Die zufällige Irrfahrt einer Aktie

Teilnehmer:
Daniela Garske (Herder-Oberschule)
Joseph Jung (Pamina-Schulzentrum Herxheim)
Martin Laudien (Herder-Oberschule)
Kaina Schäfer (Herder-Oberschule)
Anja Seegert (Andreas-Oberschule)
Manuel Wille (Herder-Oberschule)

Gruppenleiterinnen:
Peggy Daume und Elke Warmuth (Humboldt-Universität)

Die Gruppe beschäftigte sich zunächst mit zufälligen Irrfahrten im Kontext von Spielen und gestoppten Spielen. Ausgehend von einer Serie von maximal 5 fairen Einzelspielen, die zu einem beliebigen Zeitpunkt gestoppt werden konnte, wurde die Frage untersucht, ob auch das gestoppte Spiel fair ist.
Als nächstes gingen wir der Frage nach, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällige Irrfahrt irgendwann erstmalig einen gegebenen Wert erreicht. Als nützliches Werkzeug lernten wir dabei das Spiegelungsprinzip kennen.

Die Irrfahrten begegneten uns wieder im n-Perioden-Binomialmodell für die (logarithmische) Rendite einer Aktie. Die Parameter eines 5-Perioden-Modells für die Adidas-Aktie schätzten wir aus beobachteten Daten dieser Aktie. Wir diskutierten Vor- und Nachteile dieses Modells. Dann warfen wir einen Blick darauf, was beim Grenzübergang $n \to \infty$ im Binomialmodell passiert.

Schließlich widmeten wir uns der Preisbildung von Call-Optionen. Als grundlegendes Prinzip diente das No-Arbitrage-Prinzip. Wir leiteten eine allgemeine Formel für den Preis einer Call-Option im 3-Binomialmodell her und erkannten die Regelmäßigkeit, die zur Preisformel im n-Perioden-Modell führt.

1 Grundlagen

Zur Einführung in die Stochastik und Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigen wir uns zunächst mit einigen grundlegenden Begriffen und Definitionen.

Gespielt wird ein Spiel mit n unabhängigen Teilspielen. X_i ist das Ergebnis des i-ten Teilschritts. Die Summe S_n aller X_i definiert das Ergebnis des Gesamtspiels. $P(S_i = a)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit nach i Schritten den Wert a zu erreichen. Eine Trajektorie beschreibt einen möglichen Spielverlauf und wird durch ω definiert. Die Menge aller ω wird als Ω bezeichnet.

Der Erwartungswert beschreibt den Durchschnittsgewinn bei n Spielen und wird wie folgt definiert:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega).$$

Der Erwartungswert hat folgende Eigenschaften:

- Additivität: $\forall X, Y$ gilt: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall X$ gilt: $E(aX) = aE(X)$,
- Linearität: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall X$ gilt: $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Ein Spiel heißt fair, wenn der Erwartungswert gleich null ist. Dies bedeutet, dass keiner der Mitspieler bevor- oder benachteiligt.

Während eines Spiels kann ein Spieler eine bestimmte Strategie verfolgen und nach dieser Strategie das Spiel vorzeitig beenden. Die Strategien, deren Ausführung sich nur an dem bisher erfolgten Spielverlauf orientieren, nennt man Stoppzeit T. Dabei gilt nach dem Doobschen Stoppsatz für beschränkte Stoppzeiten: Auch ein gestopptes Spiel bleibt ein faires Spiel, wenn dieses Spiel ohne Stoppen fair war.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Varianz, die wie folgt definiert ist:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - E(X))^2 P(\omega).$$

Die Varianz hat folgende Eigenschaft:

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

Nach dieser kleinen Einführung wenden wir nun unsere neu erworbenen Kenntnisse auf praktische Beispiele an.

