahr ergibt sich eine Abweichung $F = \frac{48443}{200000}$ Tagen. Als Kettenbruch dargestellt ergibt sich:

$$F = [0; 4, 7, 1, 3, \dots]$$

Daraus folgen die Konvergenten:

$$F \approx 0; \frac{1}{4}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \dots$$

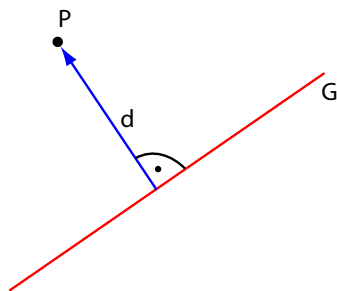
Der Julianische Kalender(46 v.Chr.) führt alle 4 Jahre ein Schaltjahr ein, entsprechend der Approximation $\frac{1}{4}$. Der Persisches Kalender(1079 n.Chr.) arbeitet mit 8 Schalttagen alle 33 Jahre, benutzt also die genauere Approximation $\frac{8}{33}$.

Geometrische Deutung des Kettenbruchalgorithmus (nach Felix Klein, 1907)

Sei G die Ursprungsgerade $y=\alpha \cdot x$. Die Menge der nächsten Punkte von G ist die Menge aller Punkte $(p, q) \in \mathbb{Z}^2, q \geq 1$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 < n \leq q$ gilt:

$$\text{dist}\{(q, p); G\} \leq \text{dist}\{(n, m); G\} ,$$

wobei $\text{dist}\{A;B\}$ den euklidischen Abstand zwischen den Punkten A und B bezeichne.



Satz:

Gegeben sei eine Ursprungsgerade G und zwei Punkte U_1, U_2 auf verschiedenen Seiten von G .

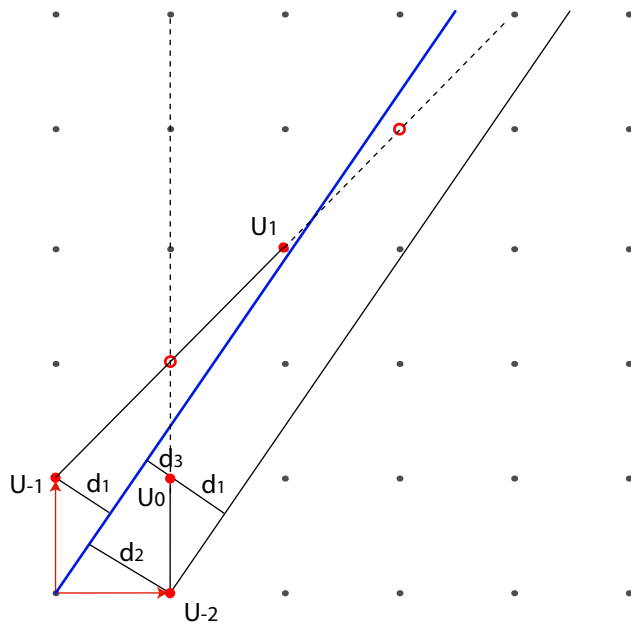
Es gibt dann eine eindeutige ganze Zahl, sodass entweder $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ auf G liegt oder $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ und $\vec{U}_1 + (a + 1)\vec{U}_2$ auf verschiedenen Seiten von G liegen.

Der Punkt $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ ist näher an G als U_1 und falls $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ nicht auf G liegt, so ist $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ auf derselben Seite von G wie U_1 .

Ist \vec{U}_1 näher an G als \vec{U}_2 , dann ist $a = 0$, während für den Fall das \vec{U}_2 näher oder gleich nah an G ist wie \vec{U}_1 gilt $a \leq 1$.

Beweis:

Betrachtet wird die Ursprungsgerade G , die durch das Gitter der beiden erzeugenden Vektoren \vec{U}_1 und \vec{U}_2 verläuft.



Falls $d_1 < d_2$, so liegt $\vec{U}_1 + \vec{U}_2$ auf der U_1 gegenüberliegenden Seite von $G \Rightarrow a = 0$.

Falls $d_1 = d_2$, so liegt $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ auf G.

Falls $d_1 > d_2$, so liegt $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ auf derselben Seite wie U_1 und hat einen Abstand von $d_1 - d_2$ etc. $\vec{U}_1 + a\vec{U}_2$ den Abstand $d_1 - ad_2$.

Allgemein gilt also: $\vec{U}_n = a_n\vec{U}_{n-1} + \vec{U}_{n-2}$ mit $\vec{U}_{-2} = (1,0)$ und $\vec{U}_{-1} = (0,1)$.

5 Ford-Kreise

Die Ford-Kreise können als "Landkarte" der rationalen Zahlen aufgefasst werden. Jedem irreduziblen Bruch p/q wird ein Ford-Kreis K wie folgt zugeordnet.

Definition:

Sei p/q ein irreduzibler Bruch. Der **Ford-Kreis** $K(\frac{p}{q})$ über $\frac{p}{q}$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $M(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ und Radius $r = \frac{1}{2q^2}$.

Satz:

Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{P}{Q}$ zwei verschiedene Brüche, dann berühren sich die zugehörigen Ford-Kreise tangential oder sie sind disjunkt.

