Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2011

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Elementargeometrie

Literaturempfehlungen:

- HOLLAND, G.: *Geometrie in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 1996 (2. Aufl.).
- KADUNZ, G.; STRÄSSER, R.: *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*. Hildesheim: Franzbecker, 2007.
- WEIGAND, H.-G. et al.: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Heidelberg: Springer/ Spektrum, 2009.
- Schulbücher, Zeitschriften, ... – Hinweise auf weitere Literaturquellen zu bestimmten Themen werden in der Vorlesung gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Ziele des Geometrieunterrichts

1.1 Kompetenzen und Leitideen

Allgemeine mathematische Kompetenzen (nach den KMK-Bildungsstandards für den MSA, 2003)[1]

- Mathematisch argumentieren,
- Probleme mathematisch lösen,
- Mathematisch modellieren,
- Mathematische Darstellungen verwenden,
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen,
- Kommunizieren.

Leitideen (Leitlinien für inhaltsbezogene Kompetenzen) (KMK-Bildungsstandards für den MSA, 2003)[2]

- Zahl,
- Messen,
- Raum und Form,
- Funktionaler Zusammenhang,
- Daten und Zufall.

[1] Diese Kompetenzen finden sich auch in dem Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I (2006) wieder.
[2] Diese Leitideen finden sich auch in dem Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I (2006) wieder.

Beispiel: *Leitidee Raum und Form*

Figuren und Körper, deren Charakterisierung, Eigenschaften und Beziehungen sowie der Umgang mit diesen Objekten stehen im Mittelpunkt des gesamten Geometrieunterrichts. Insbesondere gilt es,

- Figuren und Körper in der Umwelt zu erkennen, sie zu beschreiben und zu charakterisieren;
- Körper auf unterschiedliche Weise darzustellen: Schrägbild, Netz, Modell;
- Beziehungen zwischen Figuren und Körpern zu beschreiben und zu begründen: Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit;
- Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen anzuwenden: Kongruenzsätze, Satz des Thales, Satz des Pythagoras;

Beispiel: *Leitidee Funktionaler Zusammenhang*

Funktionen sind zentrale Elemente in der Algebra und der Analysis. Funktionale Zusammenhänge lassen sich aber auch in der Geometrie in vielfacher Weise aufzeigen:

- Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen sind Funktionen;
- Flächeninhalts- und Volumenformeln lassen sich als Funktionen mehrerer Veränderlicher ansehen;
- Beim rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenlänge der Hypotenuse eine Funktion der beiden Kathetenlängen;
- Bei gegebenem Flächeninhalt eines Rechtecks ist eine Seitenlänge eine Funktion der anderen Seitenlänge.

1.2 Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts, Aspekte von Geometrie

Grunderfahrungen der mathematischen Bildung (nach HEINRICH WINTER, 1996)

G1: Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen ... , aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen,

G2: mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenlernen und begreifen,

G3: in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten), erwerben.

Für den Geometrieunterricht ergeben sich daraus die folgenden allgemeinen Ziele.

Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts

1. Mit Hilfe der Geometrie die (Um-)Welt erschließen
2. Geometrie und die Grundlagen wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens kennen lernen
3. Mit Geometrie Problemlösen lernen

Verschiedene Aspekte von Geometrie[3]

1. Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum
2. Geometrie als Beispiel einer deduktiven Theorie
3. Geometrie als Übungsfeld im Problemlösen
4. Geometrie als Vorrat mathematischer Strukturen

[3]nach HOLLAND, G.: *Geometrie in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 1996 (2. Aufl.).

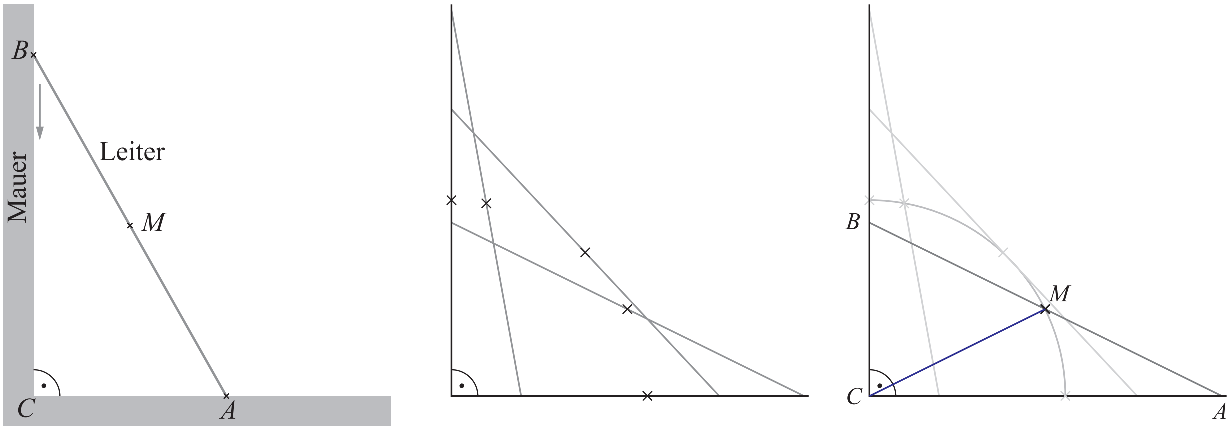
2 Argumentieren, Beweisen, lokales Ordnen

2.1 Erkenntnisfindung und Erkenntnissicherung – Beispiele

- Beweisen: *Sicherung* einer Erkenntnis (die als Satz formuliert sein kann).
- Vor der Erkenntnissicherung sollte im Unterricht i. Allg. die *Erkenntnisfindung* stehen.
- Mitunter lassen sich Erkenntnisfindung und -sicherung nicht vollständig trennen.
- Meist leitet die Frage „*warum*" die Phase der Erkenntnissicherung ein.

Beispiel: Eine Leiter steht an einer Mauer und rutscht langsam an der Mauer nach unten.

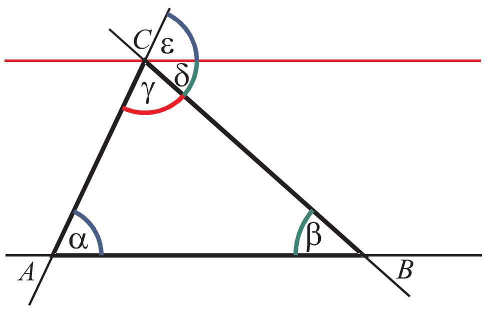
- Welchen Weg beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?
- Begründe deine Antwort.



Die Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) könnte das Finden einer Beweisidee erleichtern, erschwert aber die Motivation der Beweisnotwendigkeit.

Beispiel: ***Innenwinkelsatz***

- Erkenntnisfindung: Messungen, DGS(?)
- Anschauliche Begründung, Beweis*idee*
- Exakter Beweis: Was darf und was muss verwendet werden? → Lokales Ordnen.



Voraussetzung: α, β und γ sind Innenwinkel des Dreiecks *ABC*

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beweis: - Wir zeichnen / betrachten die Parallele zu *AB* durch den Punkt *C*.

- Sind δ und ε die Winkel, welche diese Parallele mit *BC* bzw. *AC* bildet, so gilt:

$\varepsilon + \delta + \gamma = 180°$ (Nebenwinkelsatz),
$\delta = \beta$ (Wechselwinkelsatz) und
$\varepsilon = \alpha$ (Stufenwinkelsatz).

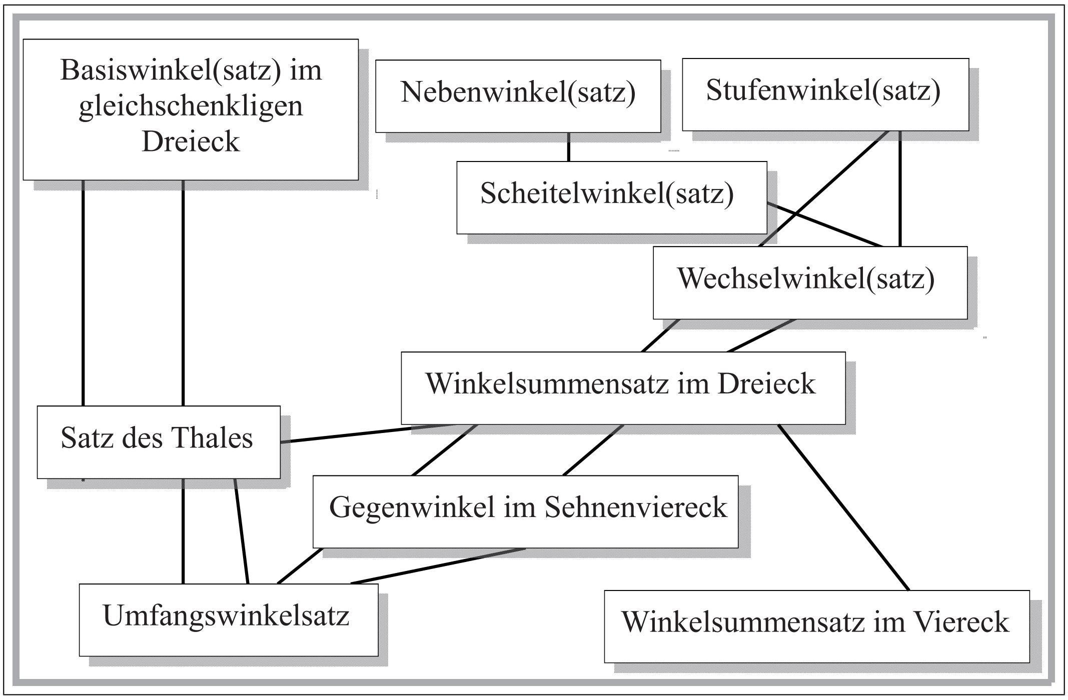
- Also gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, was zu beweisen war.

2.2 Lokales Ordnen

- Vollständiger (axiomatischer) Aufbau der Geometrie ist im Unterricht kaum möglich (in der Geschichte: vorläufiger Abschluss eines langen Erkenntnisprozesses.)
- Verständnis der gegenseitigen Abhängigkeit von Begriffen und Sätzen ist dennoch wünschenswert.

→ „Lokales Ordnen“ als Herstellung eines Beziehungsgefüges innerhalb eines überschaubaren Feldes.

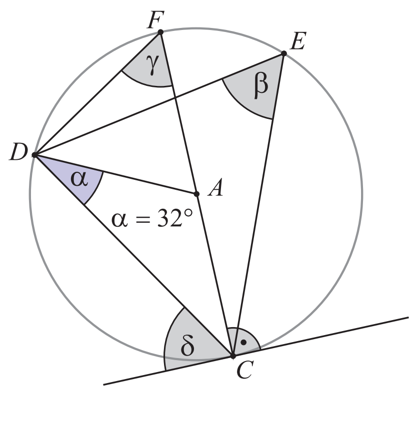
Es blieb eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des lokalen Ordnens genannt. FREUDENTHAL[4]



2.3 Arbeiten mit Sätzen *vor* dem Beweisen

2.3.1 Anwenden von Sätzen → Förderung bereichsspezifischer Beweisstrategien

- Bestimme die fehlenden Winkelgrößen in der Figur.
  - Basiswinkelsatz
  - Satz des Thales
  - Innenwinkelsatz
  - Umfangswinkelsatz

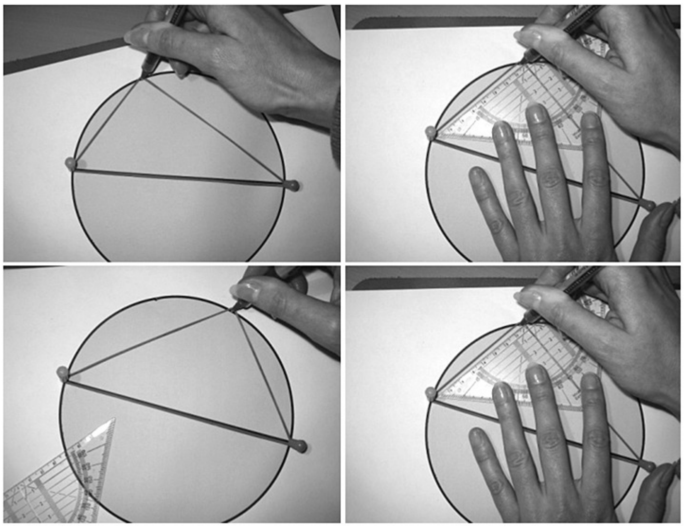


[4] FREUDENTHAL, H.: Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: *Der Mathematikunterricht* 9 (1963), 4, S. 5-29.

2.3.2 Herausarbeiten von Sätzen

- In der Mittelstufe kommt enaktiven und ikonischen Wegen der Satzfindung eine hohe Bedeutung zu.

  Beispiel: Satz des Thales →



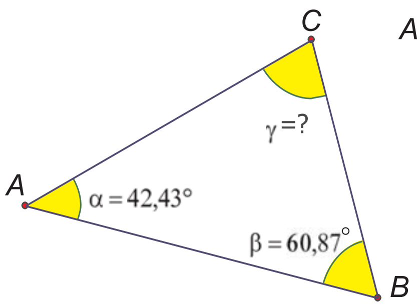
- Wo enaktive Zugänge nicht ohne Weiteres möglich sind – oder zu ihrer Ergänzung – sollten graphische Darstellungen angefertigt und Messungen durchgeführt werden.
- Gute Möglichkeiten hierfür bietet dynamische Geometriesoftware.

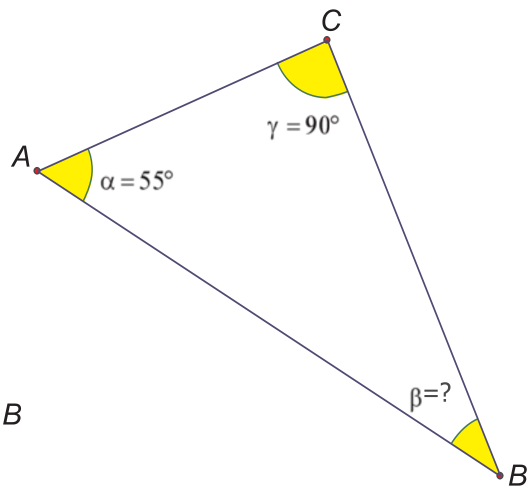
2.3.3 Notwendige Schritte vor dem Führen (exakter) Beweise

- Bevor ein Satz bewiesen werden kann, muss seine Aussage von den Schülern wirklich verstanden worden sein.
- Dazu: Annehmen, dass der Satz gilt; Arbeiten mit dem Satz.

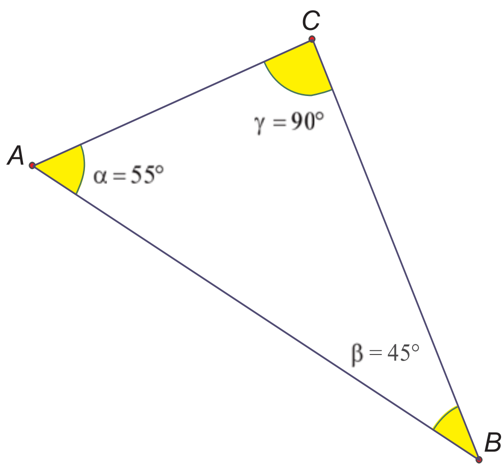
Beispiel: ***Innenwinkelsatz für Dreiecke***

a) Berechne die fehlenden Winkel.





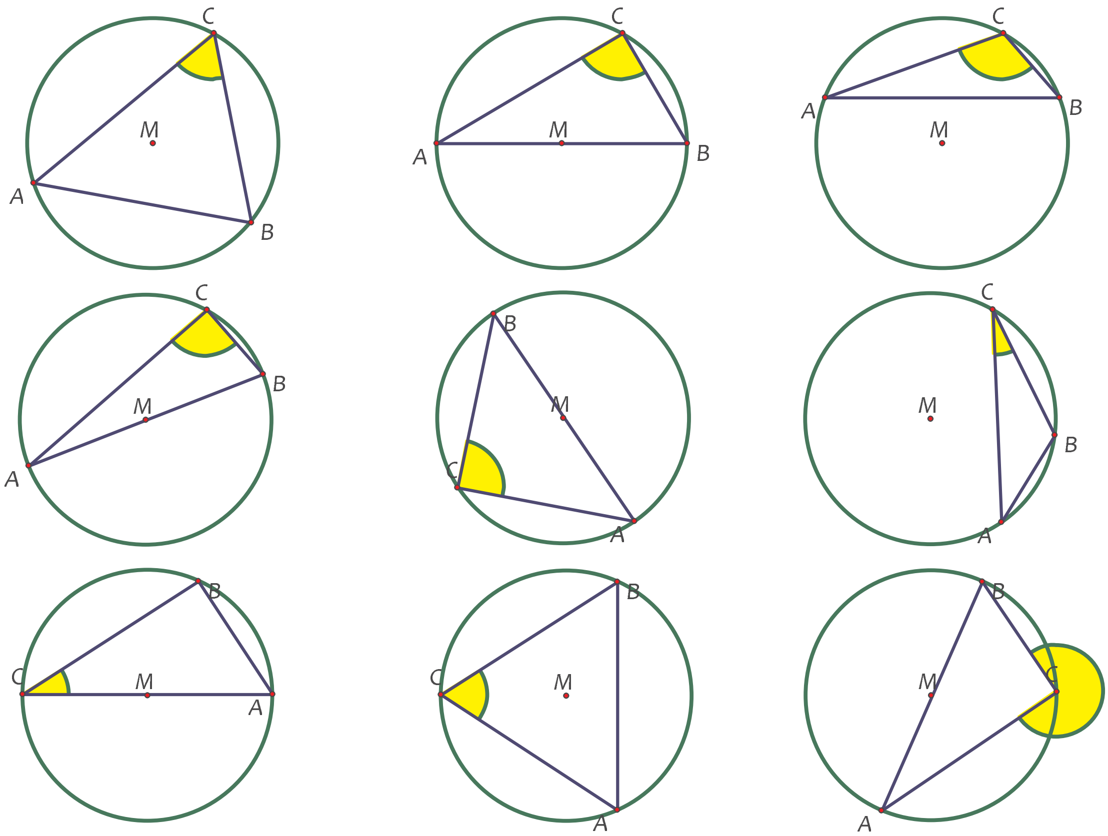
b) *Warum* gibt es das folgende Dreieck nicht?



c) Kann es Dreiecke mit zwei rechten Winkeln geben?

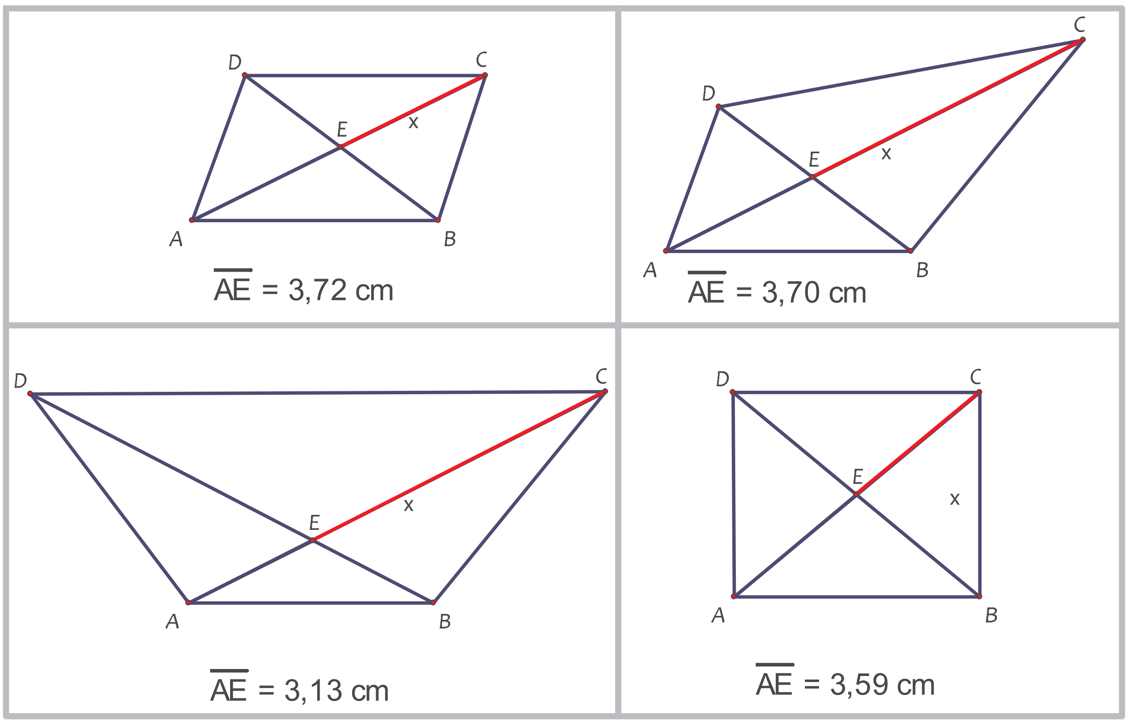
Beispiel: ***Satz des Thales***

- In welchen Fällen kannst du mit dem Satz des Thales begründen, dass der gelbe Winkel ein Rechter ist?



Beispiel: ***In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.***

- In welchen Fällen kannst du die fehlende Streckenlänge angeben?



2.3.4 Arbeiten mit Sätzen – sprachlich-logische Aspekte

Notwendige Schritte vor dem Führen (exakter) Beweise

- Um Beweise führen zu können, müssen Voraussetzungen und Behauptungen klar herausgearbeitet werden.
- Sinnvoll ist dazu die Formulierung von Sätzen in der „*Wenn-Dann*“-Form.

Beispiel: ***Satz des Pythagoras***

- In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.
- Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Bei einigen Sätzen ist die Formulierung in der „Wenn-Dann“-Form komplizierter (z. B. Satz des Thales, Strahlensätze) $\rightarrow$ bedeutsam für Umkehrung(en).

Herausarbeiten von Voraussetzung(en) und Behauptung

- Häufig Verwendung von Skizzen (sprachliche Vereinfachung)
- aber: „Verkürzungen“ vermeiden (z. B.: Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$)

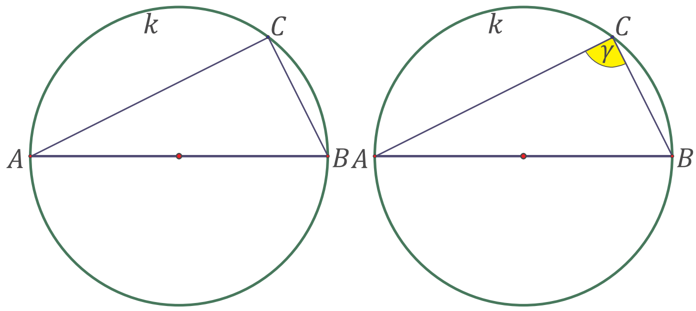
Beispiel: ***Satz des Thales***

Voraussetzungen:

1. Scheitelpunkt (Eckpunkt) C liegt auf dem Kreis k.
2. $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser von k.

Behauptung:

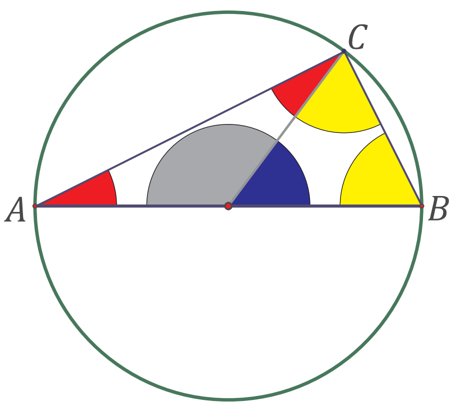
- γ ist ein rechter Winkel.



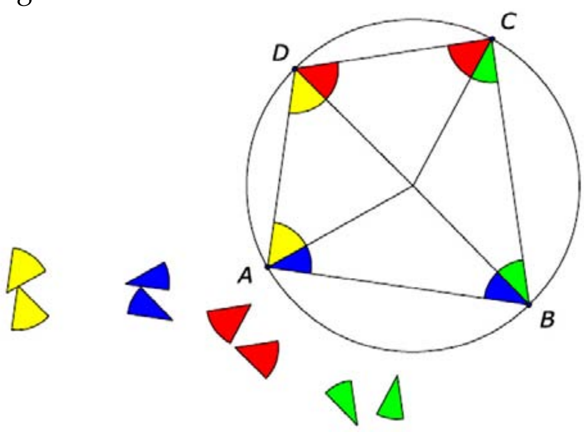
2.3.5 Anschauliche Vorgehensweisen beim Beweisen

- Gerade „Beweisanfängern“ sollte das Beweisen nicht durch eine zu komplizierte Sprache und auch nicht durch verwirrende Symbole (wie z. B. γ_1, ...) erschwert werden.
- Es lohnt sich, nach Möglichkeiten zu suchen, Beweise ikonisch (bzw. „halbikonisch“) aufzubereiten.

„Halbikonischer“ Beweis des Satzes des Thales



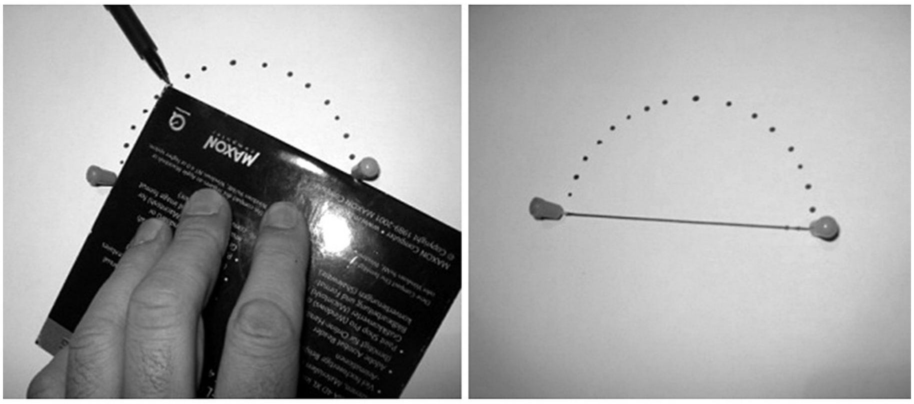
„Halbikonischer“ Beweis des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck



2.4 Umkehrungen von Sätzen

- Umkehrungen von Sätzen sind ein heikles Problem.
- Oft identifizieren Schüler Sätze mit ihren Umkehrungen.
- Gegenbeispiele sind wichtig.

Enaktives Herausarbeiten der Umkehrung des Satzes des Thales



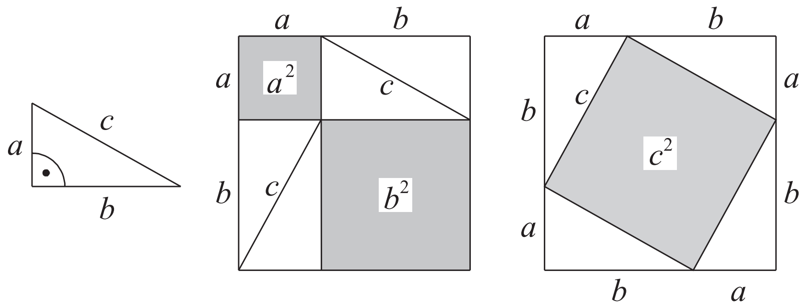
2.5 Arten von Beweisen

2.5.1 Zerlegungs-, Ergänzungsbeweise

Beweise bzw. Begründungen lassen sich oft auf recht unterschiedliche Arten führen; einige Vorgehensweisen sind im Mathematikunterricht besonders bedeutsam.

Zerlegungs- und Ergänzungsbeweise können teilweise unter Zuhilfenahme der Anschauung geführt werden.

Beispiel für einen Zerlegungs-/Ergänzungsbeweis (Satz des Pythagoras)



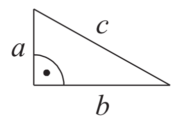
- Die beiden großen Quadrate haben jeweils die Seitenlänge $a + b$ und deshalb gleiche Flächeninhalte $(a + b)^2$.
- Außer den grau eingefärbten Quadraten enthalten diese beiden Quadrate jeweils viermal das Dreieck $\triangle ABC$. Die weißen Flächen haben also in beiden Quadraten den gleichen Flächeninhalt.
- Deshalb muss der Flächeninhalt der grauen Flächen in den beiden großen Quadraten ebenfalls gleich sein.
- $a^2 + b^2 = c^2$.

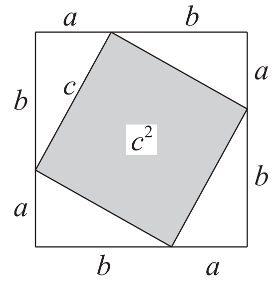
2.5.2 Berechnungsbeweise

Bei Berechnungsbeweisen folgt die Behauptung durch algebraische Umformungen von Gleichungen (z. B. zur Flächeninhalts- oder Volumenberechnung).