2 Peter und Paul

Peter und Paul spielen gemeinsam ein Spiel, welches aus unendlich vielen Teilspielen besteht. Für jedes gewonnenes Spiel gibt es einen Punkt. Paul spielt beliebig lange mit. Peter verfolgt folgende Spielstrategie: Er hört immer dann auf zu spielen, wenn er zum ersten Mal mit einem Punkt in Führung liegt. Wird das Spiel jemals enden?

Gefragt ist also nach der Wahrscheinlichkeit h, dass Peter irgendwann mit einem Punkt führt. Dabei bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass Peter ein Teilspiel gewinnt, mit p, die Wahrscheinlichkeit, dass Paul gewinnt, mit q. Es gilt: $p+q=1$.

Für die Berechnung von h gibt es zwei Wege:

2.1 Berechnung von h über das Spiegelungsprinzip

Das erste Mal, dass Peter in Führung gehen kann, ist, wenn er das erste Spiel gewinnt. Gewinnt er das erste Spiel nicht, braucht er mindestens zwei weitere Spielzüge, um erstmals in Führung zu liegen. Daraus ist ersichtlich, dass Peter nur nach einer ungeraden Anzahl an Spielzügen in Führung gehen kann. Von diesen benötigten Spielzügen muss Peter ein Teilspiel mehr gewinnen als verlieren. Damit ergibt sich für h:

$$h = w_1 p + w_3 p^2 q + w_5 p^3 q^2 + w_7 p^4 q^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k+1}(p^{k+1}q^k),$$

wobei $w_{1,3,5,7,\ldots}$ die jeweilige Anzahl der Wege ist, die Peter nach $1, 3, 5, 7, \ldots$ Spielzügen zum Gesamtsieg führen und im Folgenden bestimmt werden sollen.

Zunächst überlegten wir uns eine Formel, die uns die Anzahl aller Pfade $N_n(a, b)$, die von einem beliebigen Punkt $(0, a)$ zu einem beliebigen Punkt (n, b) führen, angibt. Es gilt:

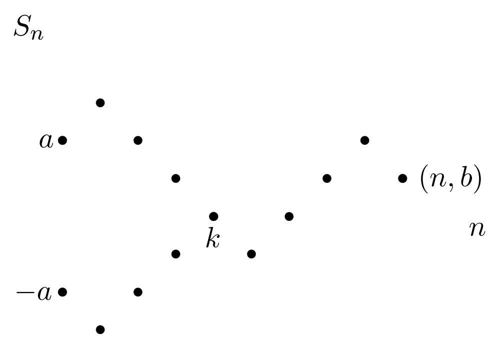
$$N_n(a, b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n + b - a)}.$$

Da Peter jedoch erst nach $1, 3, 5, \ldots$ Teilspielen erstmals in Führung gehen soll, bestand unser Ziel allerdings darin, die unnötigen Pfade, welche vor diesen $1, 3, 5, \ldots$ Spielzügen die Gerade $y = 1$ schneiden, auszuschließen. Zum Ermitteln der Anzahl dieser Pfade bedienten wir uns des Spiegelverfahrens, welches wir im Folgenden erläutern werden.

Es gelten folgende Bezeichnungen:

- $N_n^0(a,b)$: Anzahl aller Wege, die von $A(0,a)$ nach $B(n,b)$ führen und dabei die x-Achse in mindestens einem Punkt $(k,0)$ schneiden oder berühren,
- $N_n(-a,b)$: Anzahl aller Wege, die von $A'(0,-a)$ nach $B(n,b)$ führen.

Das Spiegelungsprinzip besagt: Sind $a, b > 0$, dann gilt: $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$. Dies lässt sich wie folgt begründen: Jeder Pfad, der von $A'(0,-a)$ nach $B(n,b)$ führt, schneidet die x-Achse mindestens einmal. Den ersten Schnittpunkt bezeichnen wir mit $(k,0)$. Spiegelt man nun die Abschnitte der Pfade von $(0,-a)$ nach $(k,0)$ an der x-Achse, erhält man genau die Anzahl der Pfade, die von $(0,a)$ nach (n,b) führen und dabei die x-Achse in $(k,0)$ schneiden. Somit ist die Anzahl der Pfade von $(0,-a)$ nach (n,b) gleich der Anzahl der Pfade von $(0,a)$ nach (n,b), wobei die x-Achse mindestens einmal geschnitten wird.



