Lineare Algebra und analytische Geometrie II: Blatt 3
Abgabe 13.05.2009

Schreibweise: Für dieses Blatt bedeute V **stets** ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $T \in End_K(V)$ ein Endomorphismus von V.

Aufgabe 1

1. Seien $f, g \in K[x]$. Zeige, $I = (f, g) = (\mathrm{ggT}(f, g))$, d.h., das Ideal I erzeugt von f und g ist gleich dem Hauptideal erzeugt vom Polynom $\mathrm{ggT}(f, g)$.

2. Berechne ein Polynom $h \in \mathbb{Z}_3[x]$, welches das Ideal (f, g) von $\mathbb{Z}_3[x]$ erzeugt:
$$f = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2,\ g = x^4 + x^3 + x + 2.$$
Ferner, bestimme Polynome $p, q \in \mathbb{Z}_3[x]$ mit $h = pf + qg$.

3. Sei $m_T \in K[x]$ das Minimalpolynom von $T : V \to V$ und $f \in K[x]$ mit $\mathrm{ggT}(f, m_T) = 1$. Zeige: $f(T)$ ist regulär.

Aufgabe 2

1. Bestimme die Minimalpolynome der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Sei $char(K) = 0$ und sei $m_T(x) = (x - \lambda)^2$ das Minimalpolynom von T, wobei $\lambda \in K$ beliebig ist. Zeige:
   (a) Für jedes $f \in K[x]$ gilt: $f(T) = f(\lambda)I + f'(\lambda)(T - \lambda I)$.
   (b) Sei H die Matrix
   $$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Dann gilt $(H - I)^2 = 0$. Bestimme $\sum_{k=0}^{199} H^k$.

Aufgabe 3

Beweise: Falls das Minimalpolynom m_T von T eine Zerlegung $m_T = g \cdot h$ mit $\mathrm{ggT}(g, h) = 1$ besitzt, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $V = \ker g(T) \oplus \ker h(T) =: U_1 \oplus U_2$

2. U_1 und U_2 sind T-invariant. Ferner, U_1 und U_2 sind $r(T)$-invariant für ein beliebiges Polynom $r \in K[x]$. Damit sind die Endomorphismen $r(T)_{U_i} : U_i \to U_i$, für $i = 1, 2$, wohldefiniert.

3. Die Minimalpolynome $m_{T_{U_1}}$, $m_{T_{U_2}}$ gleich g bzw. h.

4. Sei $V = U_1' \oplus U_2'$, wobei U_1', U_2' T-invariant sind, und seien die Minimalpolynome $m_{U_1'}$, $m_{U_2'}$ für $T_{U_1'}$, bzw. $T_{U_2'}$ durch g bzw. h gegeben. Dann gilt $U_1' = \ker g(T)$ und $U_2' = \ker h(T)$.

Aufgabe 4

Für diese Aufgabe dürfen Sie den Satz von Cayley-Hamilton benutzen, nämlich, $m_T(x)|p_T(x)$, wobei $p_T(x)$ das charakteristische Polynom von T ist. Sei $n = \dim(V)$. Zeige:

1. $$\{0\} \leq \ker(T) \leq \ker(T^2) \leq \ldots \leq \ker(T^n) = \ker(T^{n+1}) = V$$

   und
   $$V \geq Im(T) \geq Im(T^2) \ldots \geq Im(T^n) = Im(T^{n+1}).$$

   Ferner, sind
   $$k = min\{j \in \mathbb{N} : \ker(T^j) = \ker(T^{j+1})\},$$
   $$k' = min\{j \in \mathbb{N} : rang(T^j) = rang(T^{j+1})\},$$

   so ist $k = k'$.

2. Falls $m_T(x) = x^r$, so gilt
   $$\{0\} \lneq \ker(T) \lneq \ker(T^2) \lneq \ldots \lneq \ker(T^r) = \ker(T^{r+1}) = V.$$