Reguläre Polyeder und ihre Symmetriegruppen

Teilnehmer:

Anna Bobenko	Herder-Oberschule
Aymara Fehéri	Heinrich-Hertz-Oberschule
Mehdi Hassan Hamzé	Herder-Oberschule
Pascal Gussmann	Heinrich-Hertz-Oberschule
Tuyen Vu Xuan	Georg-Forster-Oberschule

Gruppenleiter:

Herbert Kurke	Humboldt-Universität zu Berlin

Allgemein war die Erwartung an dieses Thema und diese Gruppe, sich mit regulären Polyedern und ihren Symmetriegruppen zu beschäftigen. Dabei sollte gezeigt werden, dass die fünf „platonischen Körper“ die einzigen regulären Polyeder sind. Außerdem waren die dazu nötigen Begriffe zu klären und die konstruktive Beschreibung dieser platonischen Körper zu besprechen. Abschließend sollten die Symmetriegruppen dieser Körper und endliche Untergruppen der Gruppe aller Kongruenztransformationen besprochen werden.

1 Grundlagen

Definition: K sei eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^n$. K heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten P, $Q \in K$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ in K enthalten ist.

Dies bedeutet anschaulich, dass die Menge weder „Dellen“ noch „Löcher“ haben darf.

Satz: K_1, K_2 konvex $\Rightarrow K_1 \cap K_2$ konvex. (Auch die leere Menge ist konvex.)
Beweis: $P, Q \in K_1 \cap K_2$ seien beliebig gewählt.

$$\begin{array}{ll} & P \in K_1 \cap K_2 \quad \wedge \quad Q \in K_1 \cap K_2 \\ \Rightarrow & P \in K_1 \quad \wedge \quad Q \in K_1 \quad \wedge \quad P \in K_2 \quad \wedge \quad Q \in K_2 \\ \Rightarrow & \overline{PQ} \subseteq K_1 \quad \wedge \quad \overline{PQ} \subseteq K_2 \\ \Rightarrow & \overline{PQ} \subseteq K_1 \cap K_2 \qquad\qquad q.e.d. \end{array}$$

Verallgemeinerung: Ist K_α eine Familie von konvexen Mengen, so ist die Schnittmenge dieser konvexen Mengen $\bigcap_\alpha K_\alpha$ ebenfalls konvex.

Satz: Zu jeder Menge $M \subseteq E$ existiert genau eine kleinste konvexe Menge $K(M)$, die M enthält:

$$K(M) = \bigcap_{M \subseteq K} K \qquad , K \text{ konvex.}$$

Definition: Diese Menge heiße konvexe Hülle von M.

Satz (Beschreibung der konvexen Hülle): $K(M)$ besteht aus allen Punkten P, für die gilt:

$$\exists P_0, ..., P_N \in M \ \exists \lambda_0, ..., \lambda_N \geq 0 : \ \sum_{i=0}^{N} \lambda_i = 1 \ \wedge \ P = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i P_i.$$

Benutz: Der Beweis benutzt den baryzentrischen Kalkül. Dazu wird ein Punkt O gewählt, sodass sich ergibt:

$$\lambda_0 P_0 + ... + \lambda_N P_N = O + \lambda_0 \overrightarrow{OP_0} + ... + \lambda_N \overrightarrow{OP_N}$$

Man kann leicht zeigen, dass dieser so definierte Punkt P nicht von der Wahl des Punktes O abhängt. Man kann ebenfalls eine physikalische Interpretation wagen: Sind in den Punkten P_j die Massen m_j konzentriert und ist

$$m = m_0 + ... + m_N, \lambda_j = \frac{m_j}{m},$$

so ist $\lambda_0 P_0 + ... + \lambda_N P_N$ Schwerpunkt des Systems und wird auch als Baryzentrum bezeichnet.

Definition: Ein konvexes Polyeder in E ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten $\{P_0; ...; P_N\}$, die den Raum $E = \mathbb{R}^n$ erzeugt.