Beispiel für einen rechnerischen Beweis

Beweis des Satzes des Pythagoras mit Hilfe der Flächeninhaltsformel für rechtwinklige Dreiecke und der binomischen Formeln



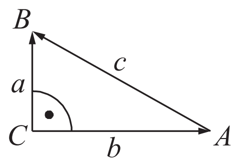


- Da der Flächeninhalt der vier Dreiecke (siehe Abb.) jeweils $\dfrac{ab}{2}$ beträgt, gilt:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

2.5.3 Vektorielle Beweise (Sekundarstufe II)

Beispiel: Vektorieller Beweis für den Satz des Pythagoras unter Nutzung des Skalarproduktes



- Da in einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ orthogonal zueinander sind, ist ihr Skalarprodukt Null.
- Es gilt deshalb:
$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

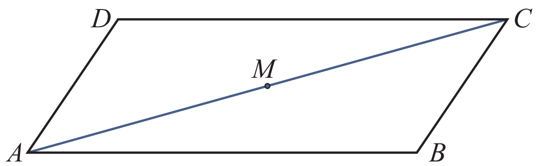
2.5.4 Abbildungsbeweise, Kongruenzbeweise, Ähnlichkeitsbeweise

- Bei einem *Abbildungsbeweis* wendet man eine Kongruenz- oder Ähnlichkeitsabbildung auf eine Figur oder eine Teilfigur an und begründet die Behauptung aufgrund der Eigenschaften dieser Abbildung.
- Ein *Kongruenzbeweis* stützt sich auf die Kongruenzsätze für Dreiecke: Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und zeigt deren Kongruenz. Hieraus kann man auf gleich große Winkel oder gleich lange Strecken schließen.
- Ein *Ähnlichkeitsbeweis* zieht die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke heran: Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und zeigt deren Ähnlichkeit. Hieraus kann man auf gleiche Verhältnisse von Streckenlängen oder gleich große Winkel schließen.

Beispiel für einen Abbildungsbeweis

Satz: *In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.*

Ein Begründung bzw. ein Beweis kann mithilfe einer Punktspiegelung (Drehung um 180°) gegeben werden.



Anschauliche Begründung (auch mithilfe von Transparenzpapier):

- Eine Drehung um 180° um den Mittelpunkt M einer der Diagonalen des Parallelogramms bildet das Parallelogramm auf sich selbst ab (A auf C, B auf D, C auf A und D auf B).
- Also müssen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ jeweils gleich lang sein.

Anschauliche Begründungen auf abbildungsgeometrischer Grundlage lassen sich exaktifizieren. Dazu müssen Eigenschaften der verwendeten Abbildungen (im obigen Beispiel betrifft dies die Punktspiegelungen) erarbeitet und verwendet werden.

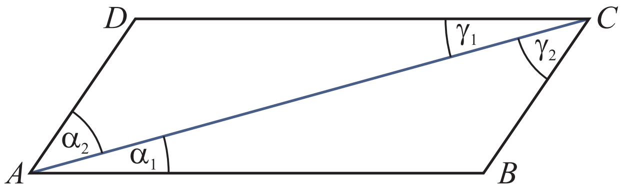
Eigenschaften von Punktspiegelungen:

(S1) Die Verbindungsstrecke eines Punktes mit seinem Bildpunkt wird von dem Spiegelzentrum halbiert.
(S2) Gerade und Bildgerade sind stets zueinander parallel.
(S3) Der Schnittpunkt zweier Geraden wird auf den Schnittpunkt der Bildgeraden abgebildet.
(S4) Punktspiegelungen sind involutorische Abb., d. h. aus $A \to B$ folgt $B \to A$.
(S5) Strecken werden auf Strecken gleicher Länge abgebildet.

Ein exakter Beweis des o. g. Satzes unter Verwendung dieser Eigenschaften ist möglich, umfasst aber recht viele Schritte (vgl. HOLLAND: *Geometrie in der Sekundarstufe*, S. 62f).

Beispiel für einen Kongruenzbeweis

Satz: *In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.*



- Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt: $AB||DC$ und $AD||BC$.
- α_1 und γ_1 sind Wechselwinkel an AB und DC $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \gamma_1$.
- α_2 und γ_2 sind Wechselwinkel an AD und BC $\Rightarrow$ $\alpha_2 = \gamma_2$.
- In den beiden Dreiecken ΔABC und ΔCDA gilt:
  $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\angle CAB = \alpha_1 = \gamma_1 = \angle ACD$, $\angle BCA = \gamma_2 = \alpha_2 = \angle DAC$.
- Nach dem Kongruenzsatz „wsw“ sind die beiden Dreiecke kongruent: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.
- Also gilt $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$.

Abbildungs- vs. Kongruenzmethode

Vorteile der Abbildungsmethode

- Anschaulichkeit
- unterschiedliche Niveaustufen möglich
- Einbeziehung der Symmetrieeigenschaften von Figuren

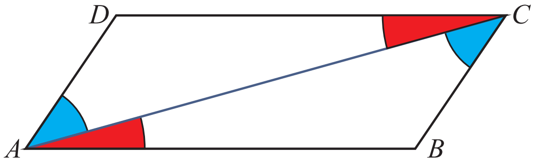
Nachteile der Abbildungsmethode

- unübersichtlich viele Eigenschaften der verschiedenen Abbildungen
- exakte Beweise sind oft recht lang
- „Unsicherheitsfaktor“

Vorteile der Kongruenzmethode

- besser überschaubares Feld an zu verwendenden Fakten (Definitionen, Kongruenzsätze, einige weitere Sätze)
- einfachere und kürzere Beweisdarstellung

Auch Kongruenzbeweise lassen sich oft recht anschaulich darstellen, ohne dass der wesentliche Inhalt verlorengehen muss.



- Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, gilt: $AB||DC$ und $AD||BC$.
- Die rot markierten Winkel sind gleich groß (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).
- Die blau markierten Winkel sind gleich groß (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).
- Die Dreiecke ΔABC und ΔCDA haben eine gemeinsame Seite und stimmen in zwei Winkelgrößen überein.
- Nach „wsw“ sind die beiden Dreiecke kongruent.
- Deshalb ist $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$.

In neueren Schulbüchern hat sich die Kongruenzmethode weitgehend durchgesetzt.

Beispiele für Ähnlichkeitsbeweise:
Beweise des Katheten- und des Höhensatzes mithilfe ähnlicher Teildreiecke (zu finden in vielen Gymnasiallehrbüchern der Klassenstufe 9, teilweise auch 8).

2.5.5 Direkte und indirekte Beweise

- Bei einem *direkten* Beweis wird eine unmittelbare und direkte Argumentationskette von den Voraussetzungen zur Behauptung aufgebaut, unter Einbeziehung bekannter Axiome und Sätze.
- Ein *Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis)* wird geführt, indem man – zusätzlich zu den Voraussetzungen – die Verneinung der Behauptung annimmt und zeigt, dass diese Annahme letztlich in einen Widerspruch zu den Voraussetzungen mündet.

2.5.6 Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise

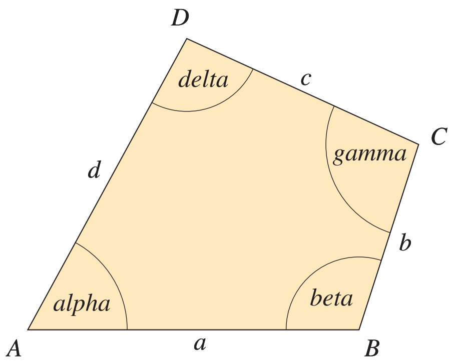
- Bei einem *Existenzbeweis* ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert.
- Bei einem *Eindeutigkeitsbeweis* ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen höchstens ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert (der Nachweis der Existenz dieses Objekts ist dann nicht Bestandteil des Beweises).

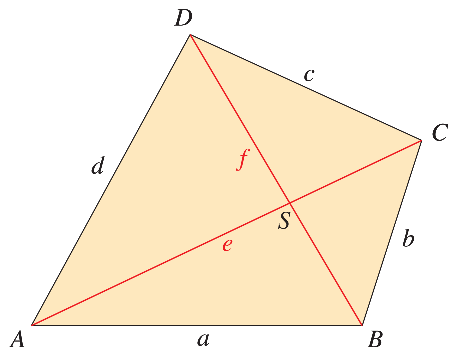
  Eindeutigkeitsbeweise werden häufig als Widerspruchsbeweise geführt: Man nimmt an, dass zwei verschiedene Objekte mit den geforderten Eigenschaften existieren und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

Schulbuchkopie für die Übung: Erkenntnisfindung und -sicherung

2 Wie finde ich die Mitte?

Im Viereck $ABCD$ sind durch die Vorgaben von $a = 6$ cm, $d = 4$ cm und $\alpha = 50°$ nur die Ecken A, B und D festgelegt.





Ergänze dieses Dreieck durch einen weiteren Punkt C zu einem Viereck und versuche durch Variation der Lage von C zu erreichen, dass sich die Diagonalen halbieren.
Dies kannst du besonders gut mit einer DGS untersuchen. Gehe dabei auch von verschiedenen „Startdreiecken" ABD aus und verschiebe dann den Punkt C.
Entsteht ein besonderes Viereck? Formuliere den von dir beobachteten Zusammenhang mit eigenen Worten und begründe ihn.
Tipp: Suche in deiner Figur geeignete Teildreiecke und betrachte die dabei auftretenden Winkel.

aus: Fokus 4 (Cornelsen, Gymnasium, Klasse 8)

Schulbuchkopie für die Übung: Schrittfolge bei Kongruenzbeweisen

Satz

Satz von der Mittelparallelen
Wenn eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreieckseite parallel zu einer anderen Dreieckseite verläuft, dann halbiert sie die dritte Dreieckseite.

Schema für einen Beweis

Planfigur: Markiere und bezeichne die aus der Voraussetzung bekannten Größen in einer Planfigur.

Beweisidee: Überlege, ob du Sätze (Kongruenzsätze, Winkelsätze, …) kennst, in denen diese Größen vorkommen. Manchmal lohnt es sich, Hilfslinien einzuzeichnen.

Voraussetzung: Hier werden deine Voraussetzungen nacheinander aufgelistet.

Behauptung: Schreibe hier das gewünschte Ergebnis deiner Begründung auf.

Beweis: Schreibe hier Schritt für Schritt auf, wie sich aus deinen Beobachtungen an der Skizze die Behauptung ergibt. Begründe jeden Schritt, und achte darauf, dass du nirgends das verwendest, was du erst beweisen willst. Nutzen darfst du die Voraussetzungen, bereits bewiesene Teilschritte und schon früher als gültig erkannte Sätze.

Tipp

Beim Beweisen kann dir helfen:
- Markieren von bekannten Größen
- Hilfslinien einzeichnen
- Geeignete Bezeichnungen einführen
- Für Kongruenzbeweise: Suche kongruente Dreiecke in deiner Planfigur, die gegebene Stücke enthalten, so dass Kongruenzsätze anwendbar sind. Um die Kongruenz zu beweisen, suche nach gleichgroßen Seiten bzw. gleichweiten Winkeln und markiere sie farbig.

aus: Fokus 4 (Cornelsen, Gymnasium, Klasse 8)

3 Konstruieren im Geometrieunterricht

- Konstruieren wird von Lernenden als *DIE* für die Geometrie typische Tätigkeit angesehen.
- *Konstruieren* ist aber auch eng mit anderen zentralen Aspekten des Geometrieunterrichts verknüpft:

  – *Entdecken* von Sätzen und Zusammenhängen,
    - besondere Linien und Punkte im Dreieck,
    - Satz von Varignon,
    - ...

  – *Beweisen* (Konstruktionsvorschriften als Existenzbeweise),

  – *Begriffsbildung* (konstruktive Bildung von Begriffen),

  – *Problemlösen* (Konstruktionsprobleme).

3.1 Arten von Konstruktionen

Es sind bei geometrischen Konstruktionen verschiedene Exaktheits- stufen möglich. Außerdem hängen Konstruktionen von den verwendeten Hilfsmitteln (Zirkel und Lineal, Skaleneinteilung, Geodreieck, Computer mit zusätzlichen Werkzeugen) ab.

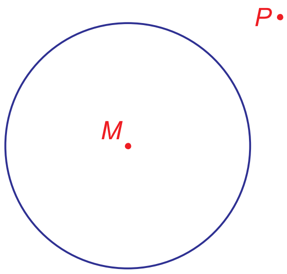
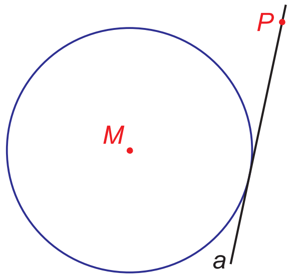
- Konstruktion nach Augenmaß – evtl. unter Nutzung materieller Hilfsmittel (Faden, Zylinder);
- Konstruktion unter Verwendung des Geodreiecks;
- Konstruktion mit Zirkel und Lineal $\rightarrow$ DIE „eigentlichen“ (klassischen) Konstruktionen;
- Konstruktion mit DGS (Dynamische Geometrie-Software):
  - Nachvollziehen einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal,
  - Nutzung spezifischer Möglichkeiten von DGS.

3.2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Beispiel:

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruiere eine Tangente an den Kreis, die durch P verläuft.

Ausgangskonfiguration	*Zielkonfiguration*
Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises.	Konstruiere eine Tangente an den Kreis, die durch P verläuft.
Objekte: Kreis $k(M,r)$, Punkt P *Bedingungen:* P liegt außerhalb von $k(M,r)$	*Objekte:* Kreis $k(M,r)$, Punkt P, Gerade a *Bedingungen:* P liegt außerhalb von $k(M,r)$, $P \in a$, a ist Tangente an $k(M,r)$

Ausgangskonfiguration	*Zielkonfiguration*
	

Konstruktionsbeschreibung	*Bemerkungen*
Zeichne die Strecke $\overline{MP}$.	
Zeichne den Mittelpunkt von $\overline{MP}$, nenne ihn N.	Mit Zirkel und Lineal: mehrschrittige Konstruktion.
Zeichne den Kreis $k(N, R)$ mit dem Radius $R = \overline{NP}$.	
Markiere einen der beiden Schnittpunkte des Kreises $k(N, R)$ mit dem Kreis $k(M, r)$, nenne ihn A.	
Zeichne die Gerade $g(P, A)$, nenne sie a.	
Ergebnis: a ist eine gesuchte Tangente.	WARUM? Wie kommt man darauf?

3.3 Durchführbarkeit und Richtigkeit einer Konstruktion

Durchführbarkeit einer Konstruktion

- Für jeden Konstruktionsschritt muss die Durchführbarkeit gewährleistet sein.

  Das gilt insbesondere für das Markieren von Schnittpunkten.

$\rightarrow$ Die *Objekte der Zielkonfiguration* müssen wirklich entstehen.

Aufgabe: Begründen Sie die Durchführbarkeit der angegebenen Tangentenkonstruktion (für jedes Objekt, das in der Konstruktion entsteht).

Richtigkeit einer Konstruktion

- Eine geometrische Konstruktion muss richtig sein.

$\rightarrow$ Die *Bedingungen der Zielkonfiguration* müssen erfüllt sein.

Aufgabe: Wodurch ist die Richtigkeit der angegebenen Tangentenkonstruktion gesichert?

3.4 Phasen im Konstruktionsprozess

Heuristische Phase (Finden von Ansätzen und Wegen, Probleme zu lösen)

- Verstehen der Aufgabe; Ausgangs- und Zielkonfiguration
- Entwickeln eines Lösungsplans
- Evtl. Beachten von Fallunterscheidungen, Durchführbarkeit

Algorithmische Phase

- Durchführen der Konstruktion
- Dokumentation der Lösung (Konstruktionsbeschreibung)

Analytische Phase

- Begründung der Richtigkeit der Konstruktion
- Überlegungen zur Eindeutigkeit der Lösung(en)

3.5 Fallunterscheidungen

Mitunter sind bei Konstruktionen *Fallunterscheidungen* notwendig.

Beispiel: Es wird bei der Aufgabe

> *Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie ein Punkt P. Konstruiere eine Tangente an den Kreis, die durch P verläuft.*

auf die ursprüngliche Bedingung *„Punkt P außerhalb des Kreises“* verzichtet.

- – Welche Fälle sind zu unterscheiden?
- – Welche Konsequenzen ergeben sich für die Durchführbarkeit und die Richtigkeit der Konstruktion?

Beispiel: *Gegeben sind drei Strecken a, b und c. Konstruiere ein Dreieck DEF, dessen Seiten zu a, b und c kongruent (gleich lang) sind.*

- – Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift an. Sind Fälle zu unterscheiden?
- – Argumentieren Sie zur Durchführbarkeit und zur Richtigkeit der von Ihnen angegebenen Konstruktion. Welche Konsequenzen ergeben sich aus den unterschiedenen Fällen?

3.6 Konstruktionen mit dem Computer

- Mithilfe dynamischer Geometriesoftware (DGS) können Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sowie auch Konstruktionen mithilfe des Geodreiecks „nachvollzogen“ werden.
- Es ergeben sich aber auch „neue“ Aspekte und Möglichkeiten.
  - Dynamische Abhängigkeiten (Zugmodus)
  - Aufzeichnung von Ortskurven
– Neue Konstruktionsmöglichkeiten, z. B. Gärtnerkonstruktion
  - Erzeugung neuer „Werkzeuge“ bzw. „Makros“
– Thaleskreis als neue *„Grundkonstruktion“*
– Modulares Arbeiten

3.7 Grundkonstruktionen und Standardkonstruktionen

Grundkonstruktionen:
Konstruktionen, die *mit dem jeweiligen Werkzeug* in einem Schritt erzeugt werden können

Mit *Zirkel und Lineal* lassen sich – bei gegeben Punkten A und B – vier Grundkonstruktionen durchführen:

- Kreis mit Mittelpunkt A bzw. B und Radius $\overline{AB}$ zeichnen;
- Gerade durch die Punkte A und B zeichnen;
- Halbgerade ausgehend von Punkt A durch B zeichnen;
- Strecke $\overline{AB}$ zeichnen.

Bei Verwendung des *Geodreiecks* gibt es weitere Grundkonstruktionen, z. B.

- Zeichnen von Senkrechten und Parallelen,
- Abtragen von Winkeln.

Weitere Grundkonstruktionen ergeben sich bei anderen Werkzeugen:

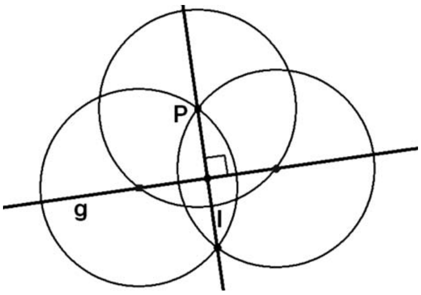
- Beim Falten von Papier ist das Erzeugen des Bildes bei einer Achsenspiegelung eine Grundkonstruktion.
- Computer … vielfältige Konstruktionen sind in einem Schritt möglich.

Standardkonstruktionen

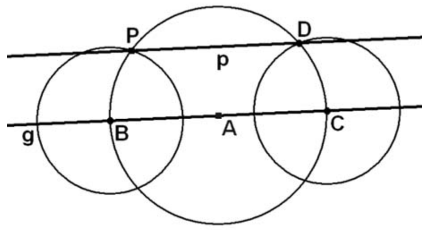
- oft ausgeführte Verbindungen mehrerer Grundkonstruktionen
- Begriff nicht eindeutig definiert

Beispiele für Standardkonstruktionen mit Zirkel und Lineal:

- Strecke übertragen,
- Winkel übertragen,
- Mittelpunkt einer Strecke konstruieren,
- Winkel halbieren,
- Lot auf eine Gerade durch einen Punkt konstruieren,
- Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt konstruieren.



Standardkonstruktion: Lot



Standardkonstruktion: Parallele

Bei der Verwendung anderer Konstruktionswerkzeuge, z. B. des Geodreiecks können *Standardkonstruktionen zu Grundkonstruktionen* werden.

Während sich Grundkonstruktionen durch die „Einschrittregel“ festlegen lassen, ist der Begriffsumfang von Standardkonstruktionen nicht eindeutig festzulegen. Er lässt sich nur pragmatisch durch die Häufigkeit, Bedeutung und Komplexität einer Konstruktion eingrenzen.
→ Standardkonstruktionen als *„Module“*

3.8 Modulares Arbeiten

Werden *mehrere einzelne Konstruktionsschritte* zu einer Einheit zusammengefasst und als Ganzes betrachtet, so spricht man von einem *Baustein* oder *Modul* (in DGS: „Werkzeug“, „Makro“).

Beispiel:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit einer Hypotenuse c von 8 cm Länge und einer Höhe h von 3 cm.

Konstruktionsbeschreibung mithilfe der Module „Parallele im Abstand d“ und „Thaleskreis“:

- Zeichne Strecke $\overline{AB}$ mit 8 cm Länge;
- Zeichne Parallele p zur Strecke $\overline{AB}$ mit Abstand 3 cm;

- Ein Schnittpunkt des Thaleskreises über der Strecke $\overline{AB}$ mit p ist der gesuchte Punkt C des Dreiecks ΔABC.

Module:

- Konstruktionen (Operationen, Funktionen, Prozeduren) die eine *Ausgangskonfiguration in einem Schritt in eine Zielkonfiguration* überführen;
- *mentale Grundkonstruktionen*;
- *sprachliche Zusammenfassungen* in (Konstruktionsbeschreibgn.)

$\rightarrow$ Das Operieren mit Modulen ist auch ein *Operieren auf der begrifflichen Ebene*.

- *Grundkonstruktionen für das Werkzeug*, das ihre Realisierung erlaubt (Geodreieck, Reißbrett, Computer).
- „Modulares Konstruieren“: bereits durchgeführte Konstruktionen *werden als Bausteine in anderen Konstruktionen weiter verwendet*.
- Bereits EUKLID verwendete in den „Elementen“ Module: führte z. B. die Halbierung einer Strecke auf „Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks“ und „Konstruktion der Winkelhalbierenden“ zurück.
- Modulares Arbeiten: *heuristische Strategie*

Aufgaben für die Übung

1. Geben Sie Konstruktionsvorschriften für die Standardkonstruktionen *„Lot auf eine Gerade durch einen Punkt“* und *„Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt“* an.

2. Dreieckskonstruktion „sss“:
   Gegeben sind drei Strecken a, b und c. Konstruiere ein Dreieck DEF, dessen Seiten zu a, b und c kongruent (gleich lang) sind.

   - Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift an. Sind Fälle zu unterscheiden?
   - Argumentieren Sie zur Durchführbarkeit und zur Richtigkeit der von Ihnen angegebenen Konstruktion. Welche Konsequenzen ergeben sich aus den unterschiedenen Fällen?
   - Wie lässt sich die Aufgabe schülergerechter stellen und erreichen, dass die Schüler mit der Fallunterscheidung konfrontiert werden?

3. Konstruktionsmodul *„Quadrat über einer Strecke“*

   - Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift an, bei der über einer gegebenen Strecke ein Quadrat errichtet wird.
   - Was ist hierbei zur Eindeutigkeit der Konstruktion zu sagen?

4 Problemlösen

4.1 Öffnung von anspruchsvollen innermathematischen Problemen: Offene Aufgaben

4.1.1 Schwierigkeiten beim Problemlösen im Mathematikunterricht

Schülerinnen und Schülern bereitet das Lösen von Aufgaben, für die sie kein Routineverfahren kennen, Schwierigkeiten.

$\Rightarrow$ Einige (u. U. viele) Schüler finden keinen Ansatz, fühlen sich überfordert.
$\Rightarrow$ Aufgrund fehlender Strategien wissen diese Schüler dann nicht, was sie tun sollen/können.
$\Rightarrow$ Dadurch bedingter „Leerlauf“ führt häufig zu Disziplinproblemen.

Barrieren beim Problemlösen

- *Objektive Barrieren:* Die zum Lösen notwendigen mathematischen Inhalte sind dem Bearbeiter nicht bekannt.
- *Subjektive Barrieren:* Der Bearbeiter weiß nicht, welche seiner Kenntnisse er auf welche Weise zur Lösung einsetzen soll.

Beseitigung aller Barrieren $\Rightarrow$ Verwandeln des Problems in eine Routineaufgabe.
Zu hohe Barrieren $\Rightarrow$ Viele Schüler finden keine Möglichkeit, die Barrieren zu überwinden.

- Barrieren nicht beseitigen aber „niedriger legen“; für (fast) alle Schüler überwindbare Barrieren an den Anfang stellen.

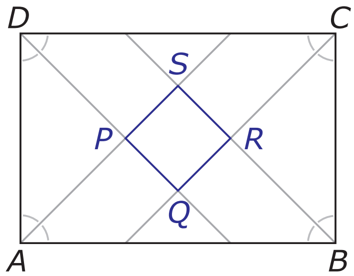
$\Rightarrow$ Das Überwinden von Barrieren lernen.

- Differenzierte Ziele mit unterschiedlich hohen Barrieren setzen.
- Unterschiedliche Wege zur Problemlösung ermöglichen.

4.1.2 Beispiel – Öffnung einer anspruchsvollen geometrische Aufgabe

In einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 4$ cm sind die vier Winkelhalbierenden mit den Schnittpunkten P, Q, R und S eingezeichnet.

a) Zeige, dass $PQRS$ ein Quadrat ist.
b) Berechne den Flächeninhalt dieses Quadrates.



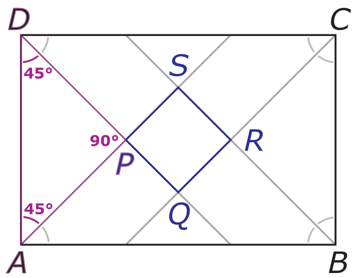
- Anfangszustand und Zielzustand sind bei dieser Aufgabe klar festgelegt; die möglichen Lösungsschritte („Transformation“) sind unklar; es steht dafür keine Routine zur Verfügung.

$\Rightarrow$ Es handelt sich um ein Problem.

- Für den Beweis, dass $ABCD$ ein Quadrat ist, bestehen mehrere (sehr unterschiedliche) Möglichkeiten.

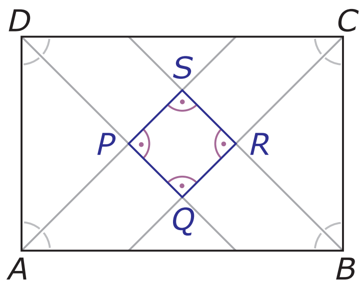
Beweis, dass $PQRS$ ein Quadrat ist (eine Möglichkeit):

- Durch die Winkelhalbierenden entstehen Winkel mit einem Maß von 45°.
- Anwendung des Innenwinkelsatzes für das Dreieck ΔAPD: Winkel bei P muss ein rechter Winkel sein: $180° - 45° - 45°$.
- Nach dem Scheitelwinkelsatz ist $\angle(QPS)$ ein rechter Winkel.



- Analoge Betrachtungen in den Dreiecken ΔASB, ΔBRC und ΔCQD $\Rightarrow$ Alle Winkel im Viereck $PQRS$ sind rechte Winkel.
- $PQRS$ ist ein Rechteck.

  Um zu diesem Zwischenergebnis zu gelangen, gibt es auch andere Wege ähnlichen Schwierigkeitsgrades. Zum Beispiel ergibt sich die Parallelität gegenüberliegender Seiten aus der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes; also ist $PQRS$ ein Parallelogramm, für das dann noch gezeigt wird, dass *ein* Innenwinkel ein rechter Winkel ist.



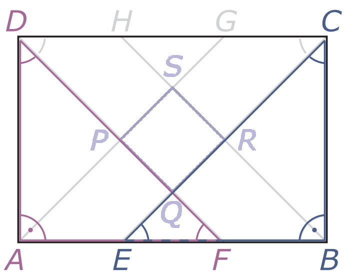
Für den Nachweis, dass $PQRS$ ein Quadrat ist, genügt es nun, zu zeigen, dass zwei benachbarte Seiten des Rechtecks $PQRS$ gleich lang sind.

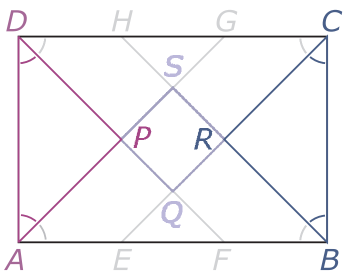
- Die Dreicke ΔAFD und ΔBEC sind kongruent zueinander (gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, die in einer Kathete übereinstimmen).