Damit gilt für die Anzahl der Pfade, die von $A(0,a)$ nach $B(n,b)$ führen und dabei die x-Achse mindestens einmal schneiden:

$$N_n^0(a,b) = N_n(-a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-(-a))}.$$

Dieses Prinzip ist nun auf unser Problem anzuwenden und zwar folgendermaßen:

Um die Anzahl der Wege zu bestimmen, die Peter erstmals nach n Spielzügen in Führung gehen lassen, müssen alle Wege von $(0,0)$ nach $(n,1)$, die die Gerade $y=1$ weder schneiden noch berühren, bestimmt werden. Dazu ist die Differenz zwischen der Anzahl aller Wege von $(0,0)$ nach $(n-1,0)$ und der Anzahl der Wege von $(0,0)$ nach $(n-1,1)$, die die Gerade $y=1$ schneiden oder berühren, zu bilden. Der Trick, die Anzahl der Wege von $(0,0)$ nach $(n-1,0)$, die die Gerade $y=1$ schneiden oder berühren, zu bestimmen, besteht darin, das Koordinatensystem so zu verschieben, dass im neuen Koordinatensystem die x-Achse durch $y=1$ verläuft.

Darauf ist das Spiegelungsprinzip mit den neuen Koordinaten $A(0,-1)$ und $B(n-$

$1,-1)$ anzuwenden. Es gilt also für unsere w_k:

$$\begin{aligned} w_k &= N_{n-1}(-1,-1) - N^0_{n-1}(-1,-1) \\ &= N_{n-1}(-1,-1) - N_{n-1}(+1,-1) \\ &= \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)} - \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-3)} \\ &= \frac{(n-1)!}{\left[(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2})!\right]^2} - \frac{(n-1)!}{(\frac{1}{2}n-\frac{3}{2})! * (\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})!}. \end{aligned}$$

Durch Ersetzen von $n = 2k+1$ und Umformungen ergibt sich schließlich:

$$w_k = \frac{1}{2k+1}\binom{2k+1}{k+1}.$$

Die von uns bestimmten w_k konnten nun zur Berechnung von h genutzt werden. Es gilt:

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} q^k.$$

Mathematica lieferte uns für den Wert dieser Reihe:

$$h = \frac{-1 + \sqrt{(1-2p)^2}}{2(-1+p)}.$$

Dieses Ergebnis erhielten wir auch auf einem anderen Weg, der im nächsten Abschnitt vorgestellt werden soll.

2.2 Ein trickreicher Weg

Da die Berechnung des Wertes der unendlichen Reihe im obigen Weg sehr aufwendig ist, versuchten wir die Berechnung von h auf folgendem Weg: Wir definieren uns t als die Wahrscheinlichkeit, dass Peter irgendwann erstmalig mit zwei Punkten führt. Für t gilt: $t = h^2$. Das ist zumindest plausibel, denn wenn er er irgendwann mit zwei Punkten führen soll, muss er zunächst mit einem Punkt vorn liegen und **von da an** nochmals einen Punkt Vorsprung gewinnen. Das Problem besteht darin, dass der Moment der ersten Führung ein **zufälliger** ist. Auf eine mathematisch exakte Begründung der Beziehung $t = h^2$ haben wir verzichtet.
Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Ausgang des ersten Spielzugs. Wenn Peter den ersten Spielzug gewinnt, liegt er mit einem Punkt in Führung, die Wahrscheinlichkeit hierfür ist p. Wenn Peter das erste Spiel verliert, liegt er einen Punkt im Rückstand und muss von diesem Punkt aus irgendwann mit zwei Punkten führen, hierfür ist die Wahrscheinlichkeit qt.