2 Ecken

Im Folgenden sei K stets eine konvexe Menge.

Randpunkte und innere Punkte einer Menge

Definition: Ein Punkt P heißt innerer Punkt von K, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(P) \subset K \quad \text{mit } B_\varepsilon(P) = \{R|\ d(P,R) < \varepsilon\}.$$

Definition: Ein Punkt P heißt Randpunkt von K, wenn P weder innerer Punkt von K, noch von $E \setminus K$ ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(P)$ einen Punkt aus K und aus $E \setminus K$ enthält.

Definition: Eine Menge K heißt abgeschlossen, wenn alle Randpunkte von K in K enthalten sind.
Es können auch alle Punkte einer Menge K Randpunkte von K sein.

Beispiel: K sei eine x-y-Ebene in $\mathbb{R}^3$. Dann gilt für jedes $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists Q \in \mathbb{R}^3 \setminus K :\ Q \in B_\varepsilon(P).$$

Also ist jeder Punkt von K Randpunkt.

Definition: Extremale Punkte einer konvexen Menge sind Randpunkte P von K mit der Eigenschaft: P gehört keiner in K enthaltenen Strecke als innerer Punkt an.

Definition: Die extremalen Punkte eines Polyeders heißen Ecken.

3 Kanten, Seiten

Definition: Eine Stützmannigfaltigkeit der Dimension k an eine konvexe Menge K ist ein k-dimensionaler affiner Unterraum L mit

- L enthält mindestens einen Randpunkt von K.
- Wenn $\overline{AB}$ eine Strecke ist, die in K enthalten ist und von L in einem inneren Punkt (der Strecke $\overline{AB}$) geschnitten wird, dann soll die gesamte Strecke $\overline{AB}$ zu L gehören.

Satz: Wenn K abgeschlossen ist, d.h. alle Randpunkte gehören zu K, so gibt es durch jeden Randpunkt eine Stützhyperebene.

Benutz: B ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$. Nach einem Satz von Weierstraß gilt: Wenn $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann besitzt sie ein Minimum, d.h. $\exists P_0 \in B$, $\forall P \in B$: $f(P_0) \leq f(P)$.

Folgerung 1: Durch jeden Randpunkt von K gibt es eine minimale Stützmannigfaltigkeit L, $K \cap L$ enthält P als inneren Punkt des Unterraumes L.

Folgerung 2: Wenn K eine abgeschlossene und beschränkte, konvexe Menge ist, die nur endlich viele extremale Punkte $\{P_0, ..., P_N\}$ hat, dann ist $K = K(\{P_0, ..., P_N\})$ die konvexe Hülle dieser $N + 1$ Punkte.

Definition: Unter einer k-dimensionalen Seite eines Polyeders versteht man eine Teilmenge $L \cap K$, sodass der affine Unterraum L eine k-dimensionale Stützmannigfaltigkeit und $S = L \cap K$ bezüglich L innere Punkte enthält.

Dabei ist S ein konvexes Polyeder in L und die Menge der Ecken von S ist Teilmenge der Menge der Ecken von K.

Wir legen folgende Bezeichnungen fest:
K sei ein Polyeder.
K_0 sei die Menge der Ecken (0-dimensionale Seiten bzw. extremale Punkte).
K_1 sei die Menge der Kanten (1-dimensionale Seiten).
K_2 sei die Menge der Seiten (2-dimensionale Seiten).

All diese Mengen sind endliche Mengen. $|K_0|$ stellt die Anzahl der Ecken, $|K_1|$ die der Kanten und $|K_2|$ die der Seiten dar.