$\Rightarrow$ $\overline{DF} = \overline{CE}$

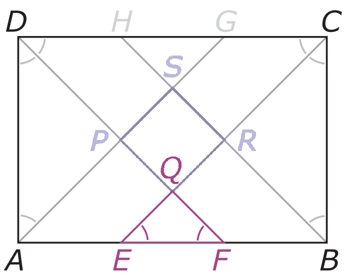
$\Rightarrow$ $\Delta APD \equiv \Delta BRC$ (nach dem Kongruenzsatz „wsw")

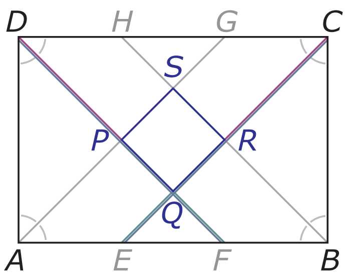
$\Rightarrow$ $\overline{DP} = \overline{CR}$





- Das Dreieck ΔEFQ ist gleichschenklig (wegen kongruenter Winkel bei E und F) $\Rightarrow$ $\overline{EQ} = \overline{FQ}$





- Wegen $\overline{DF} = \overline{CE}$, $\overline{DP} = \overline{CR}$ und $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ gilt $\overline{CE} - \overline{CR} - \overline{EQ} = \overline{DF} - \overline{DP} - \overline{FQ}$

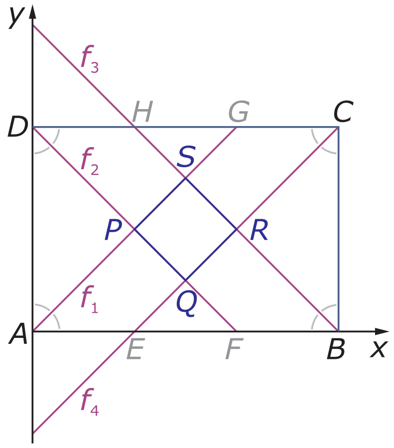
$\Rightarrow$ $\overline{PQ} = \overline{RQ}$

- Damit ist das Rechteck $PQRS$ ein Quadrat.

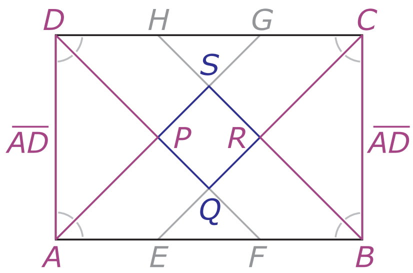
Die Reihenfolge der Schritte und die Auswahl der Teildreiecke sind nicht zwingend, es existieren hierfür zahlreiche Varianten. Bereits hierdurch ist eine gewisse (allerdings sehr eingeschränkte) Offenheit der Aufgabe gegeben.

Gänzlich **andere Herangehensweise** an den Nachweis, dass $PQRS$ ein Quadrat ist:

- Betrachtung der Winkelhalbierenden als **Graphen linearer Funktionen** und Verwendung des Satzes des Pythagoras.

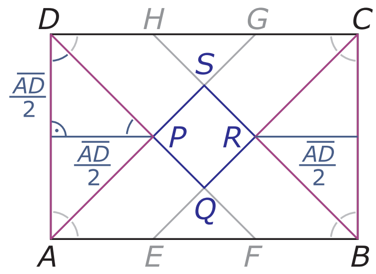


Berechnung des Flächeninhalts



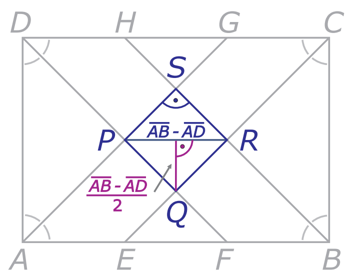
- Betrachtung der Dreiecke ΔAPD und ΔCRB.
- Beide Dreiecke sind gleichschenklig rechtwinklig.
- Die Basen der Dreiecke ΔAPD und ΔCRB haben jeweils die Länge $\overline{AD}$.
- Die entsprechenden Höhen sind jeweils halb so lang wie die Basen.

  (Wegen der Winkelmaße von jeweils 45° sind auch die durch die Höhen erzeugten Teildreiecke gleichschenklig.)



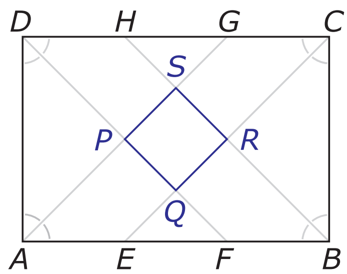
- Die Diagonale $\overline{PR}$ des Quadrates $PQRS$ hat somit die Länge $\overline{PR} = \overline{AB} - 2 \cdot \dfrac{\overline{AD}}{2} = \overline{AB} - \overline{AD}$.

  (Für die gegebenen Zahlen ist $\overline{PR} = 2$ cm.)



- Berechnung der Seitenlänge des Quadrates (Satz des Pythagoras).

  Oder:
- Berechnung des Flächeninhaltes der beiden Teildreiecke (aus Grundseite und Höhe).



Andere Möglichkeit für die Berechnung des Flächeninhalts:
Berechnung der Flächeninhalte geeignet auszuwählender Teilfiguren, die das Quadrat umgeben und Subtraktion dieser Flächeninhalte von dem des gegebenen Rechtecks (mehrere Möglichkeiten).

Zwischenresümee:

- Die Aufgabe verfügt über einen gewissen Grad an „Offenheit"; eine „Lösungsroutine" ist nicht abrufbar.
- Verschiedene Wege (unter Einsatz unterschiedlicher mathematischer Mittel) führen zum Ziel.
- Um den Beweis zu führen, müssen Informationen über Strecken und Winkel, die weder in der Ausgangs- noch in der zu untersuchenden Figur vorkommen, gefunden und verarbeitet werden.
- Die Schüler müssen entscheiden, mit welchen Informationen sie bei ihrer Lösung beginnen und welche Figuren sie betrachten.
- In Sackgassen zu gehen und dann andere Wege zu probieren, ist beim Lösen von Problemen selbstverständlich. Recht schnell erfolgreiche Wege zu finden, erfordert Erfahrung.
- Der Nachweis, dass es sich bei $PQRS$ um ein Rechteck handelt, ist wesentlich leichter zu führen, als der Nachweis, dass dieses Rechteck ein Quadrat ist.

  Aber: Durch die Formulierung der Aufgabe wird die Lösung nur eines Teilproblems gewissermaßen zum Misserfolg erklärt.

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe

Eine erste sinnvolle Neuformulierung der Aufgabe wäre:

a) *Was für ein Viereck ist PQRS? Begründe Deine Antwort.*

statt

a) Zeige, dass $PQRS$ ein Quadrat ist.

⇒ Erkenntnis***findung*** rückt in den Mittelpunkt gegenüber reiner Erkenntnis***sicherung*** in der ursprünglichen Formulierung.

- Vielfältige unterschiedliche Herangehensweisen sind möglich:
  - Theoretische Überlegungen zu Teilfiguren,
  - Anfertigung einer exakten Zeichnung,
  - Experimente (z. B. mit Papier oder Software).
- Die Chancen für ein erstes Erfolgserlebnis wachsen enorm.
- Aktivitäten erleichtern geistiges Eindringen in die Problemstellung.
- Es ergeben sich Möglichkeiten der inneren Differenzierung, indem Schüler unterschiedlich abstrakte Zugänge wählen.

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe (2)

Eine Umformulierung der Aufgabe, welche das Finden einer ***Beweisidee*** erleichtert:

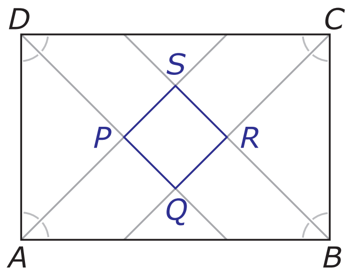
a) *Gib von möglichst vielen Winkeln in der entstandenen Figur die Größe an.*

Auch diese Aufgabe kann natürlich durch Messungen gelöst werden; das Herausfinden einiger der Winkelgrößen ist jedoch auch mittels theoretischer Überlegungen relativ leicht zu bewältigen.

⇒ Ein erster Schritt zur Lösung der ursprünglichen Aufgabe wird durch die Ermittlung der Winkelgrößen getan.

⇒ Das Arbeitsergebnis führt zu Impulsen für weitere Überlegungen.

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe (3)



Ein offener Zielzustand wird auch durch folgende Frage erreicht:

b) *Welche Arten von Vielecken erkennst du in der Figur?*

⇒ Die Chancen, richtige Teilergebnisse zu erreichen, sind sehr hoch (eine vollständige Lösung muss nicht angestrebt werden).

- Die Figur „in der Mitte“ kann daraufhin in den Mittelpunkt des Interesses gerückt werden.

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe (4)

Um die Hürde für die Berechnung des Flächeninhaltes nicht zu hoch zu legen, könnte der entsprechende Aufgabenteil erweitert werden:

- *Berechne von möglichst vielen Teilfiguren den Flächeninhalt.*

statt

- *Berechne den Flächeninhalt des Quadrates PQRS.*

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe – Zusammenfassung

Vergleichen Sie die ursprüngliche Formulierung der Aufgabe (siehe S. 20) mit der folgenden „offeneren“ Fassung:

a) *Zeichne in ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen* $\overline{AB} = 6$ *cm und* $\overline{AD} = 4$ *cm die vier Winkelhalbierenden ein.*

b) *Gib von möglichst vielen Winkeln in der entstandenen Figur die Größe an.*

c) *Welche Arten von Vielecken erkennst Du in der Figur?*

d) *Berechne von möglichst vielen Teilfiguren den Flächeninhalt.*

Um die Fragen der ursprünglichen Formulierung zu behandeln, muss der Unterrichtsverlauf u. U. von Lehrerseite entsprechend gelenkt werden.

Weitere Möglichkeit: Verzicht auf die Angabe von Maßen.

„Noch offenere“ Formulierung:

> *Zeichne in ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{AD} = 4$ cm die vier Winkelhalbierenden ein.*
>
> *Setze Dich mit den entstehenden Figuren, ihren Winkeln und Flächeninhalten auseinander.*

Diese Formulierung setzt allerdings voraus, dass die Schüler im Umgang mit offenen Aufgaben geübt sind. („Open ended problem“ nach BECKER, SHIMADA)

4.1.3 Zusammenfassung: Ziele bei der „Öffnung“ von Aufgaben

- Aufgaben sollten möglichst allen Schülern *Erfolgserlebnisse* ermöglichen.

⇒ Erfolge beim Lösen (auch Teilergebnisse) ermutigen und motivieren zur weiteren Beschäftigung.

- Sie sollten Lösungswege besitzen, die anspruchsvolle *Problemlöseprozesse* beinhalten:
  - ⇒ Leistungsstarke Schüler fordern,
  - ⇒ Strategien des Problemlösens entwickeln.
- Sie sollten *unterschiedliche Herangehensweisen* zulassen:
  - allgemeine, theoretische Überlegungen,
  - Arbeit mit konkreten Beispielen (exakte Zeichnungen, Rechnen mit konkreten Zahlen),
  - experimentelle und heuristische Herangehensweisen.
- *Handlungsorientierte Zugänge* ermöglichen:

  „Damit kann ich erst einmal *anfangen*, das kann ich.“

4.2 Einige Arten geometrischer Probleme

Beweisproblem: stößt die Suche nach einem Beweis an.
Beispiele: siehe Kapitel 2 der Vorlesung

***Konstruktionsproblem*:** ein Objekt (Punkt, Strecke, Winkel, Figur, …) soll konstruiert werden.
Beispiele: siehe Kapitel 3 der Vorlesung

Berechnungsproblem: zielt auf die rechnerische Ermittlung einer unbekannten Größe; erfordert mehr als nur das Einsetzen gegebener Größen in Formeln.
Beispiele: siehe Übung, Raumdiagonalen im Quader, ...

Modellierungsproblem: Lösung besteht in einem mathematischen Modell für ein außermathematisches Problem.

Anzahlproblem: „Wie viele … gibt es?“

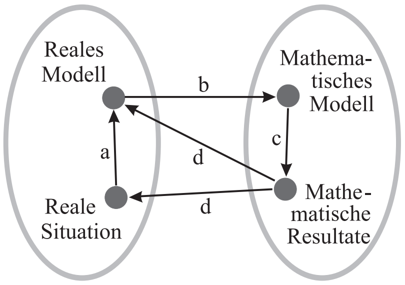
Optimierungsproblem*:** eine Größe soll optimiert werden; Spezialfall: ***Extremwertprobleme, bei denen es gilt, eine Größe zu maximieren oder zu minimieren.

Beispiel für ein ***Modellierungsproblem***

- Wie groß sind die Oberfläche und das Volumen eines Menschen?

Einschub: Modellierungskreislauf (*Mathematische Modellierung / Modellbildung*)

- Anwendungssituationen geeignet „reduzieren“ / abstrahieren, sodass mit zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln (Werkzeugen) eine Beschreibung / Bearbeitung möglich ist.
- Lösung des Problems in dem (vereinfachten) Modell.
- Rückübertragung auf die reale Situation, Validierung der Lösung.



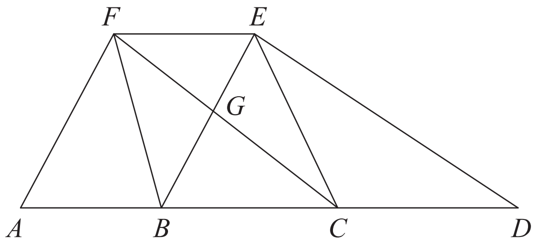
Modellierungskreislauf
a – Idealisierung/ Strukturierung
b – Mathematisierung
c – Modelluntersuchung (innermath. Arbeiten)
d – Rückinterpretation

Näher wird auf Fragen der mathematischen Modellierung in der Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik“ eingegangen.

Beispiel für ein ***Anzahlproblem***

- In der Zeichnung sind die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{FE}$ parallel sowie die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{FE}$ alle gleich lang.

  Finde möglichst viele Paare geometrischer Figuren, die den gleichen Flächeninhalt besitzen.



  Z. B.: Das Dreieck ΔBDE und das Parallelogramm $BCEF$ haben den gleichen Flächeninhalt.

Beispiel für ein ***Optimierungsproblem***

- Drei (vier, fünf, ...) Tennisbälle sollen verpackt werden. Finde eine optimale Form für die Verpackung.

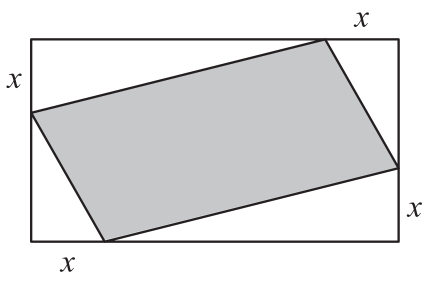
  Es bleibt hier offen, welche Lösung als optimal anzusehen ist – es kann sogar ein Teil des Problems sein, hierfür Kriterien zu entwickeln.

Beispiel für ein ***Extremwertproblem***

- Auf den Seiten eines Rechtecks wird eine Strecke der Länge x jeweils ausgehend von den Eckpunkten entsprechend dem Umlaufsinn abgetragen.

  Die vier freien Endpunkte werden miteinander verbunden.

  Für welche Länge x wird der Flächeninhalt des Parallelogramms minimal?



4.3 Schritte im Problemlöseprozess; Fragen (nach Polya)

GEORGE POLYA: *Schule des Denkens*, Tübingen: Francke, 1949 (innerer Buchumschlag).

1. Verstehen der Aufgabe

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

Beispiel (Polya):
Bestimme die Längen der Raumdiagonalen eines Quaders, dessen Seitenlängen bekannt sind.

2. Ausdenken eines Planes

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die ... eine ähnliche Unbekannte hat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen?* Würdest Du irgend ein *Hilfselement* einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst du dir Aufgabe anders ausdrücken? ... Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, *zuerst eine verwandte Aufgabe* zu *lösen*.
  - Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken?
  - Eine allgemeinere Aufgabe? Eine spezielle Aufgabe? Eine analoge Aufgabe?
  - Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? ...

  Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

3. Ausführen des Planes

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist?

4. Rückschau

- Kannst du das *Resultat kontrollieren*? Kannst du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weisen ableiten?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Beispiel: Stufen (nach POLYA) bei einem Extremwertproblem

Ordnen Sie den Stufen von Problemlöseprozessen (nach POLYA) geeignete *Fragen, Lösungswege, Variationen* dem auf S. 25 genannten Extremwertproblem zu. (Lösen Sie dazu zunächst die Aufgabe und denken Sie dabei schon über mögliche Variationen, vor allem Vereinfachungen, nach.)

4.4 Allgemeine heuristische Strategien

- ***Inhaltliches oder konkret-experimentelles Lösen von Problemen***

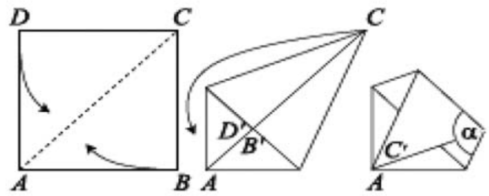
  Berechnungsprobleme lassen sich oft mit Hilfe einer Tabelle oder Zeichnung durch das Messen der gesuchten Größen lösen. Auch wenn diese erste Lösung oft nur eine Näherung darstellt, kann sie zumindest Aufschluss über die Größenordnung geben oder bei offenen Problemen helfen, eine Vermutung zu generieren.

Beispiel: Bearbeitung der folgenden Aufgabe durch Realschüler, Kl. 7, 8

Ein quadratisches Papier wird wie auf der Abbildung zu einem Fünfeck gefaltet:

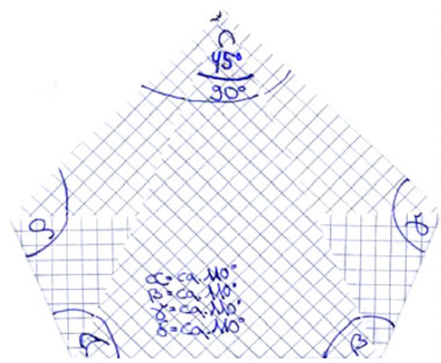
1. Die Seiten BC und CD werden auf die Diagonale AC gefaltet.
2. C wird auf A gefaltet.

Ermittle den Winkel α ohne Hilfe des Geodreiecks.
Findest du noch möglichst viele andere Winkel ohne Messung?



Winkel α: 112°
Erklärung: Wir haben es nachgefaltet und dann gemessen. Aber wir haben das Nachgefaltete auf ein Blatt geklebt und den Winkel verlängert.

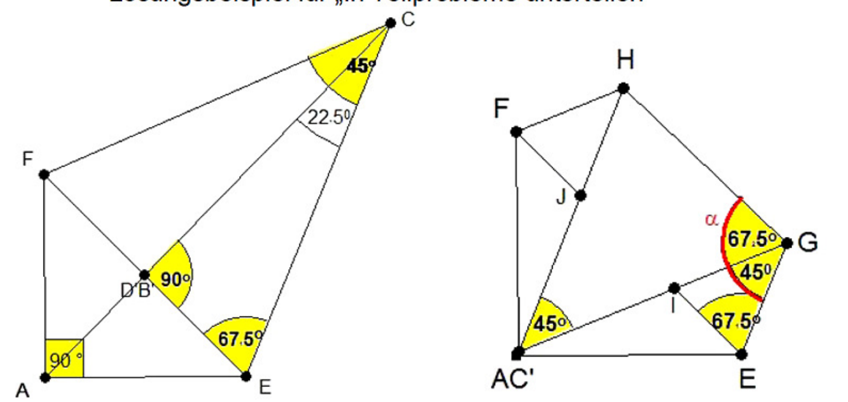
Ein Lösungsbeispiel für „Messen"



Wir haben das Papier genauso gefaltet
Seite A = 90°
α = ca. 110° (geschätzt)
Wir wollten die Winkelsumme −90° und durch 4 teilen. Aber wir wussten nicht wie die Summe.
Wir haben versucht mit Summe = 360°
Aber das ist falsch! Kommt nur 67,5° raus.
Wir haben dann Summe um 180° erhöht.
540° − 90° = 450° : 4 = 112,5° Das ist das richtige Ergebnis!

1) α = 67,5°
γ = 45°
β = 67,5°
α = 67,5° + 45° = 112,5°
Wir haben die Winkel nacheinander berechnet.

Lösungsbeispiel für „In Teilprobleme unterteilen"



- ***Nutzung von Darstellungen und Darstellungswechsel***

  Dass das Anfertigen einer Skizze bei einem geometrischen Problem weiterhelfen kann, ist unmittelbar einsichtig.

  Hilfreich können auch der Übergang von einem Schrägbild zu einer Schnittzeichnung oder das Einzeichnen von Hilfsebenen und Teilfiguren sein.

  Mitunter lassen sich ursprünglich geometrische Probleme durch eine Algebraisierung lösen: Speziell bei Extremwertproblemen werden dann Maxima oder Minima von Funktionen bestimmt.

- ***Vorwärtsarbeiten***

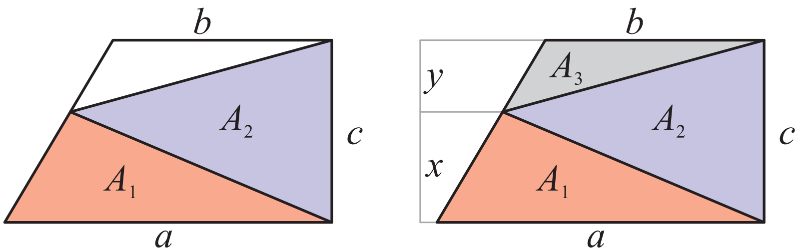
  Ausgehend von den gegebenen Größen geht man Schritt für Schritt weiter zu den gesuchten. Die Leitfragen lauten: Was weiß man schon über das Gegebene? Was kann man damit erreichen?

- ***Rückwärtsarbeiten***

  Beim Rückwärtsarbeiten beginnt der Lösungsweg bei der gesuchten Größe; von dieser ausgehend arbeitet man rückwärts bis hin zu den gegebenen Größen. Die Leitfragen lauten: Was weiß man schon über das Gesuchte? Was benötigt man, um das Gesuchte zu erreichen? In der Praxis ist oft auch eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten erfolgreich.

Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten an einem Beispiel

In der abgebildeten Figur sind folgende Größen bekannt:
$a = 9\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$,
$A_1 = 13,5\,\text{cm}^2$.
Gesucht ist der Flächeninhalt A_2.



- Welche Größen in der Figur könnten für die Lösung noch von Bedeutung sein?

→ Einzeichnen weiterer Größen in die Figur (siehe die Abb. rechts).

Lösung durch Vorwärtsarbeiten

- Beginnen mit den gegebenen Größen a, b und c;
- Flächeninhalt A des Trapezes (Gesamtfigur) berechnen;
- x aus A_1 und a berechnen
  $\rightarrow y \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$

$$A = \frac{1}{2}(a+b)\cdot c \qquad x = \frac{2A_1}{a}$$
$$y = c - x$$
$$A_3 = \frac{1}{2}by$$
$$A_2 = A - A_1 - A_3$$

Lösung durch Rückwärtsarbeiten

- Der gesuchte Flächeninhalt A_2 bildet den Ausgangspunkt;
- der Lösungsweg wird „rückwärts“ hin zu den gegebenen Größen entwickelt.

$$A_2 = A - A_1 - A_3$$
$$A_3 = \frac{1}{2}by$$
$$y = c - x$$
$$A = \frac{1}{2}(a+b)\cdot c \qquad x = \frac{2A_1}{a}$$

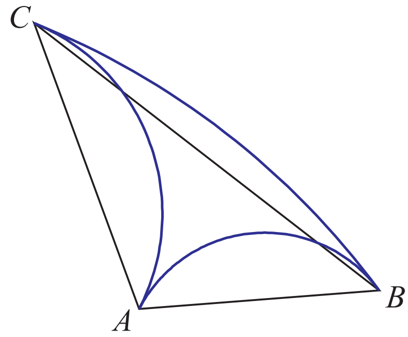
Anspruchsvolles Beispiel für Rückwärtsarbeiten: *Dreibogeneck*

- Drei Kreisbögen bilden ein Dreibogeneck ABC, wenn sie auf Kreisen liegen, die sich in den Punkten A, B bzw. C berühren.

  Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, die in der Zeichenebene liegen und deren Mittelpunktswinkel kleiner als 180° sind.

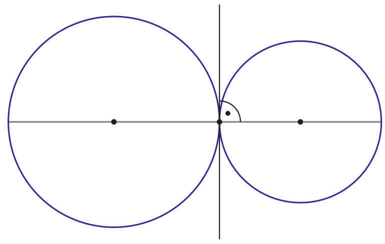
  Gegeben sind die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist. Konstruiere das zugehörige Dreibogeneck ABC.

  (Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg, 2006)



Mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware und unter Herausarbeitung einer Bedingung für eine gemeinsame Tangente an zwei Kreise (siehe die Abb. rechts) kann eine Lösung konstruiert werden, bei der aber noch ein Punkt „an die richtige Stelle gezogen“ werden muss

$\rightarrow$ immerhin eine „halbe“ Lösung.



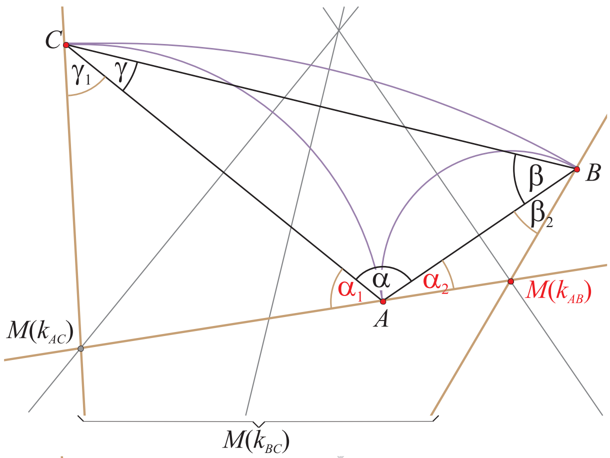
Die so schon erhaltene Lösung erleichtert den Schritt zu einer exakten Konstruktion.

Die Kenntnis von α_1 / α_2 würde zu einer eindeutigen Konstruktion führen.

Gleichsch. Dreiecke $ACM(k_{AC})$, $ABM(k_{AB})$

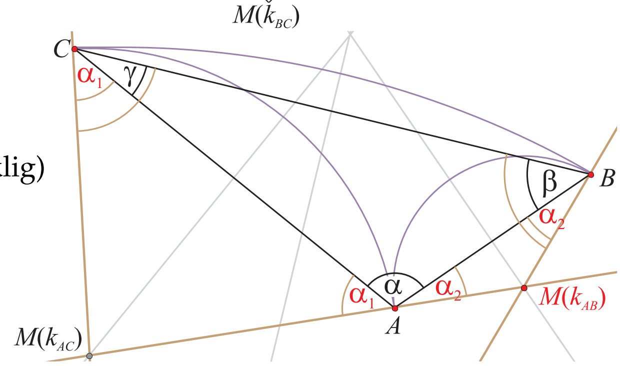
$\Rightarrow\ \alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 180^\circ \\ \alpha+\alpha_1+\alpha_2 &= 180^\circ \\ \Rightarrow \qquad \beta+\gamma &= \alpha_1+\alpha_2 \quad (1) \end{aligned}$$



Außerdem:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\gamma &= \alpha_2+\beta && (\Delta BCM(k_{BC}) \text{ ist gleichschenklig}) \\ \gamma-\beta &= \alpha_2-\alpha_1 && (2) \\ 2\gamma &= 2\alpha_2 && (\text{wegen } (1) \text{ und } (2)) \\ \gamma &= \alpha_2 \end{aligned}$$



Alternative Lösung (nach der Konstruktion der drei Mittelsenkrechten und dem Zeichnen „einigermaßen passender“ Kreise):

- Zeichne den Umkreis des Dreiecks ΔABC.
- Welchen Zusammenhang erkennst du zwischen dem Umkreis und deinen ungefähr „passenden“ Kreisen des Dreibogenecks?
- Versuche nun, das Dreibogeneck exakt zu konstruieren.
- Begründe, dass deine Konstruktion die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Weitere allgemeine heuristische Strategien

- ***Analogisieren***

  Das Herstellen von Analogien – insbesondere zu bereits bekannten Problemen – kann oft hilfreich sein.

  $\rightarrow$ Siehe auch die „POLYA-Fragen".

  Häufig herangezogen werden u. a. Analogien zwischen ebener Geometrie und Raumgeometrie: So lassen sich typische Prinzipien der Flächeninhaltsbestimmung (wie die Zerlegungs- oder Ergänzungsgleichheit) auf die Volumenbestimmung übertragen.

- ***Invarianzprinzip***

  Es geht darum, die Invarianten (die unveränderlichen Größen) eines Problems zu erkennen. Dies ist nicht immer leicht, da sich die Aufmerksamkeit natürlicherweise zunächst stärker auf die Unterschiede oder auf veränderliche Größen richtet.

