

Fibonacci-Zahlen

Teilnehmer:

Jiafan He	Andreas-Oberschule, Berlin
Viet Duc Hoang	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Maximilian Kube	Andreas-Oberschule, Berlin
Sarah Lengfeld	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Mona Mattner	Andreas-Oberschule, Berlin
Duc Anh Vu	Herder-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jochen Ziegenbalg	Pädagogische Hochschule Karlsruhe
-------------------	-----------------------------------

Leonardo von Pisa (1170-1250), genannt Fibonacci, einer der größten europäischen Mathematiker des Mittelalters, stellte in seinem berühmten Buch Liber Abaci im Jahre 1202 eine Aufgabe zur Kaninchenvermehrung vor, deren Lösung zu der inzwischen als Fibonacci-Zahlen bezeichneten Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... führte. Die Fibonacci-Zahlen gaben über die Jahrhunderte hinweg Anlass für vielfältige mathematische Untersuchungen. Sie stehen im Zentrum eines engen Beziehungsgeflechts mit anderen mathematischen wie nichtmathematischen Themen (goldener Schnitt, Euklidischer Algorithmus, Kettenbrüche, exponentielles Wachstum, erzeugende Funktionen, Phyllotaxis, ...). Die Fibonacci-Zahlen erfüllen eine Vielzahl von rekursiven und nichtrekursiven Gleichungen, von denen eine zu interessanten optischen Täuschungen führt, sie geben darüber hinaus Anlass zu vielfältigen geometrischen Veranschaulichungen und sie können als ein Ausgangspunkt für die Behandlung linearer Differenzgleichungen angesehen werden.

1 Historischer Kontext

Die „Fibonacci“-Zahlenfolge wurde nach dem italienischen Mathematiker und Rechenmeister Leonardo von Pisa (1170 - 1250) benannt, der auch Fibonacci (kurz für *filius bonacci*) genannt wurde. 1202 veröffentlichte Fibonacci das Buch *Liber Abaci*, in dem er die heute sehr bekannte „Kaninchenaufgabe“ niederschrieb. Diese Aufgabe enthielt (in der westlichen Literatur) zum ersten Mal die Fibonacci-Zahlen, die durch diese Aufgabe berühmt wurden. Weiterhin trug Leonardo von Pisa mit dem Buch *Liber Abaci* zur Verbreitung des *indisch-arabischen Ziffernsystems* bei, das er in seinem Buch beschrieb.



2 Definition

Die Fibonacci-Zahlen bilden eine Zahlenfolge, die sich rekursiv folgendermaßen definiert:

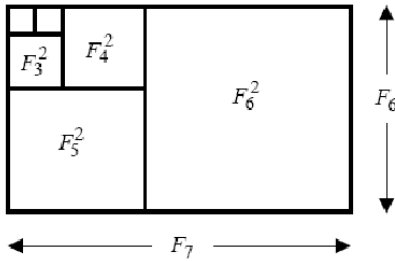
$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Der dritte Teil der Definition besagt, dass sich Fibonacci-Zahlen (ab der dritten) aus der Summe der beiden aufeinander folgenden Vorgänger ergeben.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

3 Eine erste Veranschaulichung

Die Fibonacci-Zahlen lassen sich auch auf folgende Weise darstellen:



Anhand dieser Darstellung lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
 F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 &= F_6 \cdot F_7 \\
 F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 &= F_n \cdot F_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Es gibt verschiedene Verfahren, um diese Formel zu beweisen bzw. zu begründen. Das folgende Verfahren wird gelegentlich auch als „Teleskopverfahren“ bezeichnet. Auf der rechten Seite heben sich, wie durch Unterstreichung angedeutet, alle bis auf einen Summanden gegenseitig auf.

$$\begin{aligned}
 F_1^2 &= \underline{F_1 \cdot F_2} \\
 F_2^2 &= F_2 \cdot (F_3 - F_1) = \underline{F_2 \cdot F_3} - \underline{F_1 \cdot F_2} \\
 F_3^2 &= F_3 \cdot (F_4 - F_2) = \underline{F_3 \cdot F_4} - \underline{F_2 \cdot F_3} \\
 &\dots \\
 F_n^2 &= F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) = \underline{F_n \cdot F_{n+1}} - \underline{F_n \cdot F_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Summierung der linken und der rechten Seiten ergibt

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Ein formaler Beweis, auf den an dieser Stelle verzichtet wird, lässt sich mit vollständiger Induktion durchführen.

