Darstellungsformen von Zahlen

Jürg Kramer, Anna v. Pippich (beide Humboldt-Universität zu Berlin und Matheon)

Seitdem Menschen zählen, sind die unterschiedlichsten Zahlsysteme zur Darstellung von Zahlen entstanden. Die uns heute vertraute Darstellung ist die Dezimaldarstellung. In unserem Alltag begegnen uns jedoch auch andere Darstellungen, wie beispielsweise die Binärdarstellung in unseren Rechnern, d.h. die Darstellung einer Zahl zur Basis 2. Neben den vielen Vorteilen der Dezimaldarstellung hat diese auch Nachteile. Zum Beispiel können rationale Zahlen sowohl abbrechende als auch periodische Dezimalbruchentwicklungen besitzen. Außerdem gibt es Darstellungsformen, die irrationale Zahlen wesentlich effektiver approximieren als die Dezimaldarstellung.

Die sogenannten Kettenbrüche liefern eine Darstellungsform reeller Zahlen, mit der die oben genannten Nachteile des Dezimalsystems behoben werden. Ist a eine reelle Zahl, so ist der Kettenbruch zu a gegeben durch

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

mit einer ganzen Zahl a_0 und natürlichen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$; wir schreiben dafür kurz $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Wir werden sehen, dass die rationalen Zahlen genau durch die abbrechenden Kettenbrüche charakterisiert werden. Desweitern werden wir beweisen, dass irrationale Zahlen durch Kettenbrüche optimal approximiert werden.

Interessant ist jetzt die Frage nach den irrationalen Zahlen, welche durch periodische Kettenbrüche dargestellt werden. Das einfachste Beispiel ist der Kettenbruch $[1; 1, 1, 1, \ldots]$; es zeigt sich, dass dieser Kettenbruch die quadratische Irrationalität $\omega = (1+\sqrt{5})/2$ darstellt. Allgemeiner werden wir zeigen, dass die periodischen Kettenbrüche genau den Lösungen quadratischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten entsprechen.

Da die aus dem Goldenen Schnitt hervorgehende Zahl ω in mannigfacher Weise in der Natur in Erscheinung tritt, ist es nicht überraschend, aber ebenso faszinierend, dass wir periodische Kettenbrüche in anderen Bereichen der Mathematik und der Natur vorfinden.