Daraus folgt:

$$h = p + qt = p + qh^2.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$\begin{aligned} h_1 &= \tfrac{1+(1-2q)}{2q} = \tfrac{1-q}{q} = \tfrac{p}{q}, \\ h_2 &= \tfrac{1-(1-2q)}{2q} = 1. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von h sind 3 Fälle zu betrachten.

1. Für $p > q$ ist $h = 1$, da der Quotient $\frac{p}{q}$ größer als 1 ist und diese Wahrscheinlichkeit nicht existiert.

2. Für $p = q$ ist $h = 1$ die einzige mögliche Lösung, da $h = \frac{p}{q} = 1$ ist.

3. Für $p < q$ ist $h = \frac{p}{q}$. Das haben wir begründet, möchten es aber hier nicht ausführen.

Bezogen auf das Spiel, bedeutet dies: Hat Peter eine gleiche oder größere Gewinnchance als Paul ein Einzelspiel zu gewinnen, geht er mit Sicherheit irgendwann mit einem Punkt in Führung. Hat Peter eine kleinere Gewinnchance als Paul, ist h abhängig von p und q.

3 Aktienkurse

Nun können wir uns den Aktien zuwenden und das bisher Gelernte der Stochastik darauf anwenden. Der Kurs einer Aktie verfolgt eine ,,zufällige Irrfahrt". S_t definieren wir als den Kurs der Aktie zum Zeitpunkt t.

Die Kursänderung von t nach $t + \Delta t$ wird als Rendite bezeichnet. Es gibt zwei verschiedene Arten von Renditen: die einfache und die logarithmische Rendite.

Die einfache Rendite stellt die relative Kursänderung im Zeitraum Δt dar und wird wie folgt berechnet:

$$\text{Einf. Rendite} = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}.$$

Die einfache Rendite kann einen Wert zwischen -1 und unendlich annehmen.

Die logarithmische Rendite wird wie folgt berechnet:

$$\text{Log. Rendite} = \ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} := R_t.$$

Die Wirtschaftsmathematiker bevorzugen in der Regel die log. Rendite, da sie additiv gebraucht werden kann:

$$R_t = \ln \frac{S_2}{S_0} = \ln \left(\frac{S_2}{S_1} * \frac{S_1}{S_0} \right) = \ln \frac{S_2}{S_1} + \ln \frac{S_1}{S_0}.$$

Somit können beispielweise Monatsrenditen leicht berechnet werden, wenn die Wochenrenditen für diesen Monat bekannt sind.

Um Aussagen über den Aktienkurs zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ treffen zu können, formt man die obigen Gleichungen um. Damit gelten für die Aktienkurse:

$$S_{t+\Delta t} = (\text{einf. Rendite} + 1) S_t,$$
$$S_{t+\Delta t} = \exp^{S_t * R_t}.$$

Wir haben als konkretes Beispiel den Aktenkurs der Adidas-Salomon-Aktie betrachtet. Dazu haben wir die Kursdaten vom 09.08.02 bis 13.06.03 ausgewertet.

Mit Hilfe von Exel berechneten wir aus den Daten jeweils die log. Renditen. Aus den Daten wurden der Mittelwert $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ und die Standardabweichung

$s = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$ der Renditen bestimmt und ins Modell übertragen. In der Modellebene lässt sich der Mittelwert als Erwartungswert und die Standardabweichung als $\sqrt{\mathrm{Var(X)}}$ interpretieren. Für die Adidas-Salomon-Aktie ergaben sich folgende Werte: $\overline{x} = -0,0006$ und $s = 0,0352$.