4 Berechnungsverfahren

Zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen gibt es die folgenden Möglichkeiten: mit einem rekursiven Verfahren (vgl. 4.1), mit einem iterativen Verfahren (vgl. 4.2) und schließlich mit der Formel von Binet (vgl. 5).

4.1 Rekursives Verfahren

Bei dem rekursiven Verfahren erfolgt die Berechnung der jeweiligen Fibonacci-Zahl strikt im Sinne der Definition; zum Beispiel:

$$\begin{aligned} F_5 &= F_4 + F_3 \\ &= (F_3 + F_2) + (F_2 + F_1) \\ &= ((F_2 + F_1) + (F_1 + F_0)) + ((F_1 + F_0) + F_1) \\ &= (((F_1 + F_0) + F_1) + (F_1 + F_0)) + ((F_1 + F_0) + F_1) \\ &= 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ein rekursiver Algorithmus für die numerische Auswertung sieht strukturell folgendermaßen aus:

```
Fib[n] :=  
  Which[ n = 0, 0,  
        n = 1, 1,  
        n > 1, Fib[n-1]+Fib[n-2] ]
```

4.2 Iteratives Verfahren

Bei dem iterativen Verfahren "hangelt" man sich, wie im folgenden Beispiel, von den Anfangswerten aus hoch:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= F_1 + F_0 = 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 5. \end{aligned}$$

Ein iterativer Algorithmus für die numerische Auswertung:

```
FibIterativ[n] :=  
  Module[{F0=0, F1=1, F2=1, i=0},  
    While[i < n, (i=i+1; F0=F1; F1=F2; F2=F1+F0)];  
    Return[F0] ]
```

Wenn man das Laufzeitverhalten dieser beiden Verfahren vergleicht, dann kann man feststellen, dass das rekursive Verfahren im Gegensatz zu dem iterativen Verfahren einen enorm hohen („exponentiellen“) Zeitbedarf hat.

5 Die Formel von Binet

Im Folgenden wird die Formel von Binet hergeleitet, mit deren Hilfe sich die Fibonacci-Zahlen schließlich auch noch berechnen lassen.

Die rekursive Darstellung der Fibonacci-Zahlen

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (5.1)$$

lässt sich als Spezialfall der folgenden homogenen linearen Differenzgleichung zweiter Ordnung deuten:

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2} = 0 \quad (5.2)$$

5.1 Lineare Differenzgleichung erster Ordnung

Um die Differenzgleichung zweiter Ordnung (5.2) zu lösen, setzt man sich zunächst mit der Lösung von Differenzgleichungen erster Ordnung auseinander. Die lineare Differenzgleichung erster Ordnung

$$y_k + a \cdot y_{k-1} = 0$$

stellt eine geometrische Folge dar. Mit $-a = A$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cdot y_0, \\ y_2 &= A \cdot y_1 = A^2 \cdot y_0, \\ &\dots \\ y_k &= A \cdot y_{k-1} = A \cdot A^{k-1} \cdot y_0 \\ \text{d.h. } y_k &= A^k \cdot y_0 \quad (y_0 : \text{Anfangswert}) \\ \text{bzw. } y_k &= A^k \cdot c \quad (c : \text{Konstante}) \end{aligned}$$

5.2 Lineare Differenzgleichungen zweiter Ordnung

Im Folgenden wird versucht, die Lösungen von linearen Differenzgleichungen zweiter Ordnung auf die Lösungen von linearen Differenzgleichungen erster Ordnung zurückzuführen. Zu diesem Zweck führen wir in die Gleichung (5.2) in der folgenden Weise zwei sich gegenseitig aufhebende Terme ein:

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + m \cdot y_{k-1} - m \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2} = 0 \quad (5.3)$$

Diese Gleichung wird zunächst in die folgenden zwei linearen Differenzgleichungen erster Ordnung (I) und (II) zerlegt.

$$\underbrace{y_k + (a_1 + m) \cdot y_{k-1}}_{I=0} + \underbrace{(-m \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2})}_{II=0} = 0$$