  (vgl. Beispiel „Rutschende Leiter")

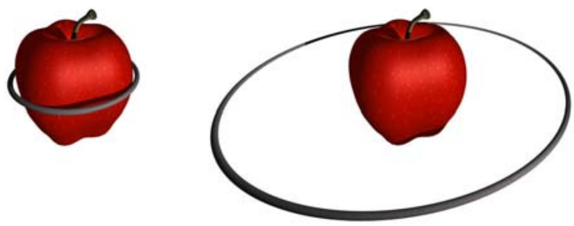
- ***Spezialisieren***

  Zunächst wird ein Spezialfall des gestellten Problems bearbeitet. In einem weiteren Schritt wird dann auf die Lösung des ursprünglichen Problems geschlossen. Diese heuristische Strategie kann auch helfen, eine Lösungsidee zu gewinnen. In Spezialfällen lassen sich ferner besonders gut manche Beziehungen (etwa über Winkelmaße oder Streckenlängen) ablesen.

- ***Generalisieren***

  Es wird ein allgemeineres als das gestellte Problem gelöst, was in manchen Fällen einfacher ist und auch zu weiter reichenden Einsichten führen kann (vgl. Beispiel 11).

Beispiel für Generalisieren: *Seil um die Erdkugel*



Ein Seil wird um einen Apfel ($d \approx 6$ cm) gelegt, um einen Meter verlängert und so gestrafft, dass es wiederum einen Kreis bildet, der an jeder Stelle denselben Abstand zum Apfel besitzt.

Kann dann eine Maus unter dem Seil durchschlüpfen?

In gleicher Weise wird ein Seil entlang des Äquators um die Erdkugel ($d \approx 12.700$ km) gelegt, um einen Meter verlängert und so gestrafft, dass es wiederum einen Kreis bildet, der an jeder Stelle denselben Abstand zum Äquator besitzt. Kann dann eine Maus unter dem Seil durchschlüpfen?

- Das Problem lässt sich durch Nachrechnen mit den gegebenen Zahlen lösen.
- Es kann aber auch im Zuge einer *Generalisierung* unabhängig von den gegebenen Zahlen in allgemeiner Weise betrachtet werden:

  Bei einem Kreis mit Radius r und Umfang u wird der Umfang um Δu vergrößert. Wie groß ist Δr?

  $$\Delta r = (r + \Delta r) - r = \frac{u + \Delta u}{2\pi} - \frac{u}{2\pi} = \frac{(u + \Delta u) - u}{2\pi} = \frac{\Delta u}{2\pi}$$

  Eine Verlängerung des Seils um Δu bewirkt also stets denselben Abstand Δr, unabhängig davon, wie groß r ist.

Die Generalisierung schafft *Einsichten, die weit über die eigentliche Problemlösung hinaus reichen:*

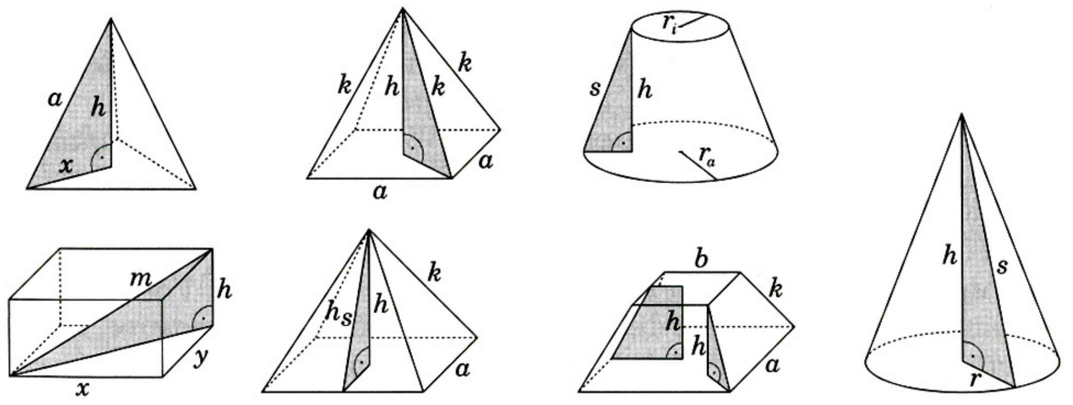
Wenn zwei Größen (hier: u und r) proportional sind, dann gilt dies auch für die entsprechenden Differenzen (hier: Δu und Δr).

4.5 Inhaltsspezifische heuristische Strategien

- Einzeichnen geeigneter *Hilfslinien*,
- Suchen *gleich langer Strecken* (gleichschenklige oder -seitige Dreiecke, Seiten eines Parallelogramms, Kreisradien, ...),
- Suchen *gleich großer oder einander ergänzender Winkel*,
- Suchen *rechtwinkliger Dreiecke bzw. Teildreiecke → Pythagoras*,
- Suchen nach *Symmetrien* oder auch *Ergänzung zu symmetri- schen Figuren*,
- Suchen *kongruenter Dreiecke*, um gleich lange Strecken bzw. gleich große Winkel zu bestimmen,
- Suchen *ähnlicher Dreiecke → Streckenverhältnisse* bestimmen,
- Suchen *paralleler Geraden → Winkelbeziehungen*; *Strahlensätze*,
- Suchen *inhaltsgleicher Drei- oder Vierecke*, um aus den Formeln für die Flächeninhalte unbekannte Größen zu errechnen,
- Suchen *ergänzungsgleicher oder zerlegungsgleicher Flächen*.

Bewusstmachen inhaltsspezifischer Strategien

Für Berechnungen an Körpern kann häufig der Satz des Pythagoras eingesetzt werden, wenn man geeignete rechtwinklige Dreiecke heranzieht. Diese inhaltsspezifische heuristische Strategie lässt durch eine entsprechende Zusammenstellung explizit und damit auch bewusst machen (nach BRUDER 2000, S. 15).



5 Begriffslernen und Begriffslehren

5.1 Bestandteile von Begriffsverständnis

Zum *Verstehen eines Begriffes* gehört weit mehr als die Kenntnis einer Definition.

- Vorstellungen über Merkmale oder Eigenschaften eines Begriffs und deren Beziehungen untereinander $\rightarrow$ Vorstellungen über den *Begriffsinhalt*
- Überblick über die Objekte, die unter einem Begriff zusammengefasst werden
  $\rightarrow$ Vorstellungen über den *Begriffsumfang*
- Beziehungen eines Begriffs zu anderen Begriffen $\rightarrow$ Vorstellungen über *Begriffsnetze*

5.2 Arten von Begriffen in der Geometrie

Objektbegriffe

- Punkt, Gerade, Strahl, Ebene
- Winkel
- Dreiecke, Vierecke, Vielecke
- spezielle Dreiecke
- Vierecksarten (Haus der Vierecke)
- Kreis
- Sehnenviereck
- Körper (Quader, Würfel, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel)

Relationsbegriffe

- liegt auf, gehört an (ist Element von)
- parallel, senkrecht
- gleich lang, gleich groß (Winkel)
  – Spezialfälle von Kongruenz
- ist Mittelpunkt von
- Nebenwinkel (Scheitel-, Stufen, Wechselwinkel) zueinander sein
- sind symmetrisch zueinander
- kongruent (deckungsgleich), ähnlich, flächengleich

Objektbegriffe, die durch Relationen zu anderen Objekten bestimmt sind

- Schnittpunkt, Schnittgerade
- Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende
- Umkreis
- Thaleskreis

Abbildungsbegriffe

- Drehung, Verschiebung, Spiegelung
- Kongruenzabbildung (Bewegung)
- zentrische Streckung
- Ähnlichkeitsabbildung

Zu den Abbildungen gehören weitere ***Begriffe, die Objekte bezeichnen, welche die Abbildungen kennzeichnen***, z. B.:

- Symmetrieachse
- Verschiebungspfeil, Drehzentrum, Drehwinkel
- Streckzentrum, Streckfaktor

Maßbegriffe

- Länge (genauer: Längenmaß)
- Winkelgröße, Winkelweite (genauer: Winkelmaß)
- Umfang
- Flächeninhalt
- Oberflächeninhalt
- Volumen

Maßbegriffe sind aus fachsystematischer Sicht *Abbildungsbegriffe* (eindeutige Zuordnungen reeller Zahlen zu Punktmengen); jedoch erfordert das Erkennen dieser Gemeinsamkeit ein Maß an Abstraktion, das bei Schülern i. Allg. noch nicht gegeben ist.

5.3 Mentale Modelle

Mentale Modelle sind interne Repräsentationen mathematischer Begriffe. Strukturen mentaler Modelle lassen sich nur aufgrund von Äußerungen und Handlungen des Einzelnen erschließen.

Die Begriffsbildung im Sinne der Konstruktion mentaler Modelle ist:

- *Abstraktionsprozess*

  An realen Gegenständen werden Eigenschaften ignoriert, um Vorstellungen über das geometrische Objekt aufzubauen.

  z. B. bei Begriffen von Körpern: Beschriftungen auf Verpackungen, Nahtstellen bei Dosen, Augenzahlen bei Spielwürfeln

- *Idealisierungsprozess*

  Eigenschaften werden in ein reales Objekt hineingesehen, die so in der Realität nicht vorhanden sind.

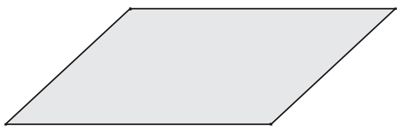
  z. B.: Vorstellungen über den Begriff „Gerade“ werden aus mit einem Lineal gezogenen Linien, Faltlinien, Zimmerkanten, ... entwickelt, indem von Dicke und räumlicher Begrenztheit abgesehen wird und Eigenschaften wie unbegrenzte Länge hineingesehen werden.

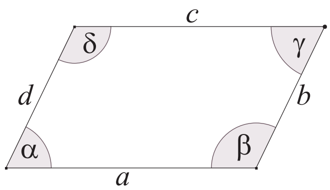
Mentale Modelle

- repräsentieren einen Begriff aufgrund bestimmter Eigenschaften und Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften
- können sprachliche, bildliche und handlungsbezogene Komponenten umfassen
- Vorstellungen beziehen sich auf einen besonders typischen oder auf typische Vertreter – sogenannte Prototypen
- können aber auch auf andere Vertreter des Begriffs übertragen werden

Mentale Modelle am Beispiel des Begriffs *Parallelogramm*

Prototypische Vorstellungen:





Kenntnisse, die den Begriff wesentlich konstituieren:

- parallele Gegenseiten,
- gleich lange Gegenseiten,
- gleich große Gegenwinkel.

Fähigkeiten, die mentale Modelle des Begriffs mit bestimmen:

- erzeugen – durch mentales Variieren von Seiten und Winkeln – von Sonderfällen wie Rechteck, Raute und Quadrat,
- erzeugen von Deckabbildungen durch Drehung um 180° an dem Schnittpunkt der Diagonalen,
- erzeugen einer Parkettierung der Ebene durch Aneinanderlegen.

5.4 Lernen geometrischer Begriffe

Lernen geometrischer Begriffe		
Aufbau angemessener Vorstellungen	*Erwerb von Kenntnissen*	*Aneignen von Fähigkeiten*
Handeln	Eigenschaften	Konstruieren
Wahrnehmen	Beziehungen zwischen Eigenschaften	Berechnen
Verbalisieren	Beziehungen zu anderen Begriffen	Problemlösen

5.4.1 Aufbau angemessener Vorstellungen

Vorstellungen entwickeln sich aus

- *Handlungen* an konkreten Objekten,
- *Wahrnehmungen* an Gegenständen und Bildern sowie aus
- *Beschreibungen* von geometrischen Objekten.

→ Wechselbeziehung

Handlungen

Für die Ausbildung von Vorstellungen ist es wichtig, dass (vorgestellte) Objekte *variiert* werden und dass mit ihnen *operiert* werden kann, d. h. dass Größen verändert oder Objekte als Ganzes transformiert werden.

PIAGET (1896-1970): Denken ist verinnerlichtes oder vorgestelltes Handeln.

- Handeln nicht als Selbstzweck, kein vordergründiges Tätigsein
- Handlungen sind zielgerichtet durchzuführen

Kennzeichnend für verinnerlichte Handlungen – „*Operationen*" – sind Flexibilität oder Beweglichkeit, d. h. sie sind

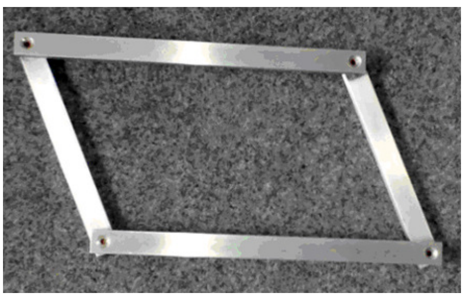
- umkehrbar (reversibel)
- zusammensetzbar (kompositionsfähig)
- assoziativ (Ziel auf verschiedene Weisen erreichbar)

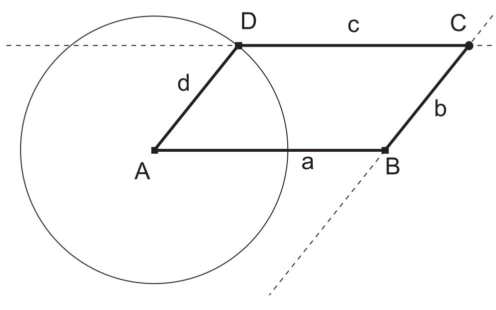
Bewusster Umgang mit Objekten: „Was passiert, wenn ..." → Grundlage des operativen Prinzips

Beispiel:

Operativer Umgang mit einem Gelenkparallelogramm und einer entsprechenden Computersimulation

Bei einer beweglichen Gelenkkonstruktion aus jeweils zwei gleich langen Stäben können die Winkel verändert werden.



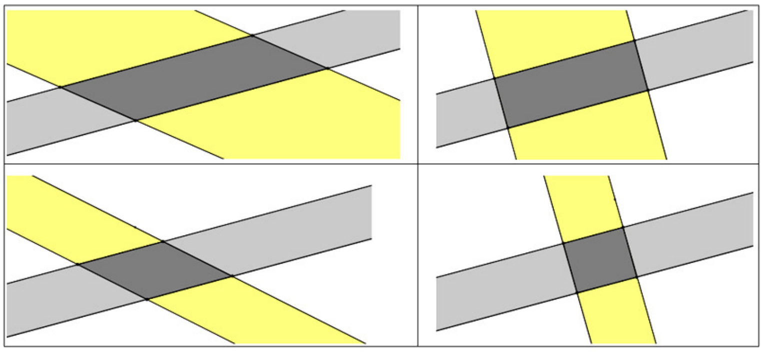


Leitfragen im Sinne des operativen Prinzips:

- Was bleibt gleich? (Parallelität der Gegenseiten, Gleichheit der Gegenwinkel, Winkelsumme benachbarter Innenwinkel)
- Was verändert sich? (Form, Abstand der parallelen Seiten, Flächeninhalt des Parallelogramms)

Beispiel: *Phänomen der Überlappung von Parallelstreifen als Ausgangspunkt zur Begriffsentwicklung Parallelogramm* [5]

Schneide aus farbigem Transparentpapier Parallelstreifen aus und lege zwei Streifen übereinander. Verwende verschieden dicke, aber auch gleich dicke Streifen. Beschreibe die entstehenden Vierecke.



Folgende *Leitfragen* können die Begriffsbildung unterstützen:

- Welche Seiteneigenschaften besitzt die Figur? Wie kannst du diese Eigenschaften begründen?
- Welche Auswirkungen hat die Breite der beiden Streifen?
- Welche Auswirkungen hat der Winkel, den beide Streifen einschließen?
- Welche Figur erhältst du, wenn die beiden Streifen senkrecht zueinander sind?

Raute, Rechteck und Quadrat sollen als spezielle Parallelogramme erkannt werden, die jedoch zusätzliche Eigenschaften aufweisen.

Schülerinnen und Schüler müssen Handlungen nicht unbedingt selbst durchführen. Die Entwicklung von Vorstellungen kann auch auf beobachteten oder vorgestellten Handlungen beruhen.

Zentral für die Begriffsentwicklung sind:

- *Aufmerksamkeitsfokussierung* auf jeweils bestimmte Beziehungen oder Abhängigkeiten,
- *Reflektieren* der eigenen Tätigkeit,
- *Verbalisierung* der durchgeführten Handlungen.

Wahrnehmungen

Durch Betrachten entwickeln Schüler ganzheitliche Vorstellungen von Figuren und Körpern, d. h. nicht von speziellen Eigenschaften.

Wichtig:

- Figuren an ihrer Form unabhängig von der Lage erkennen
- Seiten-, Winkel- oder Symmetrieeigenschaften erkennen

Parallelogramme in der Umwelt: hauptsächlich Rauten, Rechtecke und Quadrate → müssen bewusst in ein Begriffsnetz eingeordnet werden.

[5] Einführung des Begriffs Parallelogramm in dem Schulbuch GRIESEL: Elemente der Mathematik 1 (5. Klasse)

- Vielfach *dominieren* bei den Begriffsvorstellungen die *Unterschiede* zwischen Figuren (etwa Quadrat und Rechteck) gegenüber den Gemeinsamkeiten.
- Dies kann insbesondere bei den Vierecken zu einer *partitionalen Klassifizierung* führen: Innerhalb einer Klasse von Vierecken er- scheinen die verschiedenen *Unterklassen als zueinander disjunkt*.
- Z. B.: Rechteck wird nicht als Parallelogramm und ein Quadrat nicht als Rechteck erkannt.
- Besonders wichtig daher: „*Haus der Vierecke*"

Übung: *Haus der Vierecke*

Betrachten Sie folgende Arten von Vierecken:

– beliebige Vierecke	– Drachenvierecke	– Rauten (Rhomben)	– Quadrate
– Trapeze	– Parallelogramme	– Rechtecke	

- Stellen Sie diese Vierecke in einer Art Baumdiagramm dar (oben bzw. unten befinden sich die speziellste und die allgemeinste Kategorie von Vierecken).
- Stellen Sie alle zwischen diesen Klassen von Vierecken bestehenden Teilmengenbeziehungen durch Pfeile dar.
- Geben Sie drei verschiedene Definitionen des Begriffs „Raute" durch die Wahl verschiedener Oberbegriffe an.

Verbalisierungen

Vorstellungen werden u. a. durch Erläuterungen aufgebaut – häufig mit optischen Darstellungen und Handlungen verbunden. Schülerinnen und Schüler sollen aber auch lernen, Vorstellungen über Objekte durch rein verbal formulierte Problemstellungen aufzubauen. Hierzu eignen sich u. a. *Übungen zur Kopfgeometrie*.

Stellt euch ein Parallelogramm vor. Denkt die Diagonalen eingezeichnet.

- Wie viele Teildreiecke seht ihr?
- Stellt euch eine Parallele zu einem Seitenpaar durch den Mittelpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) vor. Wie viele Teildreiecke sind es jetzt?

- Verbalisierungen gehen mit Vorstellungen oder gedanklichen (mentalen) Bildern einher.
- Üblicherweise prägt ein typischer Vertreter – *Prototyp* – die Vorstellungen über eine gesamte Begriffsklasse.
- *Wechselbeziehung* der drei Aktivitäten *Handeln*, *Wahrnehmen* und *Beschreiben* im Unterrichtsprozess

5.4.2 Erwerb von Kenntnissen

Geometrische Begriffe haben bestimmte Eigenschaften, die sie charakterisieren. Zum Verstehen eines Begriffs gehören Kenntnisse

- über Eigenschaften,
- über die Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften und
- über die Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen.

Eigenschaften des Parallelogramms

1. Gegenüberliegende Seiten sind parallel.
2. Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
3. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
4. Benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°.
5. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.

Beziehungen zwischen Eigenschaften

1. Gegenüberliegende Seiten sind parallel, also sind sie auch gleich lang.
2. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß, also ergänzen sich benachbarte Winkel zu 180°.
3. Halbieren der einen und Verdoppeln der anderen Seitenlänge lässt den Flächeninhalt unverändert.

Beziehungen zu anderen Begriffen

1. Sind in einem Parallelogramm alle Seiten gleich lang, dann ist es eine *Raute*.
2. Sind in einem Parallelogramm benachbarte Winkel gleich groß, so müssen alle Winkel 90° sein. Das Parallelogramm ist dann ein *Rechteck*.
3. Gegenbeispiele zu einem Parallelogramm sind der *Drachen* (falls er keine Raute ist) und das *Trapez* (falls nicht beide gegenüberliegende Seitenpaare jeweils parallel sind).

Das Vorhandensein derartiger Kenntnisse über Begriffe und Eigenschaften zeigt sich vor allem dann, wenn sie im Rahmen von Aufgaben- und Problemstellungen angewandt werden können.

5.4.3 Aneignung von Fähigkeiten

Zum Verstehen eines geometrischen Begriffs gehören Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff:

- Konstruieren
- Berechnen (von Streckenlängen, Winkelgrößen, Flächeninhalten und Volumina)
- Fähigkeit zum Problemlösen (einschließlich Beweisprobleme)

Konstruieren können

Konstruiere ein Parallelogramm aus zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, z. B. $\overline{AB} = 6$ cm; $\overline{BC} = 4$ cm und $\beta = 60°$.

- Konstruieren kann hier ein Arbeiten „mit Zirkel und Lineal“ bedeuten, es kann sich aber auch auf die Werkzeuge Geodreieck oder DGS beziehen.
- Wichtig bei derartigen Aufgabenstellungen ist es, dass Lernende die Eigenschaften des Parallelogramms für die Konstruktion nutzen.

Berechnen können

Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms, von dem eine Seite $a = 6$ cm und die zugehörige Höhe $h_a = 4$ cm bekannt sind.

- Diese Aufgabe ist eine „reine“ Berechnungsaufgabe – lediglich Werte müssen in eine Formel eingesetzt werden.
- Berechnungsaufgaben lassen sich aber auch in Problemkontexte einbinden.

Probleme lösen können

Gegeben sind der Flächeninhalt A eines Parallelogramms und die Länge einer Seite a.

a) Berechne die Länge der Höhe h_a.

b) Sind dadurch auch die Längen der anderen Seite b und der Höhe h_b festgelegt? (Begründung)

Bei diesem (wenngleich für problemorientierte Aufgaben recht einfachen) Beispiel lässt sich die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts nicht unmittelbar anwenden.

5.5 Definieren

Definieren lernen ist ein Ziel des Mathematikunterrichts

$\rightarrow$ begriffliche Präzision
$\rightarrow$ Herauskristallisieren des (logisch) Wesentlichen
$\rightarrow$ Erkennen von Zusammenhängen

Nicht alle Begriffe können definiert werden, wie die folgenden Versuche, den Begriff „*Punkt*“ zu definieren, zeigen.

- Ein *Punkt* ist der Anfang einer Linie (PLATO, ca. 380 v. Chr.).
- Ein *Punkt* ist eine unteilbare Einheit, die eine Position besitzt (ARISTOTELES, ca. 340 v. Chr.).
- Was keine Teile hat, ist ein *Punkt* (EUKLID, ca. 325 v. Chr.).
- Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat oder eine Begrenzung ohne Dimension oder die Grenze einer Linie (HERON, ca. 50 n. Chr.).
- *Punkte* sind Anfänge von Größen und das, woraus diese erwachsen. Weiterhin sind *Punkte* die einzigen Objekte, die über eine Position verfügen (SIMPLICIUS, 6. Jh. n. Chr.).

Bestimmte *Grundbegriffe* sind bei einem Aufbau der Geometrie „aus dem Nichts“ bzw. aus sich selbst heraus *nicht definierbar*.

DAVID HILBERT (1899): Wir denken 3 Systeme von Dingen;

die Dinge des 1. Systems nennen wir *Punkte* ...;
die Dinge des 2. Systems nennen wir *Geraden* ...;
die Dinge des 3. Systems nennen wir *Ebenen* ... .

Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie *„liegen“*, *„zwischen“*, *„parallel“*, *„kongruent“*, *„stetig“*; die ... Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.

„Man muss jederzeit anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen Tische, Stühle und Bierseidel sagen können.“

- Dieser Abstraktionsanspruch ist in der Schule nicht realisierbar.
- Vielmehr sind Grundbegriffe mit anschaulichen Vorstellungen und Erfahrungen verknüpft.

Minimalität vs. Anschaulichkeit von Definitionen

- Ein Rechteck ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln.

Es würde auch reichen:

- Ein Rechteck ist ein Viereck mit drei rechten Winkeln.

Verschiedene Definitionen aufgrund verschiedener Oberbegriffe

- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel.

Verschiedene Definitionen aufgrund der Wahl anderer artbestimmender Merkmale

- Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten gleich lang sind und das einen rechten Winkel hat.
- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, bei dem die Seiten senkrecht aufeinander stehen.
- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen.

Definitionen bestehen aus *Oberbegriffen* und *artbestimmenden* Merkmalen (oder Angaben zur *Entstehung* von Objekten, die durch einen Begriff bezeichnet werden).

Da ein vollständiger axiomatischer Aufbau der Geometrie im Mathematikunterricht nicht betrieben wird, kommt auch bei Definitionen das Prinzip des *lokalen Ordnens* zur Anwendung.
$\rightarrow$ Aufbau von *Begriffsnetzen*.

Für Begriffe, die definiert und für Begriffe, die dafür benutzt werden, müssen ausreichend fundierte mentale Modelle vorliegen.

Begriffe lassen sich – je nach bereits vorhandenem Wissen – auf verschiedene Weisen definieren.

- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem die Gegenseiten jeweils parallel sind.
- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck mit jeweils zwei gleich langen Gegenseiten.
- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.
- Ein *Parallelogramm* ist ein punktsymmetrisches Viereck.

Je nach verwendeter Definition ergeben sich andere Eigenschaften des Parallelogramms dann als Folgerungen und können bewiesen werden. („Rollentausch": Definitionen $\leftrightarrow$ Sätze)

5.5.1 Genetische und charakterisierende Definitionen

Genetische Definitionen

Im Geometrieunterricht werden häufig Definitionen verwendet, bei denen angegeben wird, wie der Begriff entsteht (genetische Definitionen).

- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, das entsteht, wenn sich zwei Parallelstreifen schneiden.
- Ein *Kreis* entsteht, wenn sich ein Punkt einmal im festen Abstand um einen (festen) Punkt bewegt.
- Ein *Prisma* ist ein Körper, der durch Parallelverschiebung eines ebenen Vielecks entlang einer nicht in der Ebene liegenden Strecke entsteht.
- Ein *Kegel* ist ein Körper, der entsteht, wenn alle Punkte eines Kreises mit einem Punkt außerhalb der Ebene, in der der Kreis liegt, verbunden werden.

Charakterisierende Definitionen

Bei charakterisierenden Definitionen werden Begriffe durch ihre Eigenschaften beschrieben.

- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.
- Ein *Kreis* ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand haben.
- Ein *Prisma* ist ein Körper, der zwei in parallelen Ebenen gelegene kongruente Vielecke als Grund- und Deckfläche und Parallelogramme als Seitenflächen hat.
- Ein *Kegel* ist ein Körper, der von einem Kreis und einer Mantelfläche in Form eines Kreissektors begrenzt wird.

Die Vorteile genetischer Definitionen liegen in ihrer Anschaulichkeit und in der Nachvollziehbarkeit auf der enaktiven und ikonischen Ebene. Sie stellen allerdings keine Definitionen im Sinn einer axiomatisch aufgebauten Theorie dar.

5.6 Mittelfristiges Lehren geometrischer Begriffe

Schlüsselbegriffe

- beziehen sich auf grundlegende Phänomene und geben Unterrichtsreihen ein Gepräge,
- treten im Unterricht mehrfach wieder auf,
- werden in einem mittelfristigen Prozess gelernt und langfristig vertieft und „angereichert".

Beispiel: *Kongruenz*

A. Klärung eines neuen Phänomens

- Schlüsselbegriffe erwachsen aus Problemstellungen, die der Klärung grundlegender Phänomene dienen.

Beispiel Kongruenz:

- Wie kann man feststellen kann, dass zwei Figuren die gleiche Form und die gleiche Größe haben?

B. Erzeugung neuartiger Problemstellungen

- Schlüsselbegriffe erzeugen typische Problemstellungen.

Beispiel Kongruenz:

- Woran erkennt man, dass zwei Figuren kongruent sind?
- Wie kann man zu einer Figur eine kongruente Figur erzeugen?

C. Erzeugung neuer Methoden

- Schlüsselbegriffe liefern häufig neue Methoden zum Lösen von Problemen.

Beispiel Kongruenz:

- Kongruenzbetrachtungen: wirkungsvolle Methode zum Beweis geometrischer Sätze.

D. Erzeugung neuer Einsichten

- Schlüsselbegriffe sind geeignet, neue Einsichten in Eigenschaften von Objekten zu gewinnen und Beziehungen zwischen Objekten zu entdecken.

Beispiel Kongruenz:

- So kann man entdecken, dass eine spezielle Strecke eine Figur in zwei zueinander kongruente Teile zerlegt, oder dass zwei Figuren zueinander kongruente Teilfiguren besitzen.