4 Eulerscher Polyedersatz

Eulerscher Polyedersatz: Ist ein dreidimensionales Polyeder K konvex, so gilt:

$$|K_0| - |K_1| + |K_2| = 2.$$

Beweis:

K sei ein konvexes dreidimensionales Polyeder, z.B. ein Oktaeder. Man wähle nun eine Seite S_0. Auf deren Schwerpunkt B_0 errichte man die Senkrechte L und wähle darauf auf der zu K entgegengesetzten Seite einen Punkt $Z \in L$ nahe bei B_0.

Nun wähle man eine zu L orthogonale Ebene H, sodass K und Z auf einer Seite von H liegen. Sei π die Zentralprojektion auf H mit Z als Zentrum (π ist nur auf $E \setminus H_0$ definiert, wobei H_0 die zu H parallele Ebene durch Z ist).

Die Bilder der Kanten werden auf die Seiten eines Graphen projeziert, dessen Ecken denen des Polyeders K entsprechen. Als Bild erhält man einen Graphen Γ, bei dem jeder einzelne Zyklus gerade den Seitenflächens des ursprünglichen Polyeders entspricht. Die einzige Ausnahme bildet die Seite S_0 des Polyeders.

Also liefert π eine bijektive Korrespondenz von $K_0, K_1, K_2 \setminus S_0$ mit den Mengen der Ecken, Kanten bzw. einfachen Zyklen des Graphen.

Abbildung 1: Zentralprojektion am Beispiel des Oktaeders

Zu zeigen ist: $|K_0| - |K_1| + |K_2| = 2$. Da $|K_0| = k_0(\Gamma)$, $|K_1| = k_1(\Gamma)$ und $|K_2| - 1 = Z(\Gamma)$, ist zu zeigen:

$k_0(\Gamma) - k_1(\Gamma) + Z(\Gamma) = 1$.

Somit hat der Graph k_0 Ecken, k_1 Kanten und $k_2 - 1$ einfache Zyklen.

Dabei gehört eine Kante des Graphen zu genau zwei Zyklen oder ist eine Kante von S_0 und gehört dann zu genau einem Zyklus. Wir nennen die Zahl $k_0(\Gamma) - k_1(\Gamma) + Z(\Gamma) =: a(\Gamma)$.

Nun werden folgende Operationen mit dem Graphen durchgeführt, bei denen sich die Zahl $a(\Gamma)$ nicht ändert:

1. Eine äußere Kante, die nur einem Zyklus angehört, wird entfernt. Dabei fällt auch ein Zyklus weg und die anderen Seiten dieses Zyklus gehören nur noch einem Zyklus an oder bildet ein freies Ende. Also gilt für den neuen Graphen Γ: $a(\Gamma') = a(\Gamma)$

2. Ein Ende, d.h. eine Ecke, die nur zu einer Kante gehört, plus diese Kante wird entfernt, wobei sich dabei k_0 und k_1 um 1 ändern. Es gilt dabei: $a(\Gamma) = a(\Gamma'')$

Es ist festzustellen, dass nach und nach Kante um Kante und Ende um Ende entfernt wird, d.h. pro Aktionsschritt wird. Der Sachverhalt
$a = k_0 - k_1 + (k_2 - 1)$ bleibt erhalten. Nach endlich vielen Operationen ($k_1(\Gamma)$ viele) muss dieses Verfahren (des Entfernens der Kanten oder Enden) mit einem Punkt enden: $a(\Gamma) = a(\text{Punkt}) = 1$

5 Platonische Körper

Definition: Reguläre dreidimensionale Polyeder sind konvexe Polyeder mit folgenden Eigenschaften:

1. Alle Seiten sind zu einander kongruente n-Ecke.
2. Die Anzahl der Kanten, die in einer Ecke zusammentreffen, ist für jede Ecke dieselbe Zahl m.