Wenn es gelingt, eine gemeinsame Lösung für die Gleichungen (I) und (II) zu finden, dann ist dies auch eine Lösung für die Gleichung (5.3) und damit auch für die Gleichung (5.2). Die Gleichungen (I) und (II) haben dann gemeinsame Lösungen, wenn die Gleichungen selbst gleich sind. Dies kann durch eine geeignete Wahl des Parameters m erreicht werden. Schreibt man nämlich die Gleichungen (I) und (II) in der Form

$$(I) \quad y_k = -(a_1 + m) \cdot y_{k-1} \qquad (II) \quad y_k = \frac{a_2}{m} \cdot y_{k-1},$$

so stellen sie die selbe Gleichung dar, wenn die Koeffizienten $-(a_1 + m)$ und $\frac{a_2}{m}$ gleich sind. Die Bedingung

$$-(a_1 + m) = \frac{a_2}{m}$$

führt zur folgenden „charakteristischen“ Gleichung:

$$m^2 + a_1 \cdot m + a_2 = 0. \quad (5.4)$$

Sind m_1 und m_2 die Lösungen der charakteristischen Gleichung, so lauten die Lösungen der Differenzgleichungen (I) und (II):

$$y_k = (-(a_1 + m_1))^k \cdot c_1 \qquad y_k = \left(\frac{a_2}{m_1}\right)^k \cdot c_2$$

$$y_k = (-(a_1 + m_2))^k \cdot c'_1 \quad y_k = \left(\frac{a_2}{m_2}\right)^k \cdot c'_2.$$

Mithilfe der Wurzelsätze von Vieta erhält man daraus die Lösungsfolgen

$$y_k = m_2^k \cdot c_1 \quad \text{und} \quad y_k = m_1^k \cdot c'_1. \quad (5.5)$$

Durch direktes Einsetzen lässt sich zeigen, dass die Summe zweier Lösungsfolgen einer linearen homogenen Differenzgleichung wieder eine Lösungsfolge dieser Differenzgleichung ist. Mit (5.5) ist demnach

$$y_k = m_2^k \cdot c_1 + m_1^k \cdot c'_1$$

ebenfalls eine Lösung der Gleichung (5.2). Im Falle der Fibonacci-Gleichung gilt für die Koeffizienten: $a_1 = -1$ und $a_2 = -1$.

Im Zusammenhang mit der charakteristischen Gleichung (5.4) führt dies zu den folgenden Werten für m_1 und m_2 :

$$m_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Die allgemeine Lösung für die Fibonacci-Gleichung (1) lautet dann

$$F_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot c_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot c'_1.$$

Die Koeffizienten c_1 und c'_1 sind nun so anzupassen, dass die Anfangswerte „stimmen“. Dies führt zu den folgenden beiden linearen Gleichungen für c_1 und c'_1 :

$$y_0 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot c_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot c'_1 = 0$$

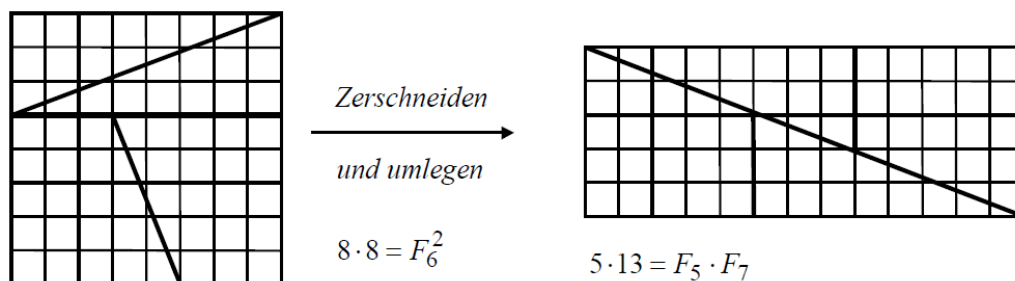
$$y_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot c_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot c'_1 = 1.$$

Hieraus folgt $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c'_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ und schließlich

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k \right).$$

6 Optische Täuschungen

Zu den Fibonacci-Zahlen gibt es viele interessante Veranschaulichungen. So beruht beispielsweise das folgende „Flächenzerlegungs-Paradoxon“ auf einer Eigenschaft der Fibonacci-Zahlen:



Auf dem ersten Blick scheint es so, als sei durch das Zerschneiden und Umlegen aus dem Quadrat mit der Fläche $A = 8 \cdot 8 = 64$ ein Rechteck der Fläche $A = 5 \cdot 13 = 65$ entstanden – ein Ergebnis, das durch das Zerschneiden und Umlegen der einzelnen Flächen nicht möglich ist.

Der Trick hinter dieser optischen Täuschung besteht darin, dass sich im Rechteck hinter der scheinbar diagonalen Gerade ein sehr flaches Parallelogramm vom Flächeninhalt 1 verbirgt. Durch die dick gedruckte Diagonale wird das Parallelogramm jedoch verdeckt.

Aus der Zeichnung lässt sich Folgendes erkennen: $F_6^2 = F_5 \cdot F_7 - 1$.