Beweis:

Betrachten wir die allgemeine Situation:

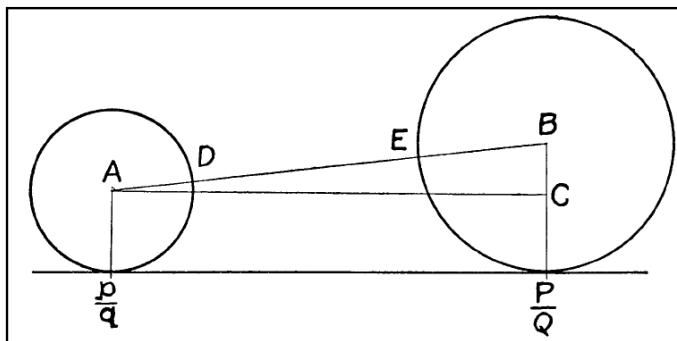


Abbildung 5: Die Abstandsberechnung zwischen zwei Ford-Kreisen (aus [2]).

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}^2| &= |\overline{BC}^2| + |\overline{AC}^2| \\
|\overline{AB}^2| &= \left(\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{2q^2}\right)^2 \\
|\overline{AB}^2| &= \left(\frac{Pq - Qp}{Q^2p^2}\right)^2 + \frac{1}{4Q^4} - \frac{1}{2Q^2q^2} + \frac{1}{4q^4} \\
|\overline{AB}^2| &= \left(\frac{Pq - Qp}{Q^2p^2}\right)^2 + \frac{1}{4Q^4} - \frac{1}{2Q^2q^2} + \frac{1}{4q^4} + \frac{1}{2Q^2q^2} - \frac{1}{2Q^2q^2} \\
|\overline{AB}^2| &= \frac{(pQ - qP)^2 - 1}{Q^2q^2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{2q^2}\right)^2}_{(|\overline{AD}| + |\overline{EB}|)^2}
\end{aligned}$$

I. Fall : $|pQ - qP| = 1 \Rightarrow K\left(\frac{p}{q}\right)$ und $K\left(\frac{P}{Q}\right)$ berühren sich tangential

II. Fall : $|pQ - qP| > 1 \Rightarrow$ Kreise sind disjunkt.

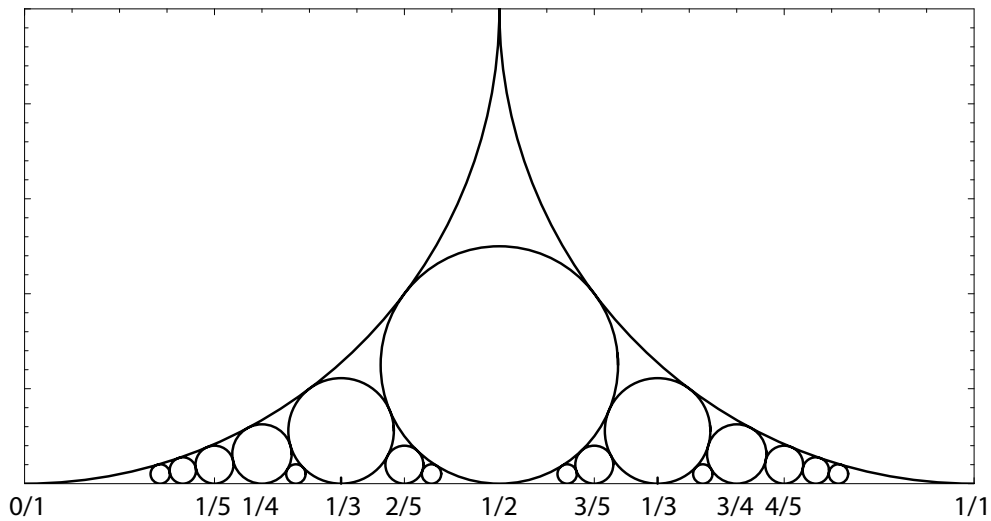


Abbildung 6: Die Ford-Kreise über der Farey-Folge \mathfrak{F}_5 .

Jeder Ford-Kreis wird von unendlich vielen Kreisen tangential berührt. Weiter zeigt sich, dass die erste Haupteigenschaft der Farey-Folge nicht unbedingt nur für aufeinander folgende Brüche gilt.

Am Beispiel

$$\mathfrak{F}_5 = \frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}$$

erkennt man, dass $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ in \mathfrak{F}_5 nicht aufeinander folgen, aber trotzdem gilt

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

Die Bedeutung der Ford-Kreise zeigt sich auch in der hierarchischen Anordnung der Kreise. Angenommen man lässt eine Gerade $y = c$ sich durch stetiges verkleinern von c der x-Achse parallel nähern, so würde diese Gerade die Ford-Kreise über den Brüchen der Farey-Folgen nacheinander in ihrer hierarchischen Reihenfolge $\{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots\}$ schneiden. Weiter lassen sich auch die Lösungen der diophantischen Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = \pm 1; a, b \in \mathbb{Z}$$

mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ mithilfe der Ford-Kreise veranschaulichen. Diese werden durch die den Ford-Kreis $K(a)$ tangential berührenden Ford-Kreise repräsentiert.

Literatur

- [1] Farey, J.: On a curious property of vulgar fractions, Philos. Mag. Journal, London **47**, 385-386, 1816.
- [2] Ford, L.: Fractions. Am. Math. Monthly **45**, 586-601, 1938.
- [3] Rademacher, H.: Lectures on Elementary Number Theory. Blaisdell, New York u.a., 1964.