3.1 Binomialmodell für den Aktienkurs

Um leichter eine Prognose für den zukünftigen Aktienkurs erstellen zu können, vereinfachen wir den realen Aktienkursverlauf in einem Modell. Der Aktienkurs kann nach einer Periode genau zwei Werte annehmen. Entweder er steigt oder fällt um einen bestimmten Faktor. Interessant ist dabei die Frage, um welchen Faktor d er steigt und um welchen Faktor u er sinkt. Unsere Idee war es, dass die ,,typischen" Ausschläge der log. Rendite als eine Standardabweichung um den Mittelwert angesehen werden kann. Also bewegen sich die typischen Renditen im Intervall $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$. Daraus lassen sich die zwei Aktienkurse berechnen.

Beispiel:

Mit unseren vorherigen Überlegungen kann der Aktienkurs nur um $u = \exp^{\overline{x}+s}$ sinken oder um $d = \exp^{\overline{x}-s}$ steigen. In unserem Beispiel der Adidas-Salomon-Aktie ergaben sich: $u = 1,035$ und $d = 0,965$.

Letztendlich haben wir mit Hilfe des Black-Scholes Modells aus den Kursdaten vergangener Wochen eine Prognose über den Kurswert der Adidas-Salomon-Aktie für den 27.06.2003 erstellt: Wir errechneten, dass mit 68%iger Wahrscheinlichkeit der Aktienkurs an diesem Tag zwischen € 70.89 und € 78.02 und mit 95%iger Wahrscheinlichkeit zwischen € 67.45 und € 82.31 liegt. Wie sich am 28.06.2003 herausstellte, lag der tatsächliche Aktienkurs am 27.06.2003 bei € 74.50, also tatsächlich in beiden der von uns angegebenen Intervalle.

Abschließend beschäftigten wir uns mit Optionen.

4 Optionen

Eine Option ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, wobei der Käufer der Option folgende Rechte erwirbt. Er darf:

- ein festgelegtes Gut (Basiswert),
- zu einem festgelegten Preis (Ausübungspreis),
- in einem festgelegten Zeitraum (Ausübungsfrist) oder zu einem festgelegten Zeitpunkt (Ausübungstermin, Verfallstermin)

kaufen/verkaufen. Der Verkäufer hat wiederum die Pflicht das Gut zu einem festgelegten Preis zu einem festgelegten Zeitpunkt zu verkaufen/kaufen. Damit der Vertrag, mit dem der Käufer das oben beschriebene Recht erwirbt, in Kraft tritt, muss der Käufer der Option an den Verkäufer der Option eine Prämie, den sogenannten Optionspreis, zahlen. Optionen, die das Recht zum Ordern eines Gutes einräumen, heißen Call-Optionen (Kaufoptionen). Optionen, die das Recht zum Verkauf eines Guts einräumen, heißen Put-Optionen (Verkaufsoptionen). Der Vorteil von Optionen gegenüber Aktien besteht in der möglichen großen Rendite bei geringem Kapitaleinsatz, der Nachteil ist die mögliche hohe negative Rendite, da das gesamte eingesetzte Kapital (Optionspreis) verloren gehen kann.

Als innerer Wert einer Option zur Zeit $t = T$ wird derjenige Betrag bezeichnet, den die Option durch Ausübung zum Zeitpunkt T erzielen würde. Der innere Wert der Call-Option ist somit:

$$C_T = max(0, E - S_T).$$

Im Folgenden nutzen wir folgende Bezeichnungen:

- E: Ausübungspreis,
- S_T: Aktienkurs zum Zeitpunkt T,
- r: Zinsfaktor,
- C_T: Wert der Call-Option zum Zeitpunkt T.

Wir interessierten uns für folgende Fragen: Welchen Preis sollte die Option heute haben? Von welchen Größen hängt der Optionspreis ab?