Es gibt höchstens fünf reguläre Polyeder. Genauer: Es gibt höchstens fünf Tupel (n, m, k_0, k_1, k_2), sodass es ein konvexes Polyeder gibt und
$|K_0| = k_0; |K_1| = k_1; |K_2| = k_2$. Dies bedeutet, dass alle Seiten n-Ecke sind und in jeder Ecke genau m Kanten zusammentreffen. Wir vesuchen diesen Satz zu beweisen:

1. Zunächst ist durch den Eulerschen Polyedersatz bekannt:
$$k_0 - k_1 + k_2 = 2.$$
2. Dann bilden wir die Menge der „Fahnen“ mit $F \subset K_0 \times K_1 \times K_2$.
$F := \{(P, k, S) | p \in k \subset S\}$. Durch die Abbildungen p_0, p_1, p_2 lassen sich dann die Punkte P, die Kanten k und die Seitenflächen S erzeugen.
3. Nun wird die Ordnung von $|F|$ auf drei verschiedene Weisen berechnet: Zunächst wird $|F|$ mittels der Punkte dargestellt. Hierbei gibt es genau m Kanten, die in einem Punkt P zu einer Ecke zusammenlaufen. Zu jeder dieser Kanten gehören jeweils zwei Seiten, also gilt:
$|p_0^{-1}(P)| = 2m$. Demnach ergibt sich für $|F|$:
$$|F| = 2mk_0$$

4. Als zweites wird $|F|$ mittels der Kanten dargestellt. Da es pro Kante zwei ecken gibt und zu jeder Ecke noch zwei Seiten gehören, gilt: $|p_1^{-1}(k)| = 2 \times 2$ Also folgt daraus für $|F|$:
$$|F| = 4k_1$$

5. Als letztes wird $|F|$ mittels der Seitenflächen dargestellt. Da sich an jeder Seite n Ecken befinden und diese mit je zwei Kanten verbunden sind, gilt: $|p_2^{-1}(S)| = 2n$ Daraus ergibt sich für $|F|$:
$$|F| = 2nk_2$$

Nun führen wir einige mathematische Umformungen aus. Zunächst eliminieren wir k_1 und $|F|$. Aus dem Eulerschen Polyedersatz ist zu entnehmen:

$$k_0 - k_1 + k_2 = 2 \Leftrightarrow k_1 = k_0 + k_2 - 2.$$

Anschließend werden die Gleichungen $|F| = 2mk_0$ und $|F| = 4k_1$ gleichgesetzt, sodass das $|F|$ eliminiert wird. Es gilt also:

$$2mk_0 = 4k_1$$

In dieser Gleichung wird jetzt das k_1 durch den Term $k_1 = k_0 + k_2 - 2$ ersetzt, woraus folgt:
$$2mk_0 = 4(k_0 + k_2 - 2)$$
Gleichzeitig werden die Gleichungen $|F| = 2nk_2$ und $|F| = 4k_1$ gleichgesetzt, sodass das $|F|$ eliminiert wird. Es gilt also:

$$2nk_2 = 4k_1$$

In dieser Gleichung wird jetzt das k_1 durch den Term $k_1 = k_0 + k_2 - 2$ ersetzt, woraus folgt:
$$2nk_2 = 4(k_0 + k_2 - 2)$$
Demnach erhält man Gleichungssysteme für k_0 und k_2. Für diese Gleichungen sind nun m und n mit k_0 und k_2 zu ermitteln. Nach der Division durch 2 gilt:

$$\begin{Bmatrix} mk_0 = 2(k_0 + k_2 - 2) \\ nk_2 = 2(k_0 + k_2 - 2) \end{Bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} (m-2)k_0 - 2k_2 = -4 \\ 2k_0 - (n-2)k_2 = 4 \end{Bmatrix}$$

Wobei die Lösungen positiv und ganzzahlig sein müssen und $m \geq 3$; $n \geq 3$; $k_0, k_2 > 0$, wie es sich aus der geometrischen Situation ergibt.