E. Erzeugung neuer Begriffsbildungen

- Häufig führt ein Schlüsselbegriff zur Bildung neuer Begriffe.

Beispiel Kongruenz:

- Spezialisierung → Begriffe der gleichsinnigen Kongruenz bzw. der gegensinnigen Kongruenz
- Generalisierung → Begriff der Ähnlichkeit

5.7 Langfristiges Lehren und Lernen geometrischer Begriffe Das Stufenmodell von van Hiele

PIERRE und DINA VAN HIELE, Freudenthal-Institut Utrecht, 1964;
vgl. FRANKE, Didaktik der Geometrie in der Grundschule, Spektrum, 2007.

Fünf Niveaustufen geometrischen Denkens

0. Niveaustufe: *Räumlich-anschauungsgebundenes Denken (Visualization)* – Primarstufe[6]

- geometrische Objekte werden als einprägsames Ganzes wahrgenommen;
- Figuren wie Quadrat, Rechteck, Dreieck, Viereck und Kreis können benannt werden (ohne nähere Begründung);
- kein Erkennen der Bestandteile und Eigenschaften;

1. Niveaustufe: *Geometrisch-analysierendes Denken (Analysis)* – Primarstufe

- Wahrnehmung auch von Eigenschaften von Objekten
- Beschreibung und Erkennen von beschriebenen geom. Objekten
- Klassifizierung (Sortieren), aber i. d. R. keine Klasseninklusionen

2. Niveaustufe: *Geometrisch-abstrahierendes Denken (Abstraction)* – Primarstufe / Sekundarstufe I

- Klasseninklusion (z.B. Rechteck vs. Quadrat, Haus der Vierecke)
- erste Ableitungen und logische Schlüsse

3. Niveaustufe: *Geometrisch-schlussfolgerndes Denken (Deduction)* – Sekundarstufe I/II

- verstärkter Einsatz logischer Schlussfolgerungen (Deduktion)
- Rolle von Definitionen, Axiomen, Sätzen u. Beweisen wird erkannt

4. Niveaustufe: *Strenge, abstrakte Geometrie (Rigor)* – Sekundarstufe II / Hochschule

- Formale, abstrakte Geometrie
- Gleichwertigkeit verschiedener Definitionen wird erkannt
- Aufbau und Vergleich von Axiomensystemen

[6] Die Stufen sind nicht unbedingt altersabhängig. Schülerinnen und Schüler können in demselben Alter unterschiedliche Stufen erreichen. Die Angaben „Primarstufe“ usw. sind daher als ungefähre Zuordnungen zu betrachten.

6 Raum- bzw. Körpergeometrie in der Sekundarstufe I

Körperdarstellungen und Körperberechnungen treten in mehreren Klassenstufen auf. Dabei werden im Laufe der Schulzeit immer „kompliziertere“ Körper betrachtet. Ein Sonderfall ist die Kugel: in Bezug auf Definition und Darstellung ist sie der einfachste (und zugleich „perfekteste“) aller Körper; die Berechnung ihres Oberflächeninhalts und Volumens erfordert hingegen tiefgehende Überlegungen und sorgfältige „Vorarbeiten“. Neben *Begriffsklärungen* umfassen die Stoffgebiete zur Körpergeometrie in den einzelnen Schuljahren vor allem *Körperdarstellungen und -berechnungen*. Da oft lange Zeiträume zwischen der Behandlung von Elementen der Körpergeometrie liegen (mitunter mehr als ein Schuljahr), kommt *Wiederholungen und Übungen* besondere Bedeutung zu. Dies trifft u. a. für Schrägbilddarstellungen zu, die erstmals bereits in Klassenstufe 5/6 für Würfel und Quader auftreten, später dann für Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel.

6.1 Überblick über die im Mathematikunterricht behandelten Körper

Aussagen des Rahmenlehrplanes zur Behandlung von Elementen der Körpergeometrie finden sich unter den *Leitideen „Raum und Form“* sowie *„Messen“* bzw. in der Grundschule unter *„Form und Veränderung“* sowie *„Größen und Messen“*.

Klassenstufen 3/4

- Objekte aus der Umwelt beschreiben und nach ihren mathematischen Eigenschaften ordnen: Pyramide, Kegel, Zylinder;
- Freihandzeichnungen von Würfeln und Quadern;
- vage Aussagen zu Volumina:
  – „Einheitswürfel“
  – „Größenangaben umwandeln … Rauminhalt: Liter, Milliliter

Klassenstufen 5/6

- Körper darstellen – Schrägbilder in Punkt- und Karoraster;
- zu regelmäßigen Körpern Netze herstellen;
- Zuordnungen zwischen Körpern und Netzen vornehmen;
- Symmetrien in ebenen Figuren und Körpern identifizieren;
- Volumen von Würfel und Quader berechnen und die Formel begründen;
- Volumen von aus Würfeln und Quadern zusammengesetzten Körpern;
- Oberflächeninhalt des Quaders

Klassenstufen 7/8

Kompetenzen: Bestimmen des Flächen- und Rauminhaltes von geometrischen Objekten, insbesondere in der Umwelt

Schülertätigkeiten

* entwerfen Netze von Prismen, Zylindern, Pyramiden und Kegeln;
* stellen Modelle von Prismen und Zylindern her;
* begründen die Formeln für das Volumen von geraden Prismen und geraden Kreiszylindern;
* wenden die Volumenformeln für Prismen und Zylinder an;
* ermitteln Oberflächeninhalte von Quadern und geraden Kreiszylindern in ihrem Umfeld;
** ermitteln Oberflächeninhalte von regelmäßigen dreiseitigen Prismen in ihrem Umfeld;
** Oberflächen- und Rauminhalte von zusammengesetzten Körpern;
*** – keine zusätzlichen Vorgaben –

Klassenstufen 9/10 – Modul „Körper herstellen und berechnen“

Kompetenzbezug:

Die folgenden Kompetenzen zum Darstellen und zu den Leitideen Raum und Form und Messen bilden den Schwerpunkt dieses Moduls:

- Erkennen und Beschreiben geometrischer Strukturen in der Umwelt;
- Analysieren und Klassifizieren von Körpern auch aus entsprechenden zweidimensionalen Darstellungen;
- Skizzieren von Schrägbildern, Entwerfen von Körpernetzen und Herstellung von Modellen ausgewählter Körper;
- Berechnen von Volumen und Oberflächeninhalt von Körpern.

Schülertätigkeiten

* charakterisieren Körper (Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel);
* charakterisieren Körper aus ihrer Umwelt;
* zeichnen Schrägbilder von Körpern;
* entwerfen Netze von Pyramiden und Kegeln;
* stellen Modelle einfacher Körper her (Pyramide, Kegel);
* begründen die Formeln für das Volumen von Pyramide, Kegel und Halbkugel durch experimentellen Inhaltsvergleich;
* berechnen das Volumen und den Oberflächeninhalt von Pyramiden, Kegeln und Kugeln in Sachzusammenhängen.

** skizzieren u. zeichnen Schrägbilder zusammengesetzter Körper;
** begründen den Satz von Cavalieri anschaulich;
** wenden den Satz von Cavalieri zur Bestimmung des Pyramidenvolumens an;
** leiten die Formeln für den Oberflächeninhalt von Pyramide und Kegel her;
** ermitteln den Oberflächeninhalt von Kugeln näherungsweise durch Zerlegung;
** berechnen Volumina von zusammengesetzten Körpern in Sachzusammenhängen;

*** begründen das Volumen von Kegel oder Kugel mit einem Näherungsverfahren.

Zusammenfassung

Die Behandlung der folgenden Körper soll also erfolgen:

- Körper mit ebenen Begrenzungsflächen
  - Würfel, Quader
  - Prisma
  - Pyramide (und Pyramidenstumpf)
- Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen
  - Kreiszylinder
  - Kreiskegel (und Kegelstumpf)
  - Kugel, Kugelteile.
- zusammengesetzte Körper

Von diesen Körpern sollen zeichnerische Darstellungen angefertigt, Netze und Abwicklungen betrachtet (soweit möglich) sowie Flächeninhalte und Volumina berechnet werden.

6.2 Begriffsbestimmungen

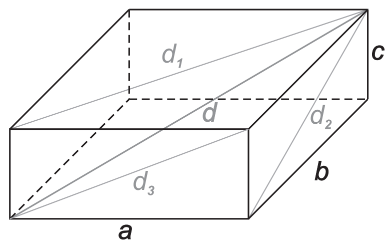
Im Folgenden werden Definitionen und einige grundlegende Eigenschaften der im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I behandelten Körper angegeben.[7] Diese können als Grundlage und „Hintergrund“ für die Erarbeitungen der entsprechenden Begriffe im Unterricht dienen. Unmittelbar lassen sich diese Definitionen jedoch in früheren Schuljahren nicht im Unterricht verwenden.

Polyeder [8] (Vielflächner, ebenflächig begrenzter Körper): Ein Polyeder ist eine beschränkte dreidimensionale Punktmenge des Raumes, die von endlich vielen ebenen Flächenstücken (n-Ecken) begrenzt wird. Gemeinsame Strecken verschiedener Begrenzungsflächen (Facetten) eines Polyeders werden *Kanten*, gemeinsame Eckpunkte von Begrenzungsflächen *Ecken* des Polyeders genannt. . . . Die Vereinigung aller Punkte der begrenzenden n-Ecke ist die *Oberfläche des Polyeders*, die gewöhnlich als Teilmenge des Polyeders aufgefasst wird. Ein Polyeder heißt *konvex*, falls es zu jeweils zwei beliebigen seiner Punkte auch alle Punkte ihrer Verbindungsstrecke enthält. Sind alle Kanten eines konvexen Polyeders gleich lang und treffen sich an jeder Polyederecke gleich viele Seitenflächen, so handelt es sich um ein *reguläres Polyeder*. Ein konvexes Polyeder kann auch als beschränkte Durchschnittsmenge endlich vieler abgeschlossener Halbräume definiert werden.

Würfel: geometrischer Körper, der von sechs Quadraten begrenzt wird. Jeder Würfel besitzt 8 Eckpunkte und 12 Kanten, die alle gleich lang sind. Würfel sind reguläre Polyeder (Platonische Körper) und werden auch als *Hexaeder* bezeichnet. Jedem Körper kann eine Kugel umbeschrieben werden. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen.

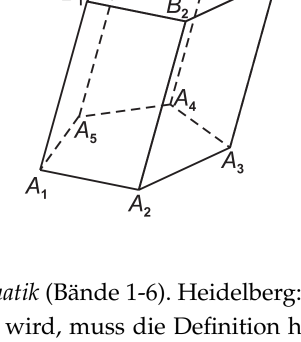
Quader: geometrischer Körper der von 6 Rechtecken begrenzt wird. Davon sind jeweils zwei gegenüberliegende Rechtecke kongruent. Jeder Quader besitzt acht Eckpunkte und zwölf Kanten, von denen jeweils vier gleich lang sind.

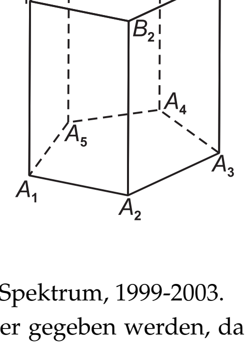
Die vier Raumdiagonalen eines beliebigen Quaders schneiden sich in einem Punkt und halbieren jeweils einander. Alle acht Eckpunkte eines Quaders liegen auf einer Kugel, der *Umkugel* des Quaders, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der Raumdiagonalen ist. Ein Quader, dessen sämtliche Kanten gleich lang sind, ist ein Würfel.



Prisma: ebenflächig begrenzter Körper mit zwei kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden, n-Ecken $A_1A_2\ldots A_n$ und $B_1B_2\ldots B_n$ als Grund- und Deckfläche sowie n Parallelogrammen als Seitenflächen. Die beiden n-Ecke müssen „parallelkongruent“ zueinander sein, d.h. sie müssen durch eine Verschiebung auseinander hervorgehen; die Eckpunkte der Parallelogramme sind jeweils zwei Paare zueinandergehörender Ecken der Grund- und Deckfläche. Die Seiten der Grund- und Deckfläche heißen *Grundkanten*, diejenigen der Seitenflächen *Mantellinien* des Prismas. Ein Prisma, dessen Grund- und Deckfläche jeweils n Ecken haben, besitzt somit $3n$ Kanten, davon n Mantellinien, und wird *n-seitiges Prisma* genannt.

Verlaufen die Mantellinien eines Prismas senkrecht zur Grundfläche, so heißt es *gerades Prisma*, anderenfalls *schiefes Prisma*. Als *Höhe* eines Prismas wird der Abstand der beiden Ebenen, denen die Grund- und die Deckfläche angehören, bezeichnet. Ein Prisma, dessen Grund- und Deckfläche regelmäßige Vielecke sind, heißt *regelmäßiges Prisma*; sind Grund- und Deckfläche eines Prismas Parallelogramme, so handelt es sich um ein *Parallelepiped*.



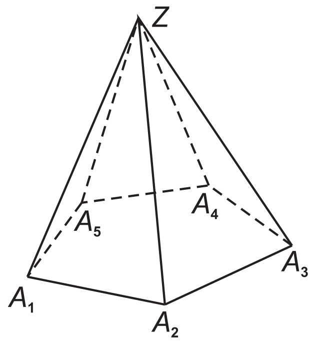


[7] Die Definitionen sind entnommen aus dem *Lexikon der Mathematik* (Bände 1-6). Heidelberg: Spektrum, 1999-2003.

[8] Obwohl das Wort „Polyeder“ in der Schule selten verwendet wird, muss die Definition hier gegeben werden, da „Polyeder“ bzw. „ebenflächig begrenzter Körper“ ein Oberbegriff ist, der in vielen der folgenden Definitionen verwendet wird.

Pyramide: geometrischer Körper, der von einem ebenen n-Eck $A_1A_2\dots A_n$ und allen Dreiecken $\triangle A_iA_{i+1}Z$, deren Eckpunkte jeweils zwei benachbarte Punkte dieses n-Ecks und ein fester Punkt Z sind, begrenzt wird.

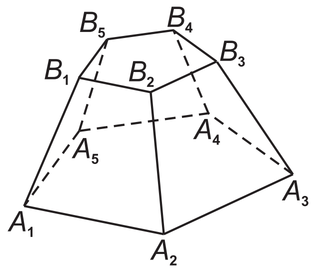
Das n-Eck $A_1A_2\dots A_n$ heißt *Grundfläche*, die Dreiecke *Seitenflächen*, die Gesamtheit aller Seitenflächen *Mantelfläche* und der Punkt Z *Spitze* der Pyramide. Die Seiten des n-Ecks werden als *Grundkanten*, die Verbindungsstrecken zwischen den Eckpunkten der Grundfläche und der Pyramidenspitze als *Mantellinien* bezeichnet. Der Abstand der Spitze einer Pyramide zur Ebene der Grundfläche heißt *Höhe der Pyramide*.



Eine Pyramide mit einer n-eckigen Grundfläche wird als *n-seitige Pyramide* bezeichnet, eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche z. B. als vierseitige Pyramide. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt M und ist die Verbindungsstrecke zwischen M und Z senkrecht zur Grundfläche der Pyramide, so heißt diese *gerade*, anderenfalls *schief*. Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, wird *regelmäßige Pyramide* genannt.

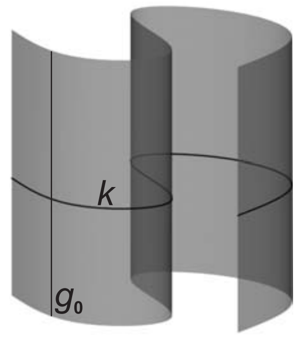
Pyramidenstumpf: Körper der entsteht, indem eine Pyramide von einer Ebene ϵ geschnitten wird, die parallel zur Grundfläche der Pyramide verläuft.

Eine solche Ebene schneidet eine n-seitige Pyramide in einem n-Eck $B_1B_2\dots B_n$, das zur Grundfläche $A_1A_2\dots A_n$ der Pyramide ähnlich ist und als *Deckfläche* des Pyramidenstumpfes bezeichnet wird. Die Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes sind Trapeze; geht der Pyramidenstumpf aus einer regelmäßigen Pyramide hervor, so handelt es sich um gleichseitige Trapeze. Der Abstand zwischen der Schnittebene ϵ und der Grundebene ist die *Höhe* des Pyramidenstumpfes.



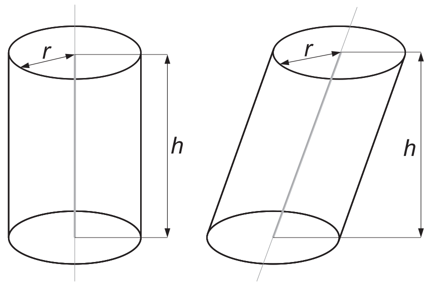
Zylinder: geometrischer Körper, der von einer *Zylinderfläche* und zwei parallelen Ebenen begrenzt wird. Unter einer Zylinderfläche wird dabei eine Fläche verstanden, die aus allen Geraden g des Raumes besteht, die mit einer vorgegebenen Kurve k, der *Leitkurve* der Zylinderfläche, jeweils einen gemeinsamen Punkt besitzen und zu einer vorgegebenen Geraden g_0, die ebenfalls k schneidet, parallel sind.

Diese Geraden werden als die *Erzeugenden* der Zylinderfläche bezeichnet. Die Leitkurve k soll eine „echte“ Kurve, also weder eine Punkt noch eine Kurve, die ein gesamtes Flächenstück vollständig bedeckt, sein. Es muss sich dabei jedoch nicht notwendig um eine geschlossene und auch nicht um eine ebene Kurve handeln. Jede Zylinderfläche kann in eine Ebene abgewickelt werden und besitzt daher in jedem ihrer Punkte die Gaußsche Krümmung Null. Oft wird auch die Zylinderfläche selbst als Zylinder bezeichnet.



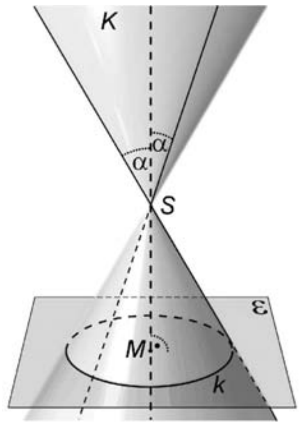
Ein Körper, der von einem Teil einer Zylinderfläche mit einer geschlossenen Leitkurve k, der von zwei parallelen Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 ausgeschnitten wird, und den Ebenenstücken, welche die Zylinderfläche aus ϵ_1 und ϵ_2 ausschneidet, begrenzt wird, heißt *Zylinderkörper* oder einfach *Zylinder*. Die Teile der Zylinderoberfläche, die in ϵ_1 bzw. ϵ_2 liegen, heißen *Grund-* und *Deckfläche*; derjenige Teil, welcher auf der Zylinderfläche liegt, *Mantelfläche* oder *Mantel* des Zylinders. Die Grund- und die Deckfläche eines beliebigen Zylinders sind zueinander kongruent. Die Teile der Erzeugenden der Zylinderfläche, die auf dem Mantel liegen, werden als *Mantellinien* und der Abstand der Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 als *Höhe h* des Zylinders bezeichnet.

Ein Zylinder mit kreisförmigen Grund- und Deckflächen heißt *Kreiszylinder*; die Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten des Grund- und Deckkreises *Achse* des Kreiszylinders. Bei einem *geraden Kreiszylinder* steht die Achse senkrecht auf der Ebene des Grundkreises (und somit auch auf der Ebene des Deckkreises); anderenfalls handelt es sich um einen *schiefen Kreiszylinder*.



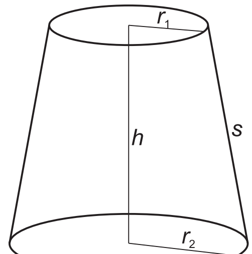
Kreiskegel: Menge der Punkte aller Geraden, die einen Punkt S des Raumes mit den Punkten eines Kreises k verbinden. Diese Geraden werden *Mantellinien* des Kreiskegels K genannt. Der Punkt S heißt *Spitze*, der Kreis k *Grundkreis* von K.

Die Gerade durch die Spitze S und den Mittelpunkt M des Grundkreises wird als *Achse des Kreiskegels* K bezeichnet. Steht die Achse eines Kreiskegels K senkrecht auf der Grundkreisebene ϵ, so ist K ein *gerader Kreiskegel*. Ist α der Winkel zwischen der Kegelachse und den Mantellinien, so heißt 2α *Öffnungswinkel* von K.



Ein Kreiskegel in dem so beschriebenen Sinne ist unendlich ausgedehnt und besteht aus zwei *Kegelästen* (den beiden Hälften, in die der Kegel durch seine Spitze geteilt wird); es handelt sich also um einen Doppelkegel. Allerdings lassen sich auch *einfache Kreiskegel* betrachten, wobei dann die Mantellinien lediglich Strahlen mit der Spitze als Anfangspunkt sind. *Endliche Kreiskegel* werden durch die Grundkreisebene und die Verbindungsstrecken zwischen der Spitze und den Punkten des Grundkreises begrenzt.

Kegelstumpf: Körper, der entsteht, wenn ein Kreiskegel mit zwei zur Achse des Kegels senkrechten Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 geschnitten wird (wobei ϵ_1 und ϵ_2 die Kegelachse auf derselben Seite bezüglich der Spitze des Kreiskegels schneiden).



Der Abstand der Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 heißt *Höhe h* und die Radien r_1, r_2 der beiden entstehen Schnittkreise des Kegels mit den beiden Ebenen heißen *Radien des Kegelstumpfes*.

Kugel: Menge aller Punkte des Raumes, die von einem gegebenen Punkt M (dem Mittelpunkt) einen Abstand haben, der kleiner oder gleich einem festen Wert r (dem Radius) ist. Die Oberfläche einer Kugel (d. h. die Menge aller Punkte, die von M den Abstand r haben) wird als *Sphäre* bezeichnet, mitunter wird jedoch auch der Begriff „Kugel" selbst in diesem Sinne gebraucht und die Menge der Punkte im Kugelinneren als *Kugelkörper* bezeichnet.

Die Kugel gilt als der harmonischste aller Körper, was vor allem darauf zurückzuführen ist, daß ihre Krümmung in jedem Punkt denselben Wert besitzt.

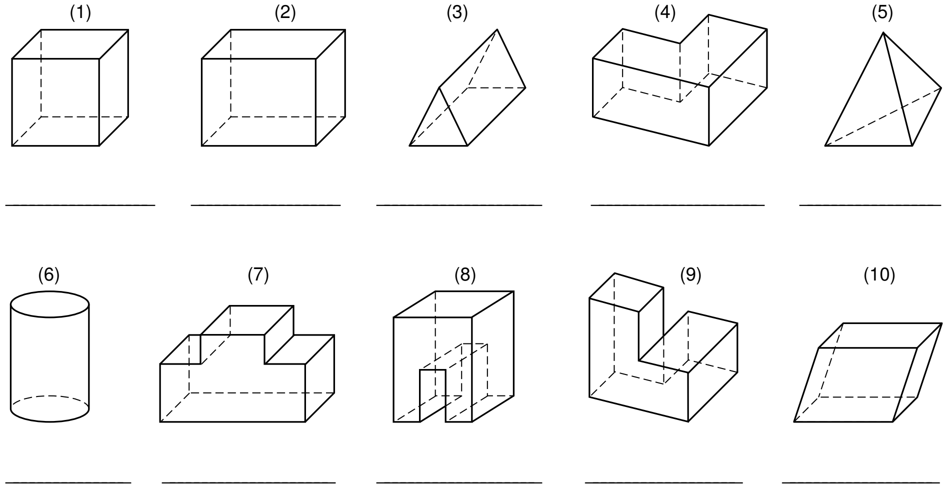
Wie bereits erwähnt wurde, werden exakte Definitionen nicht für alle in der Schule behandelten Körper erarbeitet werden können. Jedoch sollten die Schüler durch

- Untersuchung von realen Körpern,
- Anfertigung von Körpernetzen,
- Herstellen von Körpern (Kantenmodelle aus Stäben oder Draht, Flächenmodelle aus Körpernetzen),
- Schnittbetrachtungen

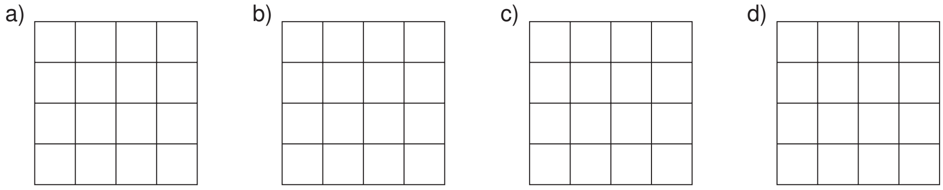
sowie Besprechung der dabei entdeckten Eigenschaften die meisten der in der obigen Aufzählung enthaltenen Charakteristika der Körper erarbeiten. Dies beginnt bereits in der Grundschule und setzt sich dann schrittweise bis zum Ende der Sekundarstufe I fort.

Im Folgenden sind einige Aufgaben zum „Kennenlernen“ bzw. Festigen von Körpern und ihren Eigenschaften angegeben (von denen einige naturgemäß auch auf die Entwicklung räumlichen Vorstellungsvermögens zielen).[9]

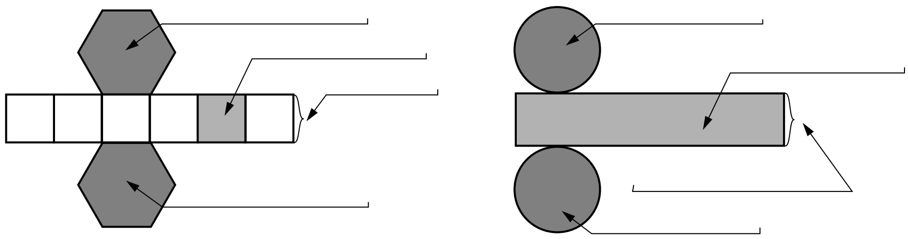
1. a) Gib jedem Körper nach Möglichkeit einen Namen!
b) Kennzeichne bei den Prismen eine mögliche Grundfläche farbig!



2. Zeichne vier unterschiedliche Würfelnetze! Färbe die entsprechenden Kästchen!



12. Vergleiche Begriffe am Prisma und am Zylinder! Gib den gekennzeichneten Flächen bzw. Strecken der Netze die für Prismen bzw. Zylinder gebräuchlichen Bezeichnungen!



3. Gegeben ist das Netz einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS.

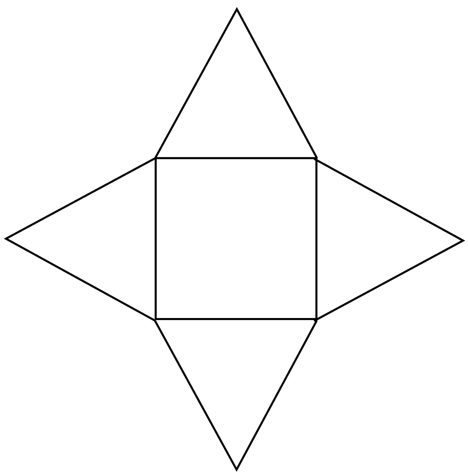
a) Bestimme die Länge der Höhe h durch Konstruktion und Messen!

____

b) Füge in das Netz den Grundriss der Pyramide ein und skizziere den dazugehörigen Aufriss!

c) Der Punkt A soll sich auf einem Kreis um den Mittelpunkt der Grundfläche bewegen. Wie bewegt sich dabei die Pyramide ABCDS?

____

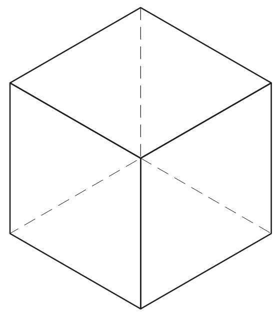


[9] Die Aufgaben sind entnommen aus: *Mathematik 7* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2002 und *Mathematik 8* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2003.

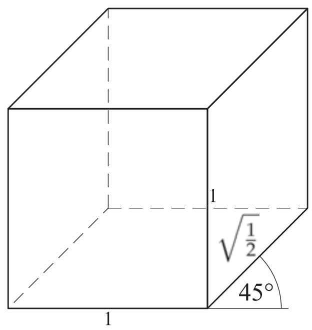
6.3 Körperdarstellung

Am häufigsten werden Körper in der Schule in perspektivischen Darstellungen (Schrägbildern) dargestellt. In Einzelfällen kommen Zweitafelprojektionen (Grund- und Aufriss) sowie (seltener) Zentralprojektionen zum Einsatz.

6.3.1 Schrägbilder von Würfeln und Quadern



Die in der Schule verwendeten Schrägbilder entstehen meist durch Parallelprojektion. Um einen im Raum befindlichen Körper abzubilden, müssen eine Bildebene und eine Richtung festgelegt werden. Als Bildebene verwendet man, wenn dies möglich ist, meist eine Ebene, in der eine Seitenfläche des darzustellenden Körpers liegt. Die nebenstehende Abbildung zeigt zwar ebenfalls ein Schrägbild eines Quaders (isometrische Darstellung), diese Darstellungsweise ist in der Schule aber eher unüblich.