Zur Bestimmung eines Optionspreises ist das No-Arbitrage-Prinzip von Bedeutung, welches besagt, dass man am Markt keinen risikolosen Gewinn erzielen kann. An einem gut funktionierenden Markt sorgt die Transparenz dafür, dass es keine oder nur kurzzeitig vorhandene Möglichkeiten zur Arbitrage gibt, die aufgrund des Prinzips „Angebot und Nachfrage" selbstregulierend wirken.

Aus dem No-Arbitrage-Prinzip folgt: Haben zwei Portfolios heute den gleichen Wert, dann haben sie auch morgen den gleichen Wert unabhängig davon, wie sich der Markt entwickelt. Ein Portfolio ist eine Kombination von Finanzgütern, d.h. man kombiniert eine Anzahl von Aktien (x) mit einer Menge von Geld (y), wobei Letzteres ein Kredit oder eine Investition sein kann.

Im Folgenden beschreiben wir ein Modell zur Berechnung des Optionspreises.

4.1 Binomialmodell

Der zentralen Idee des Binomialmodells liegt das No-Arbitrage-Prinzip zugrunde. Sie lautet: Zu jedem Zeitpunkt und bei jedem Aktienkurs lässt sich ein Portfolio aus Aktien und Geld zusammenstellen, das in der folgenden Periode die gleiche Wertentwicklung wie die Option aufweist. Aus No-Arbitrage-Prinzip folgt, dass der Preis dieses Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Optionspreis C_0 übereinstimmen muss.

4.1.1 Einperiodenmodell

Das No-Arbitrage-Prinzip werden wir nun im Einperiodenmodell verdeutlichen.

Der Wert der Option zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt:

$$C_0 = S_0 x + y.$$

Aufgrund des No-Arbitrage-Prinzips gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_u &= uS_0x + ry, \\ C_d &= dS_0x + ry. \end{aligned}$$

Durch Lösen des Linearen Gleichungssystems ergibt sich für C_0:

$$C_0 = \frac{1}{r}\left(C_u \frac{r-d}{u-d} + C_d \frac{u-r}{u-d}\right).$$

Mit $p := \frac{r-d}{u-d}$ und $q := \frac{u-r}{u-d}$ folgt:

$$C_0 = \frac{1}{r}(pC_u + qC_d),$$

wobei p und q als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden können. Es gilt: $p+q = 1$.

Damit keine Arbitrage-Möglichkeit besteht, muss gelten: $d \leq r \leq u$.

4.1.2 Das n-Periodenmodell

Das Zeitintervall $[0, T]$ wird in n Teilintervalle zerlegt. In jedem Teilintervall steigt bzw. sinkt der Aktienkurs unabhängig von jedem anderen Teilintervall und unabhängig vom bisherigen Kursverlauf.

Durch Zerlegung des Baumes in Einperiodenmodelle und Rückwärtsarbeiten erhält man für das Zweiperiodenmodell:

$$C_0 = \frac{pC_u + qC_d}{r} = \frac{1}{r^2}\left(p^2 C_{uu} + 2pqC_{ud} + q^2 C_{dd}\right).$$

Ebenso haben wir das Dreiperiodenmodell hergeleitet, für das sich folgender Optionspreis ergibt:

$$C_0 = \frac{1}{r^3}(p^3 C_{u^3} + 3p^2 q C_{u^2 d} + 3pq^2 C_{ud^2} + q^3 C_{d^3}).$$

Nach weiteren Untersuchungen ergibt sich eine Regelmäßigkeit, aus der man die Formel für das n-Perioden-Modell herleiten kann. Es gilt:

$$C_0 = \frac{1}{r^n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} p^i q^{n-i} C_{u^i d^{n-i}}\right).$$

Um die Genauigkeit der Formel zur Bestimmung des Optionspreises zu testen, bestimmten wir den Preis einer Option auf eine Adidas-Salomon-Aktie mit einer Laufzeit von 5 Wochen und einem Ausübungspreis von € 70.00. Mit unserem 5-Periodenmodell erhielten wir € 5.43. An der Börse wurde diese Option mit € 5.52 gehandelt.