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der folgenden (durch vollständige Induktion zu beweisenden) Formel:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Der „absolute Fehler“ ist also immer gleich 1, wohingegen der „relative Fehler“ immer kleiner wird, je größer die jeweiligen Fibonacci-Zahlen werden. Das „Täuschungspotential“ der optischen Täuschung lässt sich also beliebig erhöhen.

7 Der Goldene Schnitt

Im folgenden betrachten wir die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen:

$$f_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}. \quad (7.1)$$

Die Betrachtung konkreter Werte gibt Anlass zu einer Reihe von Vermutungen:

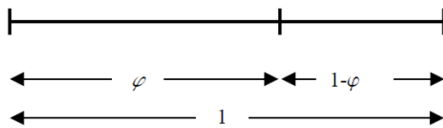
1. Die Quotienten nehmen abwechselnd ab und zu.
2. Die aus den ungeraden Werten bestehende Teilfolge ist monoton fallend.
3. Die aus den geraden Werten bestehende Teilfolge ist monoton steigend.
4. Die Differenzen aufeinanderfolgender Quotienten streben gegen Null.

Man kann (mit vollständiger Induktion) zeigen, dass die Intervalle (f_2, f_1) , (f_4, f_3) , (f_6, f_5) , \dots , (f_{n+2}, f_{n+1}) , \dots , eine Intervallschachtelung bilden. Ihr Grenzwert wird zu Ehren des griechischen Bildhauers Phidias (um ca. 500 v.Chr.) mit φ bezeichnet: $\varphi = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n$.

Für f_{n+1} gilt $\frac{1}{f_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_n + F_{n+1}}{F_{n+1}} = 1 + f_n$ und daraus folgt $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi$ bzw. $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$.

Von den beiden Wurzeln $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ dieser quadratischen Gleichung kommt nur die positive als Grenzwert der Folge (7.1) in Frage. Wir erhalten insgesamt das Ergebnis: Die Folge der Quotienten aus aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen strebt gegen den Grenzwert $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Der numerische Wert dieses Ausdrucks ist näherungsweise gleich 0.618.

Aus $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$ folgt $1 : \varphi = \varphi : (1 - \varphi)$; d.h., φ erfüllt die definierende Bedingung des goldenen Schnitts:



$$1 : \varphi = \varphi : (1 - \varphi).$$

Wir fassen die obigen Ergebnisse zusammen:

Satz: Die Quotienten $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen streben gegen den Grenzwert $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und liegen abwechselnd über und unter diesem Grenzwert. Der Grenzwert φ teilt die Einheitsstrecke im Verhältnis des goldenen Schnitts.

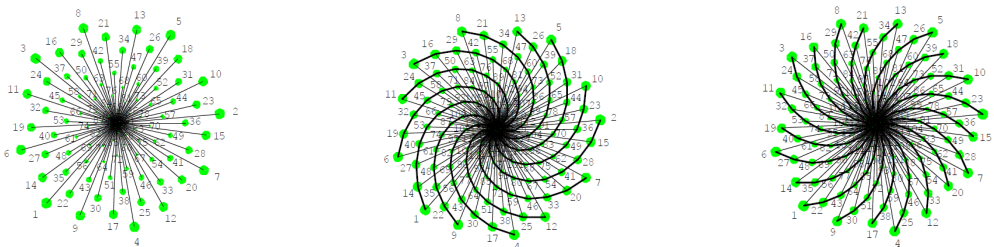
8 Phyllotaxis

Mit dem Begriff *Phyllotaxis* bezeichnet man in der Biologie die Lehre von den Blattstellungen. Wenn man eine Sonnenblume, einen Kiefern- oder Tannenzapfen, eine Ananas, eine Margerite, eine Dahlie und viele weitere Pflanzen aufmerksam betrachtet, kann man dabei überraschende Entdeckungen machen. Ein Beispiel:

Auf dem nebenstehenden Bild der Sonnenblume erkennt man deutlich, dass die Kerne spiralförmige Muster bilden. Bei der Sonnenblume entdeckt man rechtsdrehende und linksdrehende Spiralen. Beim sorgfältigen Zählen kann man 55 rechtsdrehende und 34 linksdrehende Spiralen erkennen.