Um zu einem Punkt eines Körpers den zugehörigen Bildpunkt in der Bildebene zu finden, konstruiert man durch ihn eine Gerade, die parallel zu Projektionsrichtung liegt. Ihr Schnitt mit der Bildebene definiert den Bildpunkt. Festzulegen sind bei den in der Schule verwendeten Schrägbilddarstellungen der Winkel zwischen Bildebene und Projektionsrichtung (meist 45°) sowie ein „Verkürzungsfaktor“ für Strecken in der zur Bildebene senkrechten Raumdimension. Meist wird hierfür $\sqrt{\frac{1}{2}}$, seltener $\frac{1}{2}$ verwendet. (Mithilfe karierten Papiers können Schüler den Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}}$ auch dann leicht konstruieren, wenn sie Quadratwurzeln noch nicht kennen.)

In Klassenstufe 5/6 wird mit dem Zeichnen von Schrägbildern für Würfel und Quader begonnen, es können Aufgaben der folgenden Art gestellt werden:

Aufgabe: Zeichne das Schrägbild eines Quaders, der 3 cm lang, 3 cm breit und 2 cm hoch ist.

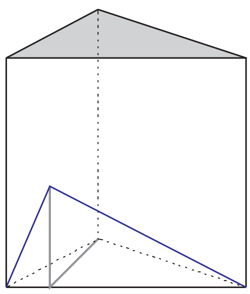
1. Die „vordere“ Seitenfläche des Körpers in wahrer Größe zeichnen.
2. Die nach hinten verlaufenden Kanten im Winkel von 45° zeichnen, für jeden „wahren“ Zentimeter die Diagonale eines Kästchens (mit der Seitenlänge 0,5 cm), also $\sqrt{\frac{1}{2}}$ cm, verwenden.
3. Die entstehenden Eckpunkte miteinander verbinden, nicht sichtbare Kanten stricheln.

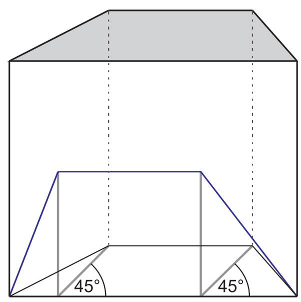
Schrägbilder „komplizierterer“ Körper werden (in höheren Klassenstufen) oft auf Schrägbilder von Würfeln und Quadern zurückgeführt. Deshalb wird diese Thematik im Verlauf der Schulzeit mehrfach zu wiederholen und zu festigen sein.

6.3.2 Schrägbilder von Prismen

Die Seiten der Grundfläche eines Prismas verlaufen i. Allg. nicht senkrecht zur Bildebene, daher sind für die Schrägbilddarstellung Hilfslinien notwendig.

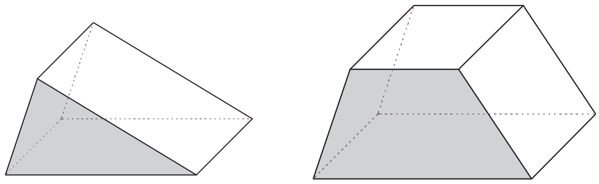
Beispiele: Prismen mit dreieckiger und trapezförmiger Grundfläche; die wahre Größe der Grundfläche ist jeweils blau dargestellt.



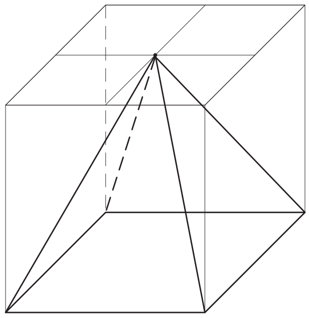


Die Arbeit mit Schrägbildern erlaubt vielfältige Variationen:

- Verschiedene Schrägbilder für denselben Körper, jeweils eine andere Seite ist Frontseite (siehe Abb.).
- Auf die Oberfläche eines Prismas (bzw. speziell eines Quaders) ist ein Muster gezeichnet. Übertrage das Muster auf das Schrägbild.
- Zu Schrägbildern Netze erstellen und umgekehrt.



6.3.3 Schrägbilder und Schnitte von Pyramiden



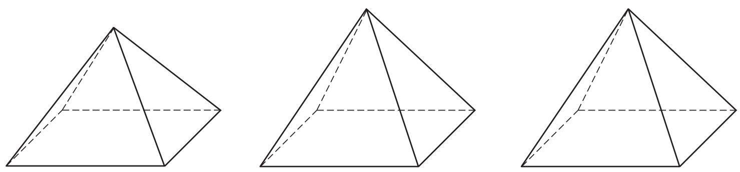
Für die Erstellung von Schrägbildern von Pyramiden greift man auf Schrägbilder von Quadern zurück, wobei auf der Deckfläche das Bild der Zylinderspitze zu konstruieren ist.

Axialschnitte (Schnitte durch die Symmetrieachse) der Pyramide sind Dreiecke. Wichtig für die räumliche Vorstellung ist die Überlegung, welche Schnittflächen überhaupt entstehen können. Da Schnitte mit technischen Geräten (Sägen u. ä.) hergestellt werden können, ist das für viele Berufe unmittelbar relevant.

Bei der regelmäßigen Pyramide kann man Dreiecke, Quadrate, Trapeze und weitere Vierecke erhalten. Die konkrete Umsetzung kann (neben dem realen Zerschneiden oder der Verwendung des Computers) auch durch das Eintauchen von Körpermodellen in Wasser erfolgen.

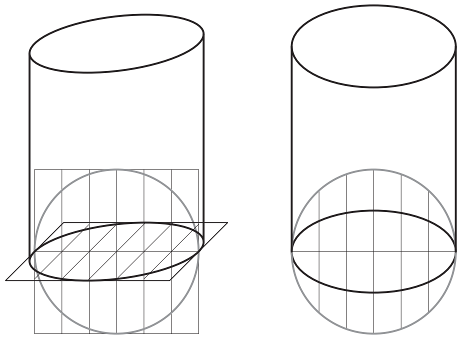
21. Zerlege jede Pyramide durch einen Schnitt so in zwei Teilkörper, dass eine Schnittfläche der folgenden Form entsteht!
Markiere die Schnittflächen farbig und benenne die entstehenden Teilkörper!

a) Die Schnittfläche ist ein Dreieck.
b) Die Schnittfläche ist ein Rechteck.
*c) Die Schnittfläche ist ein Trapez.



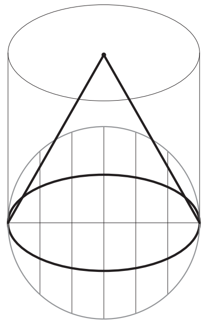
Aus: *Mathematik 9* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2004.

6.3.4 Schrägbilder von Zylindern und Kegeln



Wird das übliche Schrägbildverfahren (Verkürzungsfaktor $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$, Verzerrungswinkel 45°) auf einen Kreis angewendet, so entsteht ein ungewohntes Bild (siehe links); zudem ist die Konstruktion nicht ganz einfach. Es ist daher üblich, als Verkürzungsfaktor zwar $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (oder in diesem Falle im Sinne der Einfachheit $\frac{1}{2}$) zu wählen, als Verzerrungswinkel aber 90° zu verwenden.

Bei der Behandlung von Schrägbildern von Zylindern müssen die Schüler punktweise *Ellipsen* konstruieren. Das ist eine Gelegenheit, diese in der Schule sträflichst vernachlässigte Figur zu thematisieren.



So wie Schrägbilder von Pyramiden aus Schrägbildern von Quadern bzw. Prismen konstruiert werden können, dient als Hilfsfigur zur Konstruktion des Schrägbildes eines geraden Kreiskegels ein gerader Kreiszylinder.

6.4 Oberflächeninhalte von Körpern

Für die Berechnung von Oberflächeninhalten der in der Sekundarstufe I behandelten Körper (mit Ausnahme der Kugel) sind folgende Überlegungen zu führen:

- (Gedankliche oder tatsächliche) Konstruktion eines Netzes (bei ebenflächig begrenzten Körpern) oder Abwicklung (bei Zylindern, Kegeln und Kegelstümpfen),
- Bestimmung der Flächeninhalte der durch Netzbildung oder Abwicklung entstehenden ebenen Figuren.

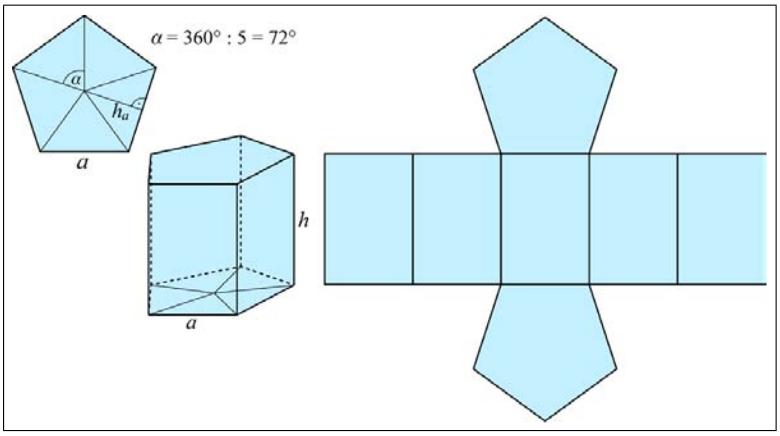
Neben der räumlichen Anschauung und der Fähigkeit, die auftretenden Grund-, Deck-, Seiten- und Mantelflächen richtig zuzuordnen, kommt es für die Bestimmung von Oberflächeninhalten also wesentlich darauf an, dass die Schüler Flächeninhalte ebener Figuren (Dreiecke, Rechtecke, mitunter andere Vierecke und Fünfecke, Kreise sowie Kreissektoren) bestimmen können. Diese Flächeninhaltsberechnungen können bei der Bestimmung von Oberflächeninhalten gefestigt werden, oft ist dabei eine Wiederholung notwendig.

6.4.1 Oberflächeninhalte ebenflächig begrenzter Körper

Beispiel
(aus dem Schulbuch Konkret 6, Realschule, Klasse 10)

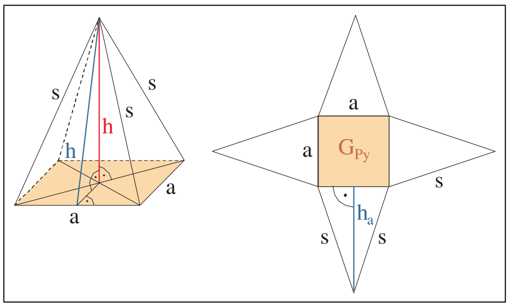
Aufgabe:
Gib mithilfe der Abbildungen allgemeine Formeln zur Berechnung des Volumens, des Mantels und der Oberfläche eines Prismas an.

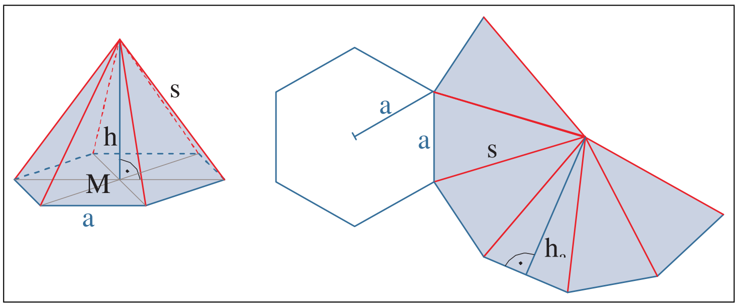
Natürlich könnte diese Aufgabe auch beispielbezogen (mit konkreten Zahlen) gestellt werden.



Grundsätzlich gilt für den Oberflächeninhalt eines Prismas natürlich $O = 2A_G + M$ (A_G – Grundfläche, M – Mantelfläche). Diese Formel sollte aber von den Schülern als geometrische Eigenschaft verstanden werden und nicht als „Formel" „abgelegt" oder im schlimmsten Fall sogar auswendig gelernt werden.

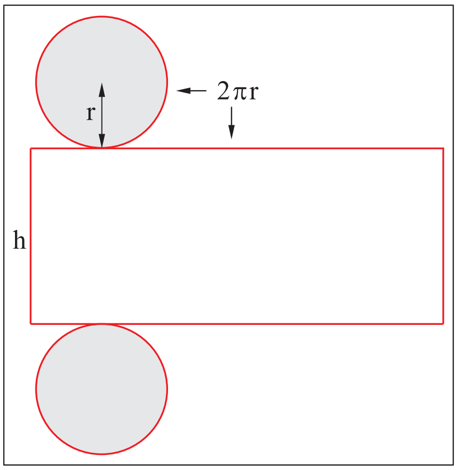
Analoge Überlegungen mithilfe von Körpernetzen lassen sich auch für den Oberflächeninhalt von Pyramiden anstellen:

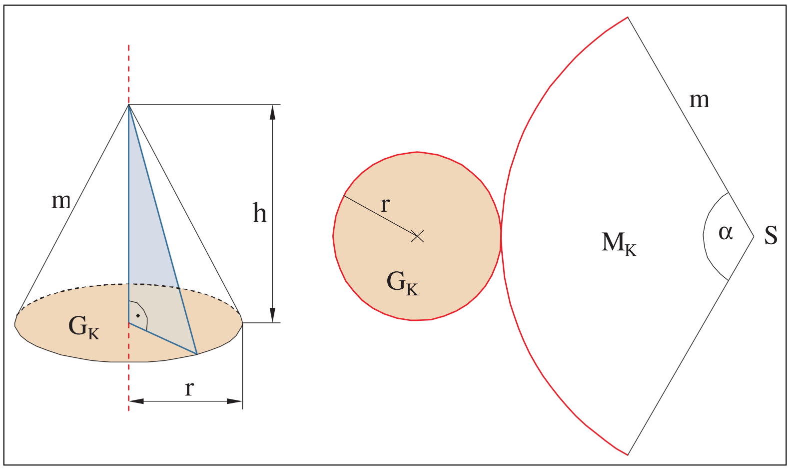




6.4.2 Oberflächeninhalte von Körpern mit gekrümmten Begrenzungsflächen

Um Oberflächeninhalte von Kreiszylindern berechnen, müssen die Schüler Berechnungen an Kreisen (Umfang und Flächeninhalt) wiederholen und anwenden (siehe die nächste Abbildung, links).





Für Oberflächeninhalte von Kegeln werden zusätzlich Kreissektoren benötigt (siehe die Abb. oben rechts). Um den Flächeninhalt des Kreissektors zu bestimmen, der durch Abwicklung des Mantels des Kegels entsteht, ist zunächst der Umfang des Grundkreises des Kegels zu berechnen: $u = 2\pi r$.

Die Bogenlänge des Kreissektors ist gleich diesem Umfang, damit gilt $u = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi m$.

Damit ließe sich nun der Winkel α des Kreissektors berechnen, was aber nicht unbedingt nötig ist, denn für den gesuchten Flächeninhalt des Kreissektors gilt $M_K = \frac{\alpha}{360°}\pi m^2$. Setzt man hierin nun $u = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi m$ ein, so erhält man $M_K = \frac{u \cdot m}{2} = \pi r m$. Für den gesamten Oberflächeninhalt des Kreiskegels ergibt sich daraus $O_K = G_K + M_K = \pi r^2 + \pi r m = \pi r(r + m)$.

Häufig ist die Länge der Mantellinien eines Kegels nicht bekannt, sondern nur sein Radius und seine Höhe. Dann muss m mithilfe des Satzes des Pythagoras durch h und r ausgedrückt werden: $m = \sqrt{h^2 + r^2}$. Damit ergibt sich die folgende Formel für den Oberflächeninhalt eines Kreiskegels:

$$O_K = \pi r \left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right).$$

Die Herleitung einer Formel für den Oberflächeninhalt eines Kreiskegels benötigt – wie oben zu sehen ist – einige Schritte. Es ist nicht zu erwarten, dass die Mehrzahl der Schüler diese ad hoc führen wird. Durch geeignete Aufgabensequenzen lassen sich Schüler aber zur Herleitung der Formel hinführen. Dies kann beispielbezogen oder allgemein erfolgen.

Aufgabe: Entwickeln Sie eine Aufgabensequenz, welche Schüler an einem Beispiel zur Berechnung des Oberflächeninhalt eines Kreiskegels führt (die Formel ist den Schülern nicht bekannt). Überlegen Sie dazu insbesondere, welche mathematischen Kenntnisse dazu reaktiviert werden müssen und berücksichtigen Sie dies bei der Zusammenstellung und Formulierung der Aufgaben.

6.4.3 Der Oberflächeninhalt der Kugel

Die Berechnung des Oberflächeninhalts der Kugel bzw. die Herleitung einer Formel dafür ist auf den bisher für andere Körper beschriebenen Wegen *nicht möglich*, denn die Kugeloberfläche (oder auch nur ein Teil davon) lässt sich nicht in eine Ebene „abwickeln". Eine exakte Berechnung der Kugeloberfläche ist mithilfe der *Integralrechnung* (was jedoch für die Sekundarstufe I nicht in Frage kommt) oder mithilfe des *Kugelvolumens* möglich. Dazu muss dieses bereits behandelt worden sein (siehe S. 59). Ansonsten sollten zu der Oberflächenformel $O = \pi d^2 = 4\pi r^2$ der Kugel zumindest *Plausibilitätsbetrachtungen* geführt werden, die mit unterschiedlicher Genauigkeit möglich sind:

- Der Term für den Oberflächeninhalt der Kugel muss proportional zu r^2 sein, da dies von der Einheit einen Flächeninhalt ergibt, und da sich Flächeninhalte bei Streckung generell quadratisch ändern. Die Oberfläche des Würfels, der die Kugel einschließt ist $6 \cdot (2r)^2 = 24r^2$ und das ist, wie es ja sein muss, mehr als der Formelwert $O = 4\pi r^2 \approx 12{,}57r^2$. Sowohl Struktur des Terms als auch Größenordnung sind also plausibel.

- Eine genauere Plausibilitätsbetrachtung kann experimentell geführt werden. Dazu überlegt man, dass $O = 4\pi r^2$ gerade den Flächeninhalten von vier Großkreisen (Äquatorkreisen) der Kugel entspricht. Um durch ein Experiment zu bestätigen, dass die Kugel denselben Flächeninhalt hat wie vier Äquatorkreise, zeigt man, dass eine Halbkugel durch zwei Äquatorkreise bedeckt wird. Dazu müssen diese ausgeschnitten, in kleine Schnipsel zerteilt und dann auf eine Halbkugel geklebt werden. Bei einigermaßen genauem Arbeiten zeigt sich, dass die Schnipsel die Halbkugel ziemlich genau bedecken, ohne zu überlappen.

6.5 Volumina von Körpern

Volumen:[10] Produkt $a \cdot e^3$ aus einer reellen Zahl a und einer festen Volumeneinheit e^3, das geometrischen Körpern zugeordnet wird und folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gilt $a \geq 0$.
2. Zwei kongruente Körper haben gleiche Volumina.
3. Haben zwei Körper mit den Volumina $a \cdot e^3$ und $b \cdot e^3$ keine gemeinsamen inneren Punkte, so hat die Vereinigung der Punkte der beiden Körper das Volumen $(a + b) \cdot e^3$.
4. Das Volumen einer festgelegten Volumenenheit beträgt $1 \cdot e^3$.

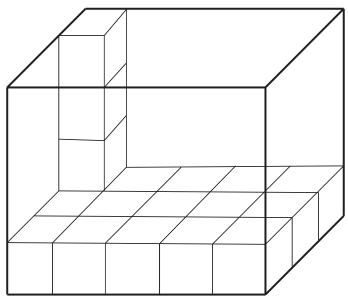
Die Zahl a wird als *Maßzahl* des Volumens bezüglich der verwendeten Volumeneinheit bezeichnet, für die oft ein Würfel mit einer Einheitsstrecke als Kante gewählt wird. Hat diese die Länge 1 Meter, so ist die daraus resultierende Volumeneinheit das Kubikmeter (m^3). Daraus können weitere Volumeneinheiten abgleitet werden, wie z. B. $1cm^3 = 0,01^3 m^3 = 10^{-6} m^3$.

Die Zuordnung eines Volumens zu einem Körper kann dadurch erfolgen, daß durch Unterteilung der Volumeneinheit kleinere Würfel gewonnen werden und ermittelt wird, wieviele dieser, immer kleiner werdenden, Würfel in dem gegebenen Körper Platz finden. Konvergiert die Summe der Volumina der Teilwürfel, die innerhalb des Körpers angeordnet werden können, für gegen Null strebende Kantenlängen der Teilwürfel, so besitzt der betrachtete Körper ein Volumen, er heißt dann *quadrierbar*.

Grundideen dieser Begriffsbestimmung können – wie die folgenden Überlegungen zeigen – am Ende der Grundschule und am Beginn der Sekundarstufe I bereits gut umgesetzt werden.

6.5.1 Exemplarische Volumenbestimmung

Eine Kiste wird mit Kubikzentimeter- oder Kubikdezimeterwürfeln ausgefüllt; die Anzahl der benötigten Einheitswürfel soll bestimmt werden. Es genügt, wie in der Zeichnung angedeutet, die Kiste nur teilweise auszufüllen, um die Strategie des Abzählens zu finden:



Anzahl der Würfel in der Kiste
= Anzahl der Würfel einer Schicht · Anzahl der Schichten.

Im nächsten Schritt wird zur *Maßzahlformel* übergegangen:

Maßzahl des Rauminhalts
= Maßzahl der Länge · Maßzahl der Breite · Maßzahl der Höhe

(bei gleicher Maßeinheit von Länge, Breite und Höhe)

Vorstellungsgrundlage für Raummaße und ihre Umrechnung

Durch ein Umfüllexperiment wird festgehalten: 1 l = 1 dm^3.

Die Beziehung 1 dm^3 = 1 000 cm^3 sollte unbedingt anhand entsprechender Modelle verdeutlicht werden (z. B. Kiste wie oben mit der Seitenlänge 1 dm). Auch die Beziehung 1 m^3 = 1 000 000 cm^3 mit der fast schon unvorstellbar großen Zahl von einer Million Würfel der Kantenlänge 1 cm in einer Kiste der Kantenlänge 1 m sollte für die Schüler so anschaulich wie möglich werden.

[10] *Lexikon der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum, 1999-2003, Band 5, S. 354.

6.5.2 Das Prinzip des Cavalieri

Das Prinzip des Cavalieri[a] ist bei Volumenbestimmungen häufig von Bedeutung. Es lässt sich anschaulich demonstrieren: Man stellt einen Bücherstapel als Quader auf den Tisch. Dann verschiebt (genauer gesagt: schert) man den Quader zu einem „schiefen Turm“. Offensichtlich ändert sich dabei das Volumen nicht. Auch wenn man den Stapel in sich verdreht, bleibt das Volumen konstant. Die Abbildung rechts zeigt die Einführung des Prinzips des Cavalieri in einem Schulbuch.[b]

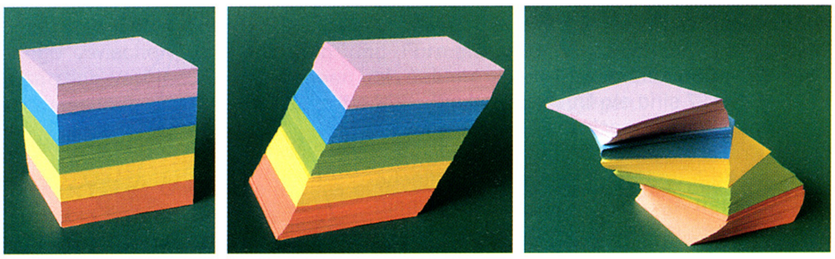
[a] FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI, 1598-1647

[b] *Mathematik 9*. Berlin: Volk und Wissen, 1995. (Diesem Buch liegt die Vorstellung zugrunde, dass Schüler ab dem 14. Lebensjahr mit „Sie“ angesprochen werden.)

4 Satz des Cavalieri und Begründung von Volumenformeln

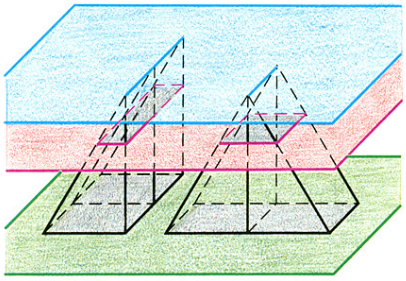
1. **a)** Die Körper in den Bildern I 24 b und c sind aus dem geraden Prisma im Bild I 24 a entstanden. Wie wurden die Körper in den Bildern I 24 b und c erzeugt?
b) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die drei Körper im Bild I 24? Worin unterscheiden sie sich voneinander?
c) Stellen Sie selbst „verschobene“ oder „verdrehte“ Körper her, indem Sie einen Stapel Spielkarten oder Zettel verändern! Sprechen Sie über die Grundfläche, die Deckfläche und die Höhe der entstandenen Körper im Vergleich zum Ausgangsstapel! Formulieren Sie eine Vermutung über ihr Volumen!

▼ Bilder I 24 a bis c



2. Im Bild I 25 wurden zwei gleiche Prismen auf verschiedene Weise zusammengesetzt. Sprechen Sie über die Form und den Inhalt der Auflageflächen sowie der Flächen der Körper, die bei einem Schnitt in gleicher Höhe und parallel zur Auflagefläche entstehen! Was können Sie über das Volumen der Körper aussagen?

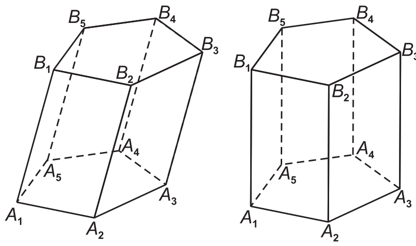
Bild I 25 ►



▶ **Satz des Cavalieri:**

Lassen sich zwei Körper so zwischen zwei parallele Ebenen legen, daß jede zu diesen Ebenen parallele Ebene in beiden Körpern flächengleiche Schnittfiguren erzeugt, so sind die beiden Körper volumengleich.

6.5.3 Volumina von Prismen und Zylindern



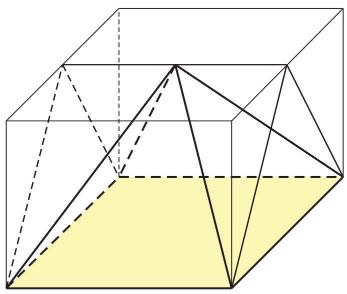
Das Volumen eines *Prismas* hängt aufgrund des Prinzips von Cavalieri nur von der Höhe h und vom Flächeninhalt A_G der Grundfläche ab, nicht jedoch davon, ob es sich um ein gerades oder ein schiefes Prisma handelt (dies gilt natürlich auch für Zyliner); es gilt in beiden Fällen:

$$V = A_G \cdot h.$$

Aufgrund der Analogie zwischen Prisma und Zylinder berechnet sich das *Zylindervolumen* nach derselben Formel wie beim Prisma. Für einen beliebigen *Kreiszylinders* mit der Höhe h und dem Radius r des Grundkreises ergibt sich daraus:

$$V = \pi r^2 h.$$

6.5.4 Das Volumen der Pyramide



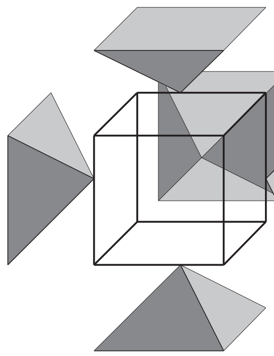
Bekannt ist die Formel für das Volumen von Prismen: $V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$. Viele Schüler vermuten (in Analogie zum ebenen Fall) für das Pyramidenvolumen $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{2} A_G \cdot h$. Diese Vermutung wird anschaulich widerlegt durch die Betrachtung eines „Keils“ (Dreiecksprisma, das ein halber Quader ist, siehe die Abbildung links).

Es existieren mehrere Möglichkeiten (unterschiedlichen Allgemeinheitsgrades), die richtige Formel für das Pyramidenvolumen herzuleiten bzw. plausibel zu machen.

Umfüllversuche

- Zunächst wird gesammelt, von welchen Daten das Volumen wohl abhängen wird. Mögliche Schülerantworten: Höhe, Seitenfläche, Grundfläche, Kantenlänge.
- Umfüllversuche: Es werden Hohlmodelle mit Sand oder Wasser gefüllt und ihre Volumina durch Umfüllen miteinander verglichen. Schüler können so feststellen, dass der Inhalt einer Pyramide dreimal in den Inhalt eines umbeschriebenen (gleich hohen) Prismas passt. Solche Versuche eignen sich zur Überprüfung von Vermutungen und wohl auch zur besseren Speicherung solcher Vermutungen, mathematische Einsicht wird hingegen nicht vermittelt.