Nun eliminieren wir das k_2 $(I \cdot (n-2) - II \cdot 2)$:

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} (n-2)(m-2)k_0 - 2(n-2)k_2 = -4(n-2) \\ (n-2)(m-2)k_0 - 2(n-2)k_2 = -4(n-2) \end{Bmatrix}$$

$$\underset{I-II}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} [(n-2)(m-2)-4]k_0 = -4(n-2) - 8 = -4n \\ [(n-2)(m-2)-4]k_2 = -4(m-2) - 8 = -4m \end{Bmatrix}$$

Demnach muss gelten: $\underbrace{4-(n-2)(m-2)}_{\Delta} > 0$

Da m die Anzahl der in einem Punkt zusammentreffenden Seiten und n die Anzahl der zu einer Seite zugehörigen Ecken ist, gilt $m \geq 3$ und $n \geq 3$. Es ergeben sich fünf Möglichkeiten für deren Kombination als Tupel

$$(n;m) = \underbrace{(3;3)}_{\Delta=3} \underbrace{(3;4)}_{\Delta=2} \underbrace{(3;5)}_{\Delta=1} \underbrace{(4;3)}_{\Delta=2} \underbrace{(5;3)}_{\Delta=1}.$$

Somit kommen als Lösungen für die regulären Polyeder folgende in Frage:

n	m	k_0	k_1	k_2	
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	6	12	8	Oktaeder
3	5	12	30	20	Ikosaeder
4	3	8	12	6	Hexaeder
5	3	20	30	12	Dodekaeder

6 Symmetriegruppen von Polyedern

Definition: Unter einer Kongruenztransformation verstehen wir eine Abbildung von E nach E, die den Anstand zwischen je 2 Punkten erhält.
Dazu gehören Parallelverschiebungen, deshalb induziert eine solche Abbildung auch eine Abbildung zwischen Vektoren $\vec{v} \mapsto \vec{v}\,'$, wenn $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, so $\vec{v}\,' = \overrightarrow{P'Q'}$ $(P', Q'$ die Bilder von $P, Q)$ (unabhängig von der Wahl von P) mit $(\vec{v} \pm \vec{w})' =$

$\vec{v}\,' \pm \vec{w}\,'$. Diese ist längentreu, und da das Slalarprodukt sich durch die Länge ausdrücken lässt (z.B. $2 < \vec{v}, \vec{w} >= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$), bleibt das Skalarprodukt und damit auch die Winkel erhalten.

Definition: Ein Drei-Bein ist ein 4-Tupel $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, wobei 0 ein Punkt und $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ eine orthonormierte Vektormenge ist.
Eine Kongruenztransformation σ lässt sich mittels eines 3-Beines (dem neuen Koordinatensystem) darstellen.

Satz: Das Hintereinanderausführen mehrerer Kongruenztransformationen ergibt eine weitere Kongruenztransformation.

Eine Unterscheidung in direkte (oder eigentliche) und indirekte (oder uneigentliche) Kongruenztransformationen (Bewegungen) ist vorzunehmen:

1. Bei den eigentlichen Kongruenztransformationen sind die Orientierung des Drei-Beines und seines Bildes gleich. Es gibt folgende Typen:
   - Drehung um eine Achse L (die Menge der Fixpunkte ist L)
   - Parallelverschiebung (die Menge der Fixpunkte ist leer)
   - Schraubung (Drehung um eine Achse L und Parallelverschiebung in Richtung L) (die Menge der Fixpunkte ist leer)
2. Bei den uneigentlichen Kongruenztransformationen ist die Orientierung des Drei-Beines entgegengesetzt der seines Bildes. Man stellt fest, dass es nur folgende Typen gibt:
   - Spiegelung an einer Ebene H (die Menge der Fixpunkte ist H)
   - Gleitspiegelung (Spiegelung an einer Ebene H und Parallelverschiebung in Richtung H) (die Menge der Fixpunkte ist leer)
   - Drehspiegelung (Spiegelung an einer Ebene H und Drehung um eine senkrecht zu H verlaufende Achse L) (die Menge der Fixpunkte ist ein Punkt)

Satz: Die Menge G_K sei die Menge der Kongruenztransformationen des Raumes, die das Polyeder K in sich selbst überführen. Diese Menge G_K bildet eine Gruppe.