Auch bei anderen Pflanzen treten derartige spiralförmige Muster auf. Bei der Ananas erkennt man 5 flach und 8 steil verlaufende Spiralen. Bei Kiefernzapfen sind es 8 und 13, bei manchen Dahlien sind es 13 und 21, bei der Margerite 21 und 34. All dies sind Fibonacci-Zahlen! Es stellt sich die Frage: Warum scheint die Anzahl dieser „Phyllotaxis-Spiralen“ immer eine Fibonacci-Zahl zu sein? Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass sich die Blätter bei ihrer Entstehung um den Stängel spiralförmig zu drehen scheinen. Der dabei gemessene Drehwinkel („Blattfolgewinkel“) ist konstant und beträgt bei vielen Pflanzen recht genau 222,5 Grad (bzw. 137,5 Grad) in der Gegenrichtung. Dies entspricht ziemlich genau der Teilung des Vollwinkels nach dem goldenen Schnitt (also dem „goldenen Winkel“): $\varphi \cdot 360 \text{ Grad} \approx 0,618 \cdot 360 \text{ Grad} = 222,48 \text{ Grad}$. Eine (Computer-) Simulation liefert interessante Erkenntnisse: Ausgehend von der Startrichtung „Norden“ wurden die Blätter mit dem goldenen Winkel als Blattfolgewinkel gezeichnet. Man erhält einen deutlichen Eindruck von der Verteilung der Blätter.



Der Eindruck einer Blume oder Pflanze drängt sich auf. Ausgehend vom ersten Blatt sind alle Blätter im goldenen Winkel zum Vorgängerblatt angeord-

net. Die zugehörigen Stängel wurden nach dem Prinzip gezeichnet: je älter desto länger.

Diese Abbildung enthält viele Spiralen: Zum Beispiel liegt die Gesamtheit aller Blätter (oder aller 2-ten, 3-ten, ..., k-ten Blätter) in ihrer zeitlichen Abfolge auf einer Spirale. Diese Spiralen sind aber u.U. schwer sichtbar. Wo wir Spiralen sehen und wo nicht, hängt sehr stark von unserer persönlichen Wahrnehmung ab; diese ist aber nicht vollkommen willkürlich. Die Sichtbarkeit der Spiralen hängt von verschiedenen Faktoren ab. Visuell gut erkennbare Spiralen müssen folgende Bedingungen erfüllen: Auf der Spirale müssen hinreichend viele Blätter liegen; die Blätter sollten nahe beieinander liegen und es sollten sich möglichst keine fremden Blätter zwischen die Spiralblätter drängen. Dies setzt insbesondere voraus, dass die Stängel benachbarter Blätter auf einer Spirale einen möglichst kleinen Winkel miteinander bilden. In der mittleren Abbildung kann man unter anderem die Spirale erkennen, auf der Blatt 1 liegt. Sie ist gut erkennbar, da sie die vorab genannten Bedingungen erfüllt. Nach der Entstehung von Blatt 1 dreht sich der „Blattstandszeiger“ 13-mal um den goldenen Winkel im Uhrzeigersinn und landet auf Position 14. Dabei überstreicht er einen Gesamtwinkel von 2892,24 Grad; d.h. er dreht sich 8-mal um 360 Grad und bleibt dann mit einem kleinen Überschuss von 12,24 Grad hinter dem ersten Blatt stehen. Entsprechendes gilt für die weiteren Blätter auf der Spirale. Wir halten fest:

$$13 \cdot \varphi \cdot 360 \text{ Grad} \approx 2892,24 \text{ Grad} = (8 \cdot 360 + 12,24) \text{ Grad}$$

Aus den oben beschriebenen Berechnungen leiten wir folgenden Zusammenhang ab: $\varphi \approx \frac{k}{n}$. Die n Drehungen des Blattstandzeigers jeweils um den goldenen Winkel von $\varphi \cdot 360$ Grad entsprechen also näherungsweise k Volldrehungen um 360 Grad. Dies ist genau die Voraussetzung dafür, dass das Blatt $n + 1$ nach k Volldrehungen des Blattstandzeigers nahezu in der Richtung von Blatt 1 zu liegen kommt; und dies ist wiederum die Voraussetzung dafür, dass wir die Lage dieser Blätter als Spirale ansehen. Günstige Bedingung für eine Spirale ist also der Umstand, dass die auf der Spirale liegenden Blattzahlen als Abstand eine Fibonacci-Zahl haben. Dies wiederum hat nun aber zur Folge, dass es ebenso viele Spiralen gibt. Ähnlich verhält es sich bei den Spiralen in der rechten Abbildung, nur dass das 22. Blatt, welches mit dem ersten Blatt auf einer Spirale liegt, nach seinen 21 Drehungen um den goldenen Winkel nicht ganz die Position des Vorgängerblattes erreicht, wodurch der optische Eindruck entsteht, die Spirale drehe sich in die entgegengesetzte Richtung.