Sechsteilung eines Würfels entlang der Raumdiagonalen



- Es wird eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche betrachtet, deren Höhe gleich der halben Länge der Seitenlänge a der Grundfläche ist.
- Es wird weiterhin ein Würfel der Kantenlänge a betrachtet. Seine Raumdiagonalen zerlegen diesen Würfel in 6 kongruente Pyramiden (im Bild ist die „vordere“ Pyramide weggelassen, da sie zuviel verdecken würde). Es gilt also für das Volumen der Pyramide:
$$V = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A_G.$$
- Diese Herleitung gilt natürlich nur für diese spezielle Form der Pyramide (mit Höhe = halbe Grundseite). Um sie zu verallgemeinern, lässt sich eine Streckung anwenden. Das Volumen der speziellen Pyramide mit der Höhe $\frac{a}{2}$ ist $V_0 = \frac{1}{6}a^3$. Indem man in Richtung der Höhe mit dem Streckfaktor $s = \frac{h}{\frac{a}{2}}$ streckt, erhält man daraus eine Pyramide der Höhe h. Dabei vergrößert sich das Volumen um den Faktor s, also auf
$$V = sV_0 = \frac{h}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}ha^2.$$

„Ausschöpfungsverfahren“ für das Pyramidenvolumen

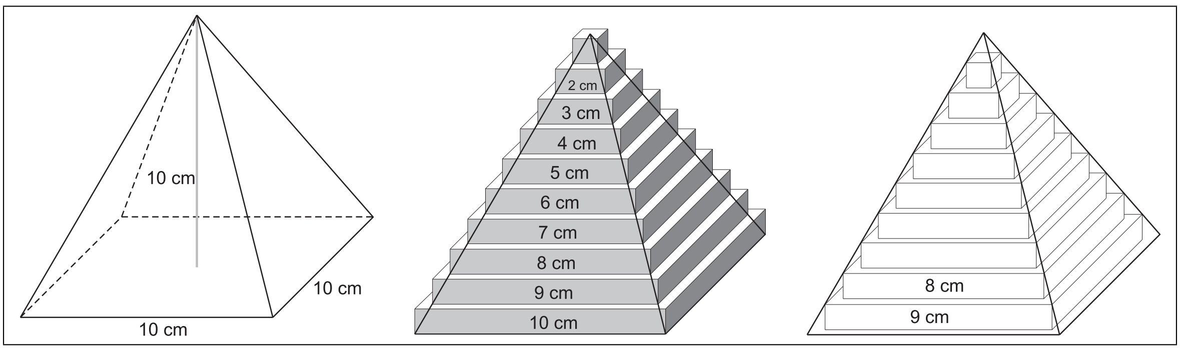
- Das Volumen einer quadratischen Pyramide soll näherungsweise bestimmt werden. Aus quadratischen „Platten“ können pyramidenähnliche Körper zusammengesetzt werden (siehe die Abbildung unten).

Das Volumen des ersten Treppenkörpers ist etwas größer als das der Pyramide. Es beträgt

$$\begin{array}{rrcl} & 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 100\text{cm}^3 \\ + & 9\text{cm} \cdot 9\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 81\text{cm}^3 \\ + & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Das Volumen des zweiten Treppenkörpers ist etwas kleiner als das der Pyramide. Es beträgt

$$\begin{array}{rrcl} & 9\text{cm} \cdot 9\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 81\text{cm}^3 \\ + & 8\text{cm} \cdot 8\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 64\text{cm}^3 \\ + & \ldots & & \ldots \end{array}$$

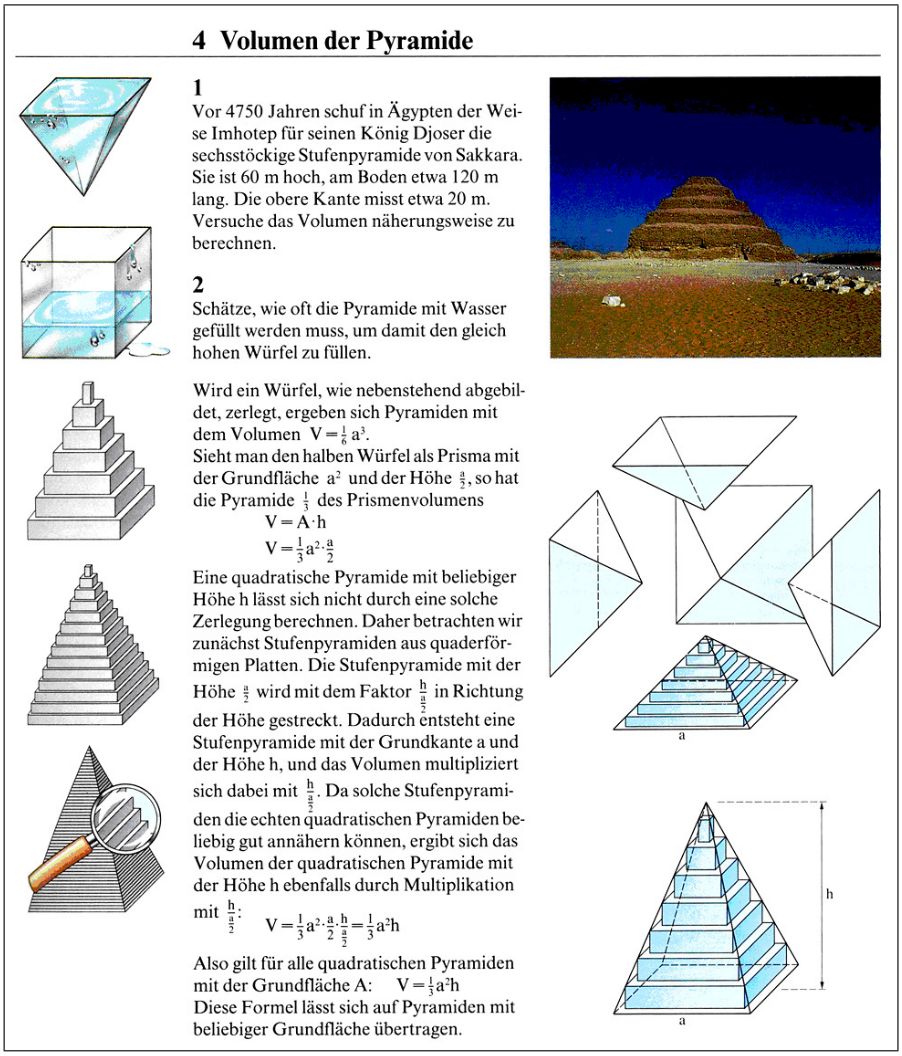


Aufgaben:

a) Führe die Berechnungen für das Volumen der beiden Treppenkörper zu Ende. Bilde den Mittelwert der beiden Volumina.

b) Vergleiche jetzt das Volumen der Pyramide mit dem Volumen des Würfels mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Vermutung: $V_{\text{Pyramide}} = \square \cdot V_{\text{Würfel}}$

In Schulbüchern lassen sich alle drei beschriebenen Herangehensweisen an die Herleitung der Formel für das Pyramidenvolumen finden, siehe den rechts abgebildeten Ausschnitt aus „Schnittpunkt“.



4 Volumen der Pyramide

1
Vor 4750 Jahren schuf in Ägypten der Weise Imhotep für seinen König Djoser die sechsstöckige Stufenpyramide von Sakkara. Sie ist 60 m hoch, am Boden etwa 120 m lang. Die obere Kante misst etwa 20 m. Versuche das Volumen näherungsweise zu berechnen.

2
Schätze, wie oft die Pyramide mit Wasser gefüllt werden muss, um damit den gleich hohen Würfel zu füllen.

Wird ein Würfel, wie nebenstehend abgebildet, zerlegt, ergeben sich Pyramiden mit dem Volumen $V = \frac{1}{6}a^3$.
Sieht man den halben Würfel als Prisma mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$, so hat die Pyramide $\frac{1}{3}$ des Prismenvolumens

$$V = A \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}$$

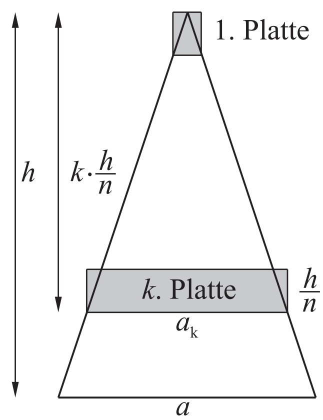
Eine quadratische Pyramide mit beliebiger Höhe h lässt sich nicht durch eine solche Zerlegung berechnen. Daher betrachten wir zunächst Stufenpyramiden aus quaderförmigen Platten. Die Stufenpyramide mit der Höhe $\frac{a}{2}$ wird mit dem Faktor $\frac{h}{\frac{a}{2}}$ in Richtung der Höhe gestreckt. Dadurch entsteht eine Stufenpyramide mit der Grundkante a und der Höhe h, und das Volumen multipliziert sich dabei mit $\frac{h}{\frac{a}{2}}$. Da solche Stufenpyramiden die echten quadratischen Pyramiden beliebig gut annähern können, ergibt sich das Volumen der quadratischen Pyramide mit der Höhe h ebenfalls durch Multiplikation mit $\frac{h}{\frac{a}{2}}$: $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{3}a^2h$

Also gilt für alle quadratischen Pyramiden mit der Grundfläche A: $V = \frac{1}{3}a^2h$
Diese Formel lässt sich auf Pyramiden mit beliebiger Grundfläche übertragen.

Das „Ausschöpfungsverfahren“ einer Pyramide durch Quader lässt sich verfeinern und durch einen Grenzübergang exaktifizieren. Anstelle von 10 Quadern werden dazu n gleich hohe Quader verwendet.

- Ist h die Höhe der Pyramide, so ist die Höhe jedes Quaders $\frac{h}{n}$. Die anderen Kantenlängen des k-ten Quaders betragen $a_k = \frac{k}{n} \cdot a$ (falls a die Grundkantenlänge der quadratischen Pyramide ist. Für das Volumen des k-ten Quaders ergibt sich daraus

$$V_k = \left(\frac{k}{n} \cdot a\right)^2 \cdot \frac{h}{n} = \frac{a^2 \cdot h}{n^3} \cdot k^2 = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot k^2.$$



Das gesamte Volumen der „Treppenpyramide“ ist somit

$$V = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Nun muss die Summe der ersten n Quadratzahlen bestimmt werden:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Für das Volumen erhalten wir daraus

$$V = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = G \cdot h \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}.$$

Für sehr große n geht diese Formel in die bekannte Volumenformel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ über.

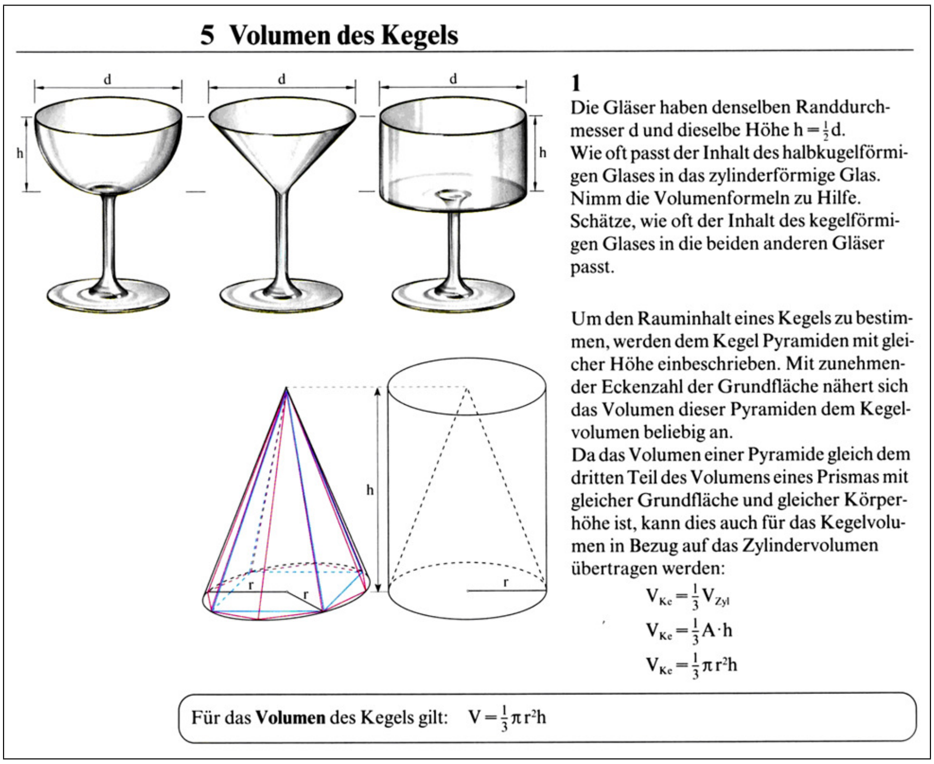
6.5.5 Das Kegelvolumen

Die Analogie zwischen Pyramide und Kegel liegt auf der Hand. Somit bieten sich vor der Behandlung des Kegelvolumens zunächst Übungen zur Wiederholung des Pyramidenvolumens an. Außerdem sollten die Schüler die Berechnungen an Kreisen wiederholen. Damit dürften sie dann recht leicht auf die Idee kommen, Volumina von Kegeln nach der Formel

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

zu berechnen. Zur Bestätigung bieten sich natürlich wieder Umfüllversuche an, wobei auch der Bezug zum Zylindervolumen hergestellt werden kann, der hier ebenfalls unbedingt ins Bewusstsein der Schüler rücken sollte.

Eine Exaktifizierung des Schlusses vom Pyramiden- auf das Kegelvolumen ist mithilfe des Prinzips von Cavalieri möglich. Mittels einer quadratischen Pyramide mit gleich großer Grundfläche und gleicher Höhe wie bei einem vorhandenen Prisma sind die Voraussetzungen das Prinzips von Cavalieri erfüllt (Strahlensatz), somit liegt gleiches Volumen von Kegel und Pyramide vor, also gilt die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ auch hier.



5 Volumen des Kegels

1
Die Gläser haben denselben Randdurchmesser d und dieselbe Höhe $h = \frac{1}{2}d$.
Wie oft passt der Inhalt des halbkugelförmigen Glases in das zylinderförmige Glas. Nimm die Volumenformeln zu Hilfe.
Schätze, wie oft der Inhalt des kegelförmigen Glases in die beiden anderen Gläser passt.

Um den Rauminhalt eines Kegels zu bestimmen, werden dem Kegel Pyramiden mit gleicher Höhe einbeschrieben. Mit zunehmender Eckenzahl der Grundfläche nähert sich das Volumen dieser Pyramiden dem Kegelvolumen beliebig an.
Da das Volumen einer Pyramide gleich dem dritten Teil des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Körperhöhe ist, kann dies auch für das Kegelvolumen in Bezug auf das Zylindervolumen übertragen werden:

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} V_{Zyl}$$
$$V_{Ke} = \frac{1}{3} A \cdot h$$
$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Für das **Volumen** des Kegels gilt: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Einführung des Kegelvolumens in dem Schulbuch „Schnittpunkt“
Die Wahl der drei Gläser könnte dadurch motiviert sein, dass bei gleichem Radius und gleicher Höhe gilt:

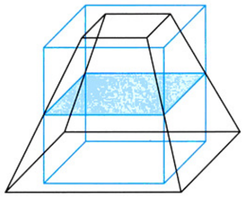
$$V_{Zylinder} = 3 \cdot V_{Kegel} = V_{Kegel} + V_{Halbkugel}$$

6.5.6 Volumina von Pyramiden- und Kegelstümpfen

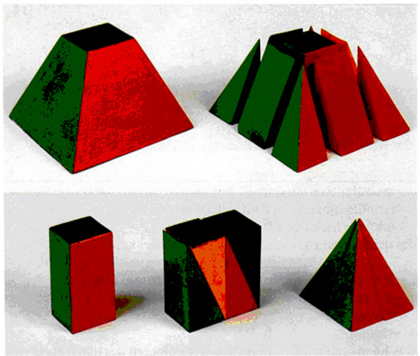
Anhand von Pyramidenstümpfen sind anspruchsvolle Überlegungen zu zusammengesetzten Körpern und/oder Differenzkörpern möglich. Die Ergebnisse lassen sich dann wiederum leicht auf Kegelstümpfe übertragen. Noch viel mehr als bei den anderen bisher behandelten Körpern, ist hier „der Weg das Ziel“. Schüler sollen *Überlegungen* zur Berechnung von Volumina anstellen, die *Formeln* können diese Überlegungen zwar „krönen“, merken werden sich die Schüler diese wohl kaum (und auswendig sollten sie selbstverständlich erst recht nicht gelernt werden).

Im Folgenden sind die Zugänge zu Volumina von Pyramiden- und Kegelstümpfen in dem Schulbuch „Schnittpunkt 6“ (Realschule, Klasse 10) wiedergegeben.

4 Volumen des Pyramidenstumpfs



Schon bei den Ägyptern und Babyloniern wurden Volumenberechnungen von pyramidenstumpfförmigen Körpern (z. B. Wasserspeicher, Dämme) durchgeführt.
Die exakten Formeln zur Berechnung waren aber noch nicht bekannt.
Das Volumen des Pyramidenstumpfs lässt sich durch den dargestellten Quader annähern. Erkläre, wie man das Quadervolumen erhält.



Ein quadratischer Pyramidenstumpf lässt sich in ein quadratisches Prisma, vier Dreiecksprismen und vier Pyramiden zerlegen. Die Dreiecksprismen lassen sich zu einem Quader, die Pyramiden zu einer quadratischen Pyramide zusammensetzen.

$V = V_{\text{Prisma}} \quad + \quad V_{\text{Quader}} \quad + V_{\text{Pyramide}}$

$V = a_2^2 \cdot h + (a_1 - a_2) \cdot a_2 \cdot h + \frac{1}{3}(a_1 - a_2)^2 h$

$V = h[a_2^2 + (a_1 - a_2) a_2 + \frac{1}{3}(a_1 - a_2)^2]$

$V = h(a_2^2 + a_1 a_2 - a_2^2 + \frac{1}{3} a_1^2 - \frac{2}{3} a_1 a_2 + \frac{1}{3} a_2^2)$

$V = h(\frac{1}{3} a_1^2 + \frac{1}{3} a_1 a_2 + \frac{1}{3} a_2^2)$

$V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$

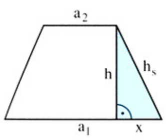
Jeder Pyramidenstumpf mit einer anderen Grundfläche lässt sich entsprechend zerlegen, so dass die Formel verallgemeinert werden kann. Der Summand $a_1 \cdot a_2$ wird dabei zu $\sqrt{A_1 \cdot A_2}$, da $a_1 \cdot a_2 = \sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2}$.

Für das **Volumen** des Pyramidenstumpfs gilt allgemein: $V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$

Für den quadratischen Pyramidenstumpf gilt: $V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$

Beispiele

a) Aus der Grundkante $a_1 = 14{,}5$ cm, der Deckkante $a_2 = 6{,}5$ cm und der Seitenhöhe $h_s = 9{,}2$ cm lässt sich zunächst die Körperhöhe h und dann das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfs berechnen.



In dem rechtwinkligen Teildreieck des Parallelschnitts gilt:

$h^2 = h_s^2 - x^2$, wobei $x = \frac{a_1 - a_2}{2}$

$h = \sqrt{9{,}2^2 - 4{,}0^2}$ cm $\qquad x = \frac{14{,}5 - 6{,}5}{2}$ cm

$h = 8{,}28$ cm $\qquad x = 4{,}0$ cm.

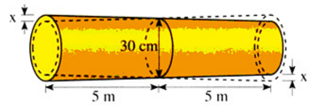
Dann gilt für das Volumen:

$V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$

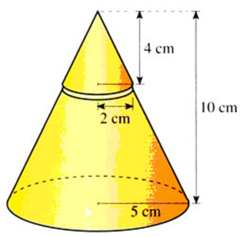
$V = \frac{8{,}28}{3}(14{,}5^2 + 14{,}5 \cdot 6{,}5 + 6{,}5^2)$ cm³

$V = 957{,}0$ cm³.

5 Volumen des Kegelstumpfs

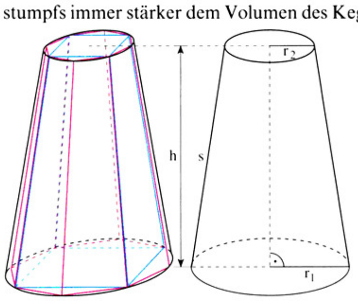


1
Die Zeichnung gibt einen Hinweis, wie man das Volumen des kegelstumpfförmigen Baumstammes näherungsweise berechnen kann. Ist das so berechnete Volumen größer oder kleiner als das wirkliche Volumen des Baumstamms? Schätze.



2
Berechne das Volumen des gesamten Kegels und des Ergänzungskegels. Mit diesen Werten kannst du auch das Volumen des Kegelstumpfs berechnen.

Um das Volumen des Kegelstumpfs zu bestimmen, wird ein Pyramidenstumpf mit gleicher Höhe einbeschrieben. Da sich mit zunehmender Eckenzahl das Volumen des Pyramidenstumpfs immer stärker dem Volumen des Kegelstumpfs annähert, kann man das Kegelstumpfvolumen aus der Volumenformel des Pyramidenstumpfs herleiten:



$V = \frac{1}{3} h (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$

Mit den beiden Grundkreisflächen $A_1 = \pi r_1^2$ und $A_2 = \pi r_2^2$ ergibt sich:

$V = \frac{1}{3} h (\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2)$

$V = \frac{1}{3} h (\pi r_1^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2)$

$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

6.5.7 Das Volumen der Kugel

Für die Herleitung der Formel des Kugelvolumens ist es von Bedeutung, ob bereits Volumina von Zylindern und Kegeln behandelt wurden. In den meisten Curricula trifft dies zu, aber mitunter wird die Kugel auch vor dem Kegel behandelt. Die populäre (unten beschriebene) Einführung des Kugelvolumens mithilfe des Prinzips von Cavalieri ist auf dieser Grundlage nicht möglich. Im Folgenden werden daher Auszüge aus einem Unterrichtsentwurf für die Einführung des Kugelvolumens (Klasse 9, Realschule) wiedergegeben, bei dem die „Herleitung“ der Volumenformel mithilfe von Analogieüberlegungen, Schätzungen und Experimenten vorgenommen wurde.

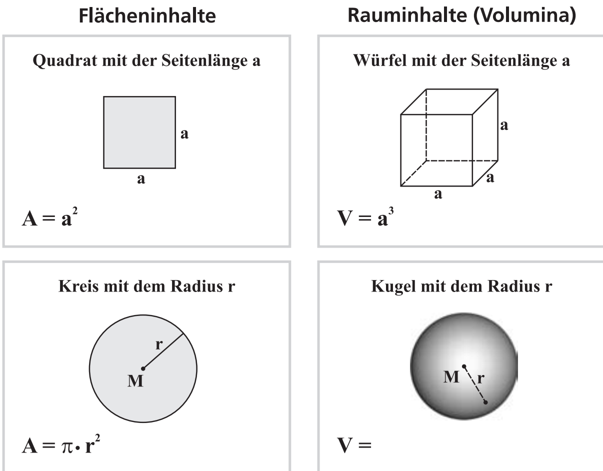
Die Gleichung $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ für das Volumen der Kugel enthält zwei Aussagen:

- Das Volumen der Kugel ist proportional zur dritten Potenz des Radius.
- Der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{4}{3}\pi$.

Während die erste dieser Aussagen durch grundsätzliche Überlegungen und Analogiebetrachtungen gewonnen werden kann (und sollte), sind für die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors Experimente und anschauliche Vergleiche notwendig.

Für die Erkenntnis der Proportionalität zwischen r^3 und V erscheint es sinnvoll, Analogiebetrachtungen zu anderen Körpern des Raumes anzustellen. (Die dritte Potenz einer bestimmenden Länge tritt u. a. auch beim Volumen des Würfels auf.[a])

[a] Um die Voraussetzungen für die Durchführung dieser Analogiebetrachtungen zu sichern, erfolgt am Anfang der Stunde eine kurze Wiederholung der Berechnung von Flächeninhalten bzw. Volumina von Quadraten, Kreisen und Würfeln. Dabei kommt es auf die verwendeten Gleichungen sowie die Auswirkung von Längenänderungen auf die Änderung des Flächeninhalts bzw. Volumens an.



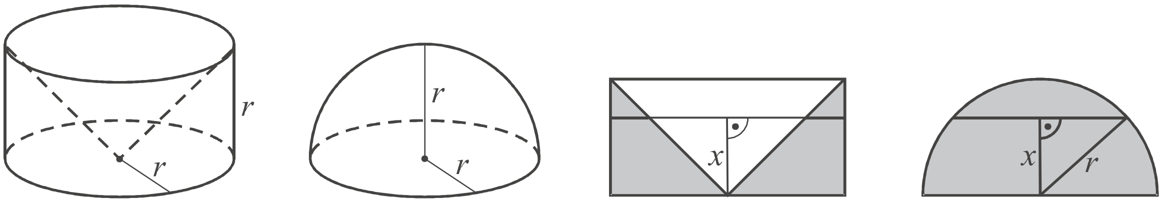
Es erscheint aussichtsreich, dass die Schüler aufgrund dieser Betrachtungen selbst zu der Vermutung $V \sim r^3$ gelangen. Zudem dürfte dann für viele von ihnen recht nahe liegen, dass das Kugelvolumen „etwas mit π zu tun hat“. An dieser Stelle kann durchaus damit gerechnet werden, dass einige Schüler für das Kugelvolumen den Vorschlag $V = \pi \cdot r^3$ unterbreiten. Dieser Vorschlag sollte dann zunächst im Raum stehen bleiben – mit der Ankündigung, ihn zu überprüfen.

Ist die Proportionalität zwischen V und r^3 herausgearbeitet, gilt die nächste Untersuchung der Frage nach dem Proportionalitätsfaktor. Diese Frage lässt sich bei dem hier beschriebenen Vorgehen nur experimentell beantworten. Dazu werden Radien und Volumina von Kugeln ermittelt (bei Hohlkugeln durch Messung des Volumens des ursprünglich enthaltenen Wassers sowie bei Vollkugeln nach der Überlaufmethode). Aus den Messwerten berechnen die Schüler Faktoren zwischen r^3 und V. Bei hinreichend gutem Material und sorgfältiger Versuchsdurchführung sollten sich Werte zwischen 4,0 und 4,4 ergeben (anstelle von $\frac{4}{3}\pi \approx 4.189$). Der exakte Proportionalitätsfaktor muss letztendlich durch den Lehrer mitgeteilt werden.

Herleitung der Gleichung für das Kugelvolumen mithilfe des Prinzips von Cavalieri

Es werden eine Halbkugel, ein Zylinder und ein Kreiskegel mit gleichem Radius r betrachtet, die Höhen des Zylinders und des Kegels haben ebenfalls die Länge r. Mit dem Prinzip von Cavalieri lässt sich zeigen, dass das Volumen der Halbkugel gleich dem Volumen des Differenzkörpers aus dem Zylinder und dem Kegel ist. Auf jeder Höhe x ist nämlich der Flächeninhalt des Kreisringes, der als Durchschnitt des Differenzkörpers und einer zur Grundfläche parallelen Ebene entsteht, gleich dem Flächeninhalt des Durchschnitts (Kreises) der Halbkugel mit dieser Ebene.[11]

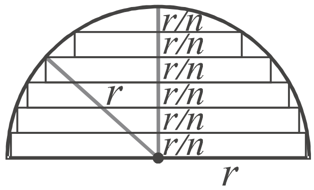
[11] Aus dem Differenzkörper schneidet die Ebene einen Kreisring aus, der den Aussendruchmesser r und den Innendurchmesser x, also den Flächeninhalt $\pi r^2 - \pi x^2$ hat. Der Schnitt mit der Halbkugel ist ein Kreis, der den Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$ und somit den Flächeninhalt $\pi(r^2 - x^2)$ hat.



Bei bekannten Volumina von Zylinder und Kegel ergibt sich daraus $V_H = \pi \cdot r^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$ für das Volumen der Halbkugel, also $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ für das Kugelvolumen. Dieser Weg kann nur beschritten werden, wenn Schülern die Volumina von Kegel und Zylinder bereits bekannt sind.

Kugelvolumen und Treppenkörper

Ein ebenfalls recht häufig vorgeschlagener Weg zur Gewinnung der Gleichung für das Kugelvolumen besteht in der Annäherung einer Kugel (bzw. einer Halbkugel) durch einen „Treppenkörper“, der aus Zylindern gleicher Höhe besteht.



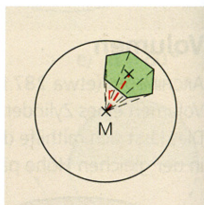
Das Volumen jedes dieser Zylinder kann in Abhängigkeit von der Höhe (die vom Radius der Kugel und der Anzahl n der einbeschriebenen Zylinder abhängt) und dem Radius des entsprechenden Zylinders (der sich mithilfe des Satzes des Pythagoras aus der Tatsache ergibt, dass alle Punkte der Kugel denselben Abstand vom Mittelpunkt haben) ausgedrückt werden.