Satz: Die Symmetriegruppe G_K eines konvexen Polyeders K ist endlich und es gibt einen Fixpunkt aller Kongruenztransformationen aus G_K.
Beweis: Insgesamt müssen die k_0 Ecken aus sich selber abgebildet werden. Dies entspricht einer Permutation der Ecken und somit kann es höchstens $k_0!$ Kongruenztransformationen geben, die K auf K abbilden. Da die Ecken auf sich selber abgebildet werden bleibt deren Schwerpunkt erhalten. Er muss also für

alle Transformationen Fixpunkt sein.

Satz: G sei eine Gruppe. Wenn H Untergruppe von G dann gilt:

$$|H| \mid |G|.$$

Definition: $SO(3)$ sei die Gruppe der Kongruenztransformationen $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die 0 als Fixpunkt haben.

Definition: S^2 sei die Einheitssphäre:

$$S^2 = \{Q| \; d(Q,O) = 1\}.$$

$G \subset SO(3)$ sei endliche Gruppe der Ordnung n und für einen Punkt $P \in S^2$ heiße $G_P = \{g \in G | g(P) = P\}$ Isotropiegruppe von P. $\mathcal{P} \subseteq S^2$ sei die Menge aller Punkte P mit $G_P \neq \{\mathrm{id}\}$, sei $G^* = G \setminus \{\mathrm{id}\}$ und $\mathrm{I} = \{(P,g) \in \mathcal{P} \times G^* | g(P) = P\}$, wobei $\mathrm{I} \xrightarrow{p_2} G^*$. *Satz:* Jedes eigentliche $g \in G^*$ ist eine Drehung um eine Achse L mit $O \in L$ und hat daher genau zwei Fixpunkte auf S.

Der Beweis wurde im Rahmen des Unterrichts mit Hilfe des Rechnens mit Matrizen und ihrer Determinanten geführt, allerdings hier nicht notiert.

Also ist $|p_2^{-1}(g)| = 2$, daher $|\mathrm{I}| = 2(n-1)$, insbesondere ist $\mathcal{P}$ endlich.

Wenn $P \in \mathcal{P}, g \in G, P' = g(p) : \forall h \in G_P \Leftrightarrow ghg^{-1} = h' \in G_{P'}$. Also $|G_P| = |G_{P'}|$.

Definition: Die Teilmengen $B(P) = \{g(P) | g \in G\}$ heißen Bahnen (Bahn von P) bzgl. G.
Zwei Bahnen sind gleich oder disjunkt, also ist P disjunkte Vereinigung von Bahnen $B_1, ..., B_r$. Wenn $P_j \in B_j, n_j = |G_{P_j}|$, so ist für alle $P \in B_j$

$$|G_{P_j}| = n_j$$

und ist $k_j = |B_j|$, so ist $k_j n_j = n$.

Beweis: Wähle $P_j \in B_j$, definiere $G \xrightarrow{\mu} B_j$, $\mu(g) = gP_j$. Diese Abbildung ist surjektiv und $|\mu^{-1}(P)| = |G_P| = n_j$, also $n = k_j n_j$.

Wir zählen jetzt I auf die Weise, dass wir $p_1 \longrightarrow \mathcal{P}$ mit $p_1((P,g)) = P$ betrachten:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &= \sum_{P\in\mathcal{P}} |p_1^{-1}(P)| \\
&= \sum_{P\in\mathcal{P}} (|G_P| - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sum_{P\in B_j} (n_j - 1) \\
&= rn - \sum_j k_j
\end{aligned}$$

Also $2(n-1) = rn - \sum k_j$. Da $n_j \geq 2$ ist $k_j = \frac{n}{n_j} \leq \frac{n}{2}$, somit $2(n-1) \geq \frac{rn}{2}$.

$$r \leq \frac{4(n-1)}{n} < 4$$

Es gibt also höchstens 3 Bahnen und es gilt:

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = r - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_j} \qquad , r \leq 3$$

r=1

$$\begin{aligned}
2\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= 1 - \frac{1}{n_1} \\
1 + \frac{1}{n_1} &= \frac{2}{n} \qquad \text{, ist nicht möglich, da } \frac{2}{n} \leq 1.
\end{aligned}$$

r=2

$$\begin{aligned}
& 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2}{n} &= \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2 &= k_1 + k_2 \\
\Rightarrow \quad & k_1 = k_2 \quad \wedge & n_1 = n_2 = n
\end{aligned}$$

Es gibt also genau zwei Fixpunkte auf S^2, die diametrische Punkte sind und G ist die Gruppe der Drehungen um die dadurch bestimmte Achse um $k\frac{2\varpi}{n}$ mit $k = 0, 1, ..., n-1$. (Zyklische Gruppe der Ordnung n)

r=3

$$\begin{aligned}
& 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= 3 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} &= 1 + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Wenn
$$n_1 \leq n_2 \leq n_3$$
so ist
$$\frac{1}{n_1} \geq 1 + \frac{2}{n} > 1$$
also
$$n_1 = 2.$$

Fall 1: $n_2 = 2 \ \wedge \ n = 2n_3$

$(n_1, n_2, n_3, n) = (2, 2, n_3, 2n_3)$

Fall 2: $n_2 \geq 3$
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} &\geq 1 + \frac{2}{n} \\ \frac{1}{n_3} &\geq \frac{1}{6} + \frac{2}{n} > \frac{1}{6} \\ n_3 &\leq 5 \end{aligned}$$

Da
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n_2} \geq 1 + \frac{2}{n} > 1$$
ist, gilt $\frac{4}{n_2} > 1$, also $n_2 \leq 3$.
Somit
$$\begin{aligned} (n_1, n_2, n_3, n) &= (2, 3, 3, 2) & (k_1, k_2.k_3) &= (4, 4, 4) \\ &= (2, 3, 4, 24) & &= (12, 8, 6) \\ &= (2, 3, 5, 60) & &= (30, 20, 12) \end{aligned}$$

Die Tripel (k_1, k_2, k_3) entsprechen Tripeln $(|K^1|, |K^2|, |K^0|)$ oder $(|K^1|, |K^0|, |K^2|)$ für reguläre Polyeder.
Man kann die Gruppen wie folgt realisieren

1) $r = 2$
Drehungen eines regulären n-Ecks um die Achse vertikal zum n-Eck durch den Mittelpunkt.
Symmetriegruppe eines Kegels über einem n-Eck.
Gruppe C_n (zyklisch)

2) $r = 3, (n_1, n_2, n_3, n) = (2, 2, m, 2m)$
Symmetriegruppe eines Prismas über einem regulären m-Eck.
Gruppe D_{2m} „Diedergruppe“

3) $(n_1, n_2, n_3, n) = (2, 3, 3, 12)$
   Symmetriegruppe eines Tetraeders mit den Ecken in B_2 (oder B_3).
   Gruppe T „Tetraedergruppe“

4) $(n_1, n_2, n_3, n) = (2, 2, 4, 24)$
   Symmetriegruppe eines Oktaeders mit den Ecken in B_3 oder des (dualen) Würfels mit den Ecken in B_2.
   Gruppe O „Oktaedergruppe“'

5) $(n_1, n_2, n_3, n) = (2, 3, 5, 60)$
   Symmetriegruppe eines Ikosaeders mit den Ecken in B_3 oder des (dualen) Dodekaeders mit den Ecken in B_2.
   Gruppe I „Ikosaedergruppe“

Es gilt außerdem:

$$\begin{aligned} T &\simeq A_4 \\ O &\simeq S_4 \\ I &\simeq A_5 \end{aligned}$$