Durch Betrachtung sehr vieler Zylinder (mit entsprechend geringer Höhe) und Vollzug des Grenzübergangs ist die Herleitung der Gleichung $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ möglich. Allerdings kommen Grenzwertbetrachtungen in Klasse 9 bzw. 10 nicht in Frage. Die Reduktion der Herleitung auf die Betrachtung einer recht kleinen Zahl von Zylindern und die Berechnung von deren Volumina führt lediglich zu einer Schätzung für das Kugelvolumen (bzw. zur Gewinnung einer unteren Schranke). Der Aufwand hierfür erscheint kaum gerechtfertigt, da sich Schätzungen auch auf unmittelbare Weise durch Messungen von Flüssigkeitsvolumina durchführen lassen.

6.5.8 Der Oberflächeninhalt der Kugel – Teil 2

Mithilfe des Kugel- und des Pyramidenvolumens ist nun auch eine exakte Herleitung der Formel für die Kugeloberfläche möglich.

Die **Oberfläche** des Balls ist aus regelmäßigen Fünfecken oder Sechsecken zusammengesetzt. Verbindet man alle Ecken dieser Flächen mit dem Kugelmittelpunkt des Balls, so wird dieser näherungsweise in Pyramiden aufgeteilt, die alle als Höhe den Kugelradius haben. Diese Zerlegung ist für jede Kugel denkbar. Die Annäherung wird mit zunehmender Anzahl der Teilflächen immer besser.



Es gilt für die Pyramiden: $V_1 = \frac{1}{3} A_{G1} \cdot r$ $\quad V_2 = \frac{1}{3} A_{G2} \cdot r$ $\quad V_3 = \frac{1}{3} A_{G3} \cdot r$ usw.

Für das Volumen der Kugel gilt dann: $V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$

$$V = \tfrac{1}{3} A_{G1} \cdot r + \tfrac{1}{3} A_{G2} \cdot r + \tfrac{1}{3} A_{G3} \cdot r + \ldots + \tfrac{1}{3} A_{Gn} \cdot r$$

$$V = \tfrac{1}{3} r (A_{G1} + A_{G2} + A_{G3} + \ldots A_{Gn})$$

Da alle Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel bilden, gilt: $V = \frac{1}{3} r \cdot A_O$

Man setzt für V die Formel zur Berechnung des Kugelvolumens ein: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot A_O$

Die Formel wird nach A_O aufgelöst: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot A_O \quad | \cdot 3$

$$4\pi r^3 = r \cdot A_O \quad | : r$$

$$4\pi r^2 = A_O$$

S Für den **Oberflächeninhalt einer Kugel** gilt: $A_O = 4\pi r^2$

Aus: *Mathematik 9* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2004.

7 Didaktische Aspekte der Trigonometrie

Die Behandlung der Trigonometrie kann in mancherlei Hinsicht als „Krönung“ des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I angesehen werden. Es bestehen Berührungspunkte besonders vieler Leitideen („Raum und Form“, „Messen“, „funktionaler Zusammenhang“ sowie auch „Zahl“) und es ergeben sich vielfältige Möglichkeiten des Anwendens, Modellierens und Vernetzens.

7.1 Stellung der Trigonometrie im Mathematikunterricht der S I

Die zumeist recht weit am Ende der Sekundarstufe I behandelte Trigonometrie weist eine Vielzahl von Bezügen zu vorherigen Inhalten des Mathematikunterrichts auf:

- Leitidee Raum und Form
  - Kongruenzgeometrie (speziell Kongruenzsätze)
  - Dreieckskonstruktionen
  - Ähnlichkeit (einschließlich Strahlensätze)
  - Kreise und Kreisteile

  Durch die Trigonometrie werden Dreieckskonstruktionen durch Berechnungen fehlender Größen in Dreiecken ergänzt. So wie sich anhand der Kongruenzsätze Aussagen über die Konstruierbarkeit von Dreiecken machen lassen, geben sie auch Anhaltspunkte für die „Berechenbarkeit“ fehlender Größen in Abhängigkeit von gegebenen Größen.

  Die Übereinstimmung von Winkeln und Seitenverhältnissen ähnlicher Dreiecke ist die entscheidende Grundlage dafür, Zusammenhänge von Winkeln und Streckenverhältnissen – und somit trigonometrische Beziehungen – zu betrachten.

  Bogenlängen von Kreissektoren bilden die Grundlage für das meist bei der Behandlung der Trigonometrie eingeführte Bogenmaß; der Einheitskreis ist von zentraler Bedeutung für die Zuordnung von Funktionswerten zu Winkelgrößen außerhalb des Intervalls [0;90°]. Schließlich erweitert die Trigonometrie die Möglichkeiten, Berechnungen an Kreisen durchzuführen. Es zeigt sich hieran bereits, dass bei der Behandlung der Trigonometrie die Grenzen zwischen den Leitideen Raum und Form sowie Messen „verschwimmen“.

- Leitidee Messen
  - Satz bzw. Satzgruppe des Pythagoras
  - Flächenberechnungen
  - Körpergeometrie; Oberflächen- und Volumenberechnungen

  Die mit der Behandlung der Ähnlichkeit und dem Satz bzw. der Satzgruppe des Pythagoras eingeführten Möglichkeiten, Geometrie auch rechnerisch zu betreiben, werden durch die Trigonometrie bedeutend erweitert. Dabei bleiben (vor allem rechtwinklige) Dreiecke die „Elementarbestandteile“ mithilfe derer Berechnungen an Figuren und Körpern vorgenommen werden. Die Möglichkeiten, Flächen- und Rauminhalte zu berechnen, erweitern sich durch die trigonometrischen Beziehungen hinsichtlich der benötigten Größen erheblich.

- Leitidee Funktionaler Zusammenhang

  Die Schüler lernen eine neue Klasse von Funktionen kennen, dabei rücken auch Eigenschaften von Funktionen (wie die Periodizität) in den Blickpunkt, die ihnen zuvor unbekannt waren, da die bisher behandelten Funktionen diese Eigenschaft nicht besitzen. Mit dem Zusammenhang zwischen Anstieg und Steigungswinkel linearer Funktionen erfolgt zudem eine erweiterte Betrachtung hinsichtlich bereits bekannter Funktionen.

Die Leitidee Zahl wurde in dieser Auflistung nicht explizit erwähnt. Verbindungen dazu sind jedoch gegeben, da in der Trigonometrie vielfältige Berechnungen durchgeführt werden. Hierbei sind u. a. Überlegungen zu sinnvollen Genauigkeiten anzustellen und Rechenergebnisse kritisch unter Rückbezug auf geometrische Sachverhalte sowie Anwendungskontexte zu überprüfen.

7.1.1 Algebraisierung der Geometrie – von Konstruktionen zu Berechnungen

Beginnend in der Grundschule und im gesamten Verlauf der S I treten geometrische Figuren immer wieder auf, wobei Begriffsklärungen und Klassifikationen, Untersuchungen von Eigenschaften und Beziehungen sowie Konstruktionen zunehmend durch Berechnungen ergänzt werden:

- Bereits in der Primarstufe werden *Flächeninhalte* von Rechtecken berechnet. Meist zu Beginn der S I erfolgt eine Erweiterung auf Parallelogramme und Dreiecke, später auf weitere Figuren bis hin zu Kreisen.
- Durch die Betrachtung der *Innenwinkelsumme* (vor allem von Drei-, aber auch von Vier- und Vielecken) können Schüler fehlende *Winkelgrößen* aus anderen Winkelgrößen von Figuren berechnen und auf dieser Grundlage vielfältige Problemaufgaben bearbeiten.
- Nach der Behandlung der *Strahlensätze* und der *Ähnlichkeit* geometrischer Figuren lassen sich Längen unbekannter Strecken durch die Einbettung in Strahlensatzfiguren oder das Aufsuchen geeigneter ähnlicher Dreiecke berechnen.
- Nach der Behandlung des *Satzes des Pythagoras* (und evtl. des Katheten- und Höhensatzes) ergeben sich weitere Möglichkeiten zur Berechnung von Streckenlängen und vielfältige Anwendungen, die vielfach darauf beruhen, Figuren in rechtwinklige Teildreiecke zu zerlegen.
- Mithilfe der *trigonometrischen Beziehungen* ist es schließlich möglich, *alle* unbekannten Größen in einem Dreieck zu berechnen, wenn dieses durch die bekannten Größen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

Diese Schritte zeigen in groben Zügen die zunehmende „Arithmetisierung“ bzw. „Algebraisierung“ des Geometrieunterrichts im Laufe der Schulzeit auf. Dabei verlieren jedoch „rein“ geometrische Herangehensweisen wie Konstruktionen sowie Überlegungen zu Kongruenz und Ähnlichkeit keinesfalls ihre Bedeutung.

E. Ch. Wittmann hob den Aspekt der *„Trigonometrie als Algebraisierung der Kongruenzsätze“* hervor und führte als Ziel der Trigonometrie an:

„Es sollen Formeln entwickelt werden, die es erlauben, aus Seitenlängen und Winkelmaßen, die ein Dreieck bis auf Kongruenz festlegen, die Maße der restlichen Stücke zu berechnen.“ (Wittmann 1987, S. 356f.)

Hieran wird die Bedeutung von Kongruenzüberlegungen als Bindeglied zwischen geometrischen Konstruktionen und Berechnungen deutlich: Die Kongruenzsätze geben an, anhand welcher Größen Dreiecke eindeutig *konstruierbar* sind und gleichzeitig, welche Größen bekannt sein müssen, um die fehlenden Stücke zu *berechnen*. Dieser Zusammenhang zwischen Konstruktionen und Berechnungen wird auch bei Betrachtung von Aufgaben deutlich, die in unterschiedlichen Schuljahren fast identisch gestellt, aber sehr unterschiedlich gelöst werden.

Aufgaben zur konstruktiven bzw. rechnerischen Bestimmung fehlender Stücke in Dreiecken
Aufgabe aus einem Schulbuch für die 8. Klasse (Brandt u. a. 2006, S. 15) • Welcher Kongruenzsatz garantiert die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks ABC? Konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion. Entnimm der Zeichnung die restlichen Seiten und Winkel. $b = 3{,}8$ cm; $\alpha = 35°$; $\gamma = 125°$ *Aufgabe aus einem Schulbuch für die 10. Klasse* (Koullen 2008, S. 56) • Berechne die fehlenden Winkel und Seiten des Dreiecks ABC. $c = 5{,}4$ cm; $\alpha = 42°$; $\beta = 65°$

Auch verschiedene Anwendungsaufgaben, die zuvor (meist unter Nutzung eines geeigneten Maßstabs) durch Konstruktionen und Messungen gelöst wurden, lassen sich nach Einführung der trigonometrischen Beziehungen rechnerisch bearbeiten. Dies betrifft u. a. einige Gegenstände des Physikunterrichts der S I, z. B. die Bestimmung resultierender Kräfte.

7.1.2 Fundamentale Idee: Mit Dreiecken Konstruktions- und Vermessungsprobleme lösen

Das Wort „Trigonometrie“ kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Dreiecksmessung“, womit jedoch weniger unmittelbare Messungen, sondern Berechnungen unbekannter aus bekannten Größen in Dreiecken gemeint sind.

Dreiecke als Grundbestandteile geometrischer Figuren und Körperoberflächen haben eine hohe Bedeutung für geometrische Konstruktionen sowie Berechnungsaufgaben. Da sich alle geradlinig begrenzten Figuren aus Dreiecken zusammensetzen, sind Berechnungen von Seitenlängen, Winkelgrößen und Flächeninhalten von Dreiecken sehr breit anwendbar. Das Auffinden und Nutzen geeigneter Teildreiecke durch Zerlegung komplexerer Figuren oder auch die Ergänzung von Figuren durch Dreiecke zu einfacher handhabbaren Figuren ist also eine zentrale Strategie des gesamten Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe I und kommt sowohl bei Konstruktionen als auch bei Berechnungen zum Tragen. In vielen Fällen – u. a. bei einer Reihe von Anwendungen des Satzes des Pythagoras und insbesondere in der Trigonometrie – sind darüber hinaus Dreiecke in rechtwinklige Teildreiecke zu zerlegen oder zu solchen zu ergänzen.

Den auf Bruner (1970) zurückgehenden Begriff der *fundamentalen Idee* fasste Schreiber (1983) durch die Eigenschaften *Weite* (Allgemeinheit), *Fülle* (vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz) sowie *Sinn* (Verankerung im Alltagsdenken). Schwill (1995) präzisierte diesen Begriff in folgender Weise:

„Eine fundamentale Idee bezüglich eines Gegenstandsbereichs ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das

- *in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (Horizontalkriterium),*
- *auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (Vertikalkriterium),*
- *in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (Zeitkriterium),*
- *einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (Sinnkriterium).“*

Das Zurückführen von Konstruktions-, Vermessungs- und Berechnungsproblemen auf Dreiecke entspricht diesen Kriterien – bezogen auf den Bereich der Schulgeometrie – und ist somit als eine fundamentale Idee des Geometrieunterrichts anzusehen. Diese wird auch in den folgenden Abschnitten zur Einführung und Anwendung der Trigonometrie immer wieder von Bedeutung sein.

7.2 Einstiege in die Trigonometrie

Zur Einführung in die Trigonometrie bieten sich im Unterricht vor allem zwei Herangehensweisen an:

- Definition von Sinus und Kosinus für spitze Winkel am rechtwinkligen Dreieck, spätere Erweiterung für beliebige Winkel z. B. am Einheitskreis;
- Definition von Sinus und Kosinus für beliebige Winkelgrößen am Einheitskreis, Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke.

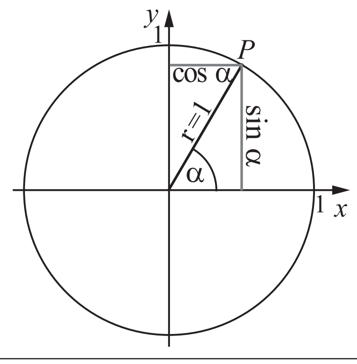
Einführung von Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Zu jedem Winkel α in einem Kreis mit dem Radius 1 (Einheitskreis), dessen Scheitelpunkt der Nullpunkt ist und der den positiven Strahl der x-Achse als einen Schenkel hat, gehört ein zweiter Schenkel, der den Kreis in einem Punkt P schneidet.

Der *Sinus des Winkels* α ist die y-Koordinate des Punktes P. Der *Kosinus des Winkels* α ist die x-Koordinate des Punktes P (sein Betrag somit der Abstand des Punktes P von der y-Achse).

$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x$

(nach Warmuth 2000, S. 156)



Beide oben genannte Zugänge sind in Schulbüchern und im Unterricht anzutreffen. Während bei der Einführung am Einheitskreis vor allem die Leitidee „funktionaler Zusammenhang“ betont wird, stehen bei der Einführung am rechtwinkligen Dreieck Berechnungen an geometrischen Figuren schon zu Anfang im Mittelpunkt. Beide Varianten weisen Vor- und Nachteile auf:

- Bei der Einführung am Einheitskreis können Sinus und Kosinus sofort für beliebige Winkel definiert werden. Dieses Vorgehen ist daher zeitsparend und hat den Vorteil, dass die Funktionswerte von Sinus und Kosinus direkt als Streckenlängen abgelesen werden können. Zudem liegt der Übergang zu den Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion sehr nahe, siehe Abschnitt 7.4.
- Bei der Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck werden zunächst nur Spezialfälle (spitze Winkel) betrachtet. Für eine Verallgemeinerung auf beliebige Winkelgrößen sind umfangreiche zusätzliche Überlegungen notwendig. Zudem lassen sich die Werte für Sinus und Kosinus im Allgemeinen nicht unmittelbar als Streckenlängen ablesen, sondern werden als Längen*verhältnisse* ausgedrückt (siehe Abschnitt 7.2.1). Jedoch sollten die Schüler mit der Untersuchung von Streckenverhältnissen durch die Behandlung der Ähnlichkeit vertraut sein. Zudem haben sie die Betrachtung von Dreiecken seit Jahren als „fundamentale Idee“ im Geometrieunterricht kennengelernt.

Unter den Gesichtspunkten der Effizienz und der „Nähe“ zu den Graphen und Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen wäre also eine Einführung in die Trigonometrie anhand des Einheitskreises zu bevorzugen. Jedoch bestehen dabei recht wenige Anknüpfungspunkte an frühere Unterrichtsinhalte. Hingegen ergeben sich bei einer Einführung in die Trigonometrie im Sinne von „Dreiecksberechnung“ vielfältige Anknüpfungen an frühere Unterrichtsinhalte und die Möglichkeit, die Trigonometrie genetisch[12] in den Mathematikunterricht der S I einzubetten.

Um eine Entscheidung hinsichtlich des didaktisch sinnvollsten Einstiegs in die Trigonometrie zu treffen, lassen sich die folgenden, von Malle aufgestellten, *Forderungen an einen genetischen Mathematikunterricht* heranziehen:

- *Begriffe und Theoreme sollen den Lernenden nicht an den Kopf geknallt werden, sondern aus Problemstellungen oder passenden Situationen heraus entwickelt werden.*
- *Begriffe und Theoreme sollen erst dann eingeführt werden, wenn man sie braucht.*
(*Kein Lernen auf Vorrat!*)
- *Mit eingeführten Begriffen und Theoremen soll wirklich gearbeitet werden.*
(*Kein totes Wissen! Keine Sackgassen!*)
- *Aus erfolgten Problemlösungen sollen nach Möglichkeit weitere Probleme entwickelt werden.*
- *Verallgemeinerungen sollen schrittweise erfolgen. Man sollte nicht gleich die allgemeinste Version anbieten.*
- *Es soll am Vorwissen der Lernenden angeknüpft werden.*
- *Die Darstellung soll keine Lücken bzw. Sprünge aufweisen, die das Verständnis erschweren oder unmöglich machen.*

Hinsichtlich dieser Forderungen erweist sich die Herangehensweise an die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck als geeigneter, wenngleich diese zunächst auf spitze Winkel eingeschränkt ist und deshalb ein zweischrittiges Vorgehen erfordert. Mit den oben aufgezählten Forderungen zusammenhängende Überlegungen dürften dazu beigetragen haben, dass sich das Vorgehen am rechtwinkligen Dreieck in den vergangenen beiden Jahrzehnten in den meisten Schulbüchern (aller Schularten) weitgehend durchgesetzt hat. Dabei sind natürlich in Details sehr unterschiedliche Vorgehensweisen möglich, auf die im Folgenden noch eingegangen wird.

[12] Den Begriff „genetisch“ beschrieb E. Ch. Wittmann folgendermaßen: „Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.“ (Wittmann 1981, S. 130)

7.2.1 Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck

Zum Einstieg in die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck sollten Schüler

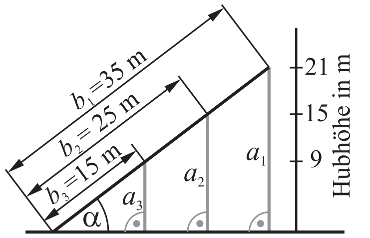
- anhand von Beispielen erkennen, dass es in Anwendungssituationen oft sinnvoll ist, Seitenlängen bzw. Seitenverhältnisse mithilfe von Winkeln zu berechnen (oder umgekehrt) sowie
- zu der Erkenntnis gelangen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt.

Die unten angegebenen Beispiele (die aus Schulbüchern für die Hauptschule bzw. für das Gymnasium entnommen sind) zeigen Anwendungssituationen auf, welche die Einführung des Sinus (und in dem zweiten Beispiel zusätzlich des Tangens) motivieren können.

Autokran (aus Lernstufen Mathematik 10: Leppig 1995, S. 116)

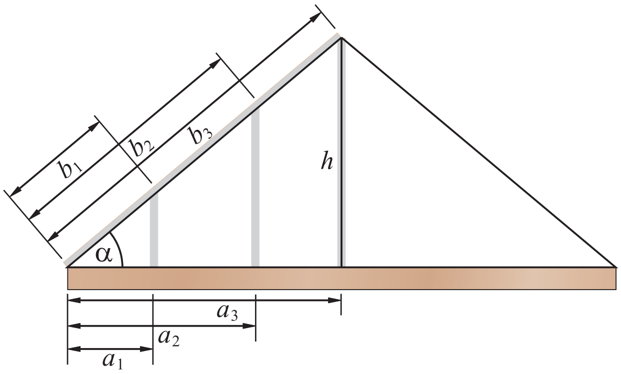
Der Ausleger eines Autokrans ist 9,5 m lang und kann bis auf eine Länge von 35 m ausgefahren werden. Man kann ihn bis zu einem Winkel von höchstens 80° gegen die Waagrechte aufrichten. Vom Winkel und von der Länge des Auslegers hängen seine Tragkraft und die Hubhöhe ab, um die er die Last heben kann. Die Abhängigkeit der Hubhöhe von der Länge des Auslegers bei einem festen Winkel können wir in einem Schaubild (Maßstab 1:1000) aufzeichnen.

Für die drei im Schaubild gezeichneten Fälle berechnen wir den Quotienten aus der Hubhöhe und der Länge des Auslegers.



Der Dachboden (aus Fokus 5: Lütticken u. Uhl 2008, S. 46)

Auf einem Dach soll eine Solaranlage montiert werden. Damit die Sparren des Dachstuhls das schwere Gewicht aushalten, müssen sie durch senkrechte Balken gestützt werden. Das Dach hat einen Neigungswinkel von $\alpha = 40°$ und das Dachgeschoss eine maximale Höhe von h = 6,32 m. Um die Länge der Stützbalken zu bestimmen, multipliziert der Handwerker entweder die gewünschten Abstände b_1, b_2 und b_3 mit der Zahl 0,64 oder die Abstände a_1, a_2 und a_3 mit 0,84.



Wie kommt er an diese Zahlen? Experimentiere mit anderen Dachneigungswinkeln. Wie groß wären die Zahlen des Handwerkers dann?

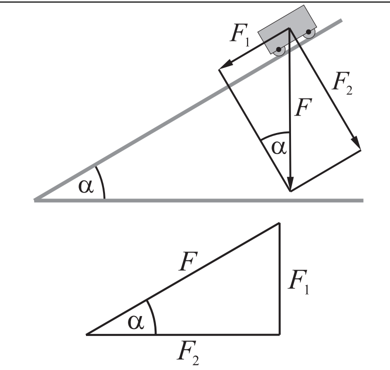
Für einen genetischen Einstieg in die Trigonometrie schlug Malle die Bestimmung von Kräften an der geneigten Ebene vor (siehe Malle 2001). Ein derartiger Einstieg setzt natürlich eine Abstimmung mit dem Fach Physik voraus. Wenn dort Kräfte an der geneigten Ebene bereits konstruktiv ermittelt wurden, so bietet diese Thematik einen sinnvollen Ansatzpunkt, nach rechnerischen Wegen zu suchen.

Bestimmung von Kräften an der geneigten Ebene (Malle 2001)

Ein Schrägaufzug steigt unter dem Winkel $\alpha = 30°$ an und hat das Gewicht $F = 5000$ N (Newton). Mit welcher Kraft F_1 wird er längs des Gleises hinuntergezogen? Mit welcher Kraft F_2 wird er auf das Gleis gedrückt?

Es lässt sich herausarbeiten (vgl. Malle 2001, S. 40), dass diese Fragen auch folgendermaßen gestellt werden können:

Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man den Winkel α und die Hypotenusenlänge F. Man ermittle die Gegenkathetenlänge F_1 und die Ankathetenlänge F_2.



In den Schulbüchern Real 10 (Koullen 1998) und Konkret 6 (Koullen 2008) wird an den Beginn der Kapitel zur Trigonometrie ein Beispiel gestellt, das sich auf den Tangens bezieht. Dies ist zwar ungewöhnlich – meist wird zunächst der Sinus thematisiert – erscheint aber durchaus sinnvoll, da die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Anstieg (Steigung) und Steigungswinkel bereits seit der Behandlung der linearen Funktionen offen ist.

Einstieg in die Trigonometrie über den Zusammenhang zwischen Anstieg und Steigungswinkel

Ein großer Automobilkonzern hat für einen Werbespot sein neues Pkw-Top-Modell eine Skischanze hinauffahren lassen. Auf dem letzten Abschnitt der Schanze wurde eine Steigung von fast 80% bewältigt.

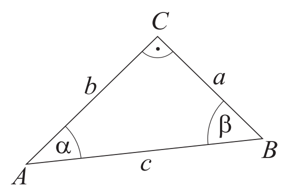
Erläutere mithilfe der Abbildung den Begriff Steigung. Erkläre, wie die Angabe 80% Steigung entstehen kann.

Allen aufgeführten Beispielen ist gemeinsam, dass Anwendungsprobleme an den Anfang gestellt werden, die bereits in früheren Schuljahren durch maßstäbliche Darstellungen konstruktiv bearbeitet werden konnten. Derartige Anwendungen können nun die exakte rechnerische Bestimmung fehlender Größen in rechtwinkligen Dreiecken motivieren.

Im Anschluss an die Diskussion von Einführungsbeispielen sollten die Schüler zu der Erkenntnis gelangen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt.

Aufgabe zu Streckenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck (aus Lütticken/Uhl 2008)

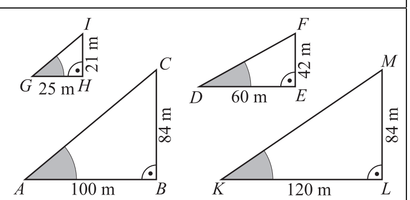
Zeichne verschiedene rechtwinklige Dreiecke, die im Winkel α übereinstimmen. Miss in jedem Dreieck die Seitenlängen, berechne daraus die verschiedenen Längenverhältnisse innerhalb des Dreiecks und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Was fällt dir auf?



Schüler können den Zusammenhang zwischen Streckenverhältnissen und Winkelgrößen auch durch beispielbezogene Aufgaben erarbeiten.

Aufgabe zu Streckenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck

In einer Maßstabszeichnung wurden Steigungsdreiecke von Geländeabschnitten gezeichnet. Begründe damit die Aussage: Jeder Steigung m ist genau ein Steigungswinkel α zugeordnet.



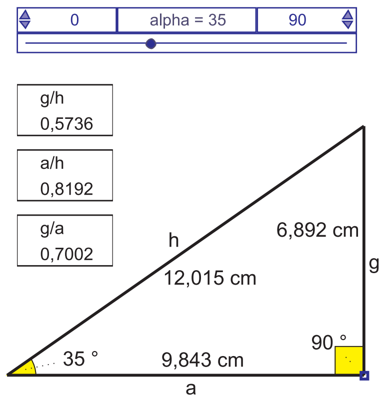
Die Erkenntnis, dass in rechtwinkligen Dreiecken eineindeutige Zuordnungen zwischen Streckenverhältnissen und Winkeln bestehen, lässt sich auch durch Experimente in einer dynamischen Geometriesoftware unterstützen.

Streckenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck mithilfe einer Geometriesoftware

Es wird ein Dreieck konstruiert, in dem ein Winkel (beispielsweise durch einen Schieberegler) sowie die Länge einer Kathete verändert werden können. Wird nur diese Länge verändert (was eine Streckung des Dreiecks bewirkt), so stellt sich heraus, dass die Streckenverhältnisse $\frac{g}{h}$, $\frac{a}{h}$ und $\frac{g}{a}$ unverändert bleiben.

Durch Veränderung des Winkels können die Schüler zudem die davon abhängige Änderung dieser Streckenverhältnisse erkunden sowie später – nach der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens – Funktionswerte näherungsweise ermitteln.

Eine Beispieldatei für Euklid Dynageo steht auf der Internetseite `www.didaktik-der-geometrie.de` zur Verfügung (Kap. X).

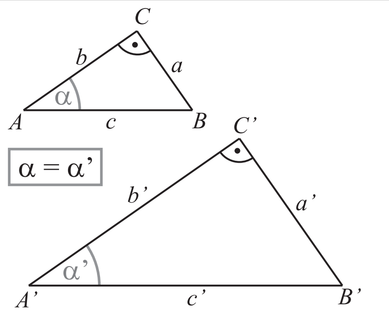


Nachdem die Schüler festgestellt haben, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt, sollte diese – für die Trigonometrie zentrale – Erkenntnis gesichert werden. Dies ist durch Überlegungen zur Ähnlichkeit möglich.

Begründung durch Ähnlichkeitsüberlegungen (aus Maroska 1996, S. 50)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel übereinstimmen, sind die Dreiecke ähnlich. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind also schon dann ähnlich, wenn sie in einem ihrer spitzen Winkel übereinstimmen. Die Verhältnisse entsprechender Seiten sind dann gleich.

Es gilt also $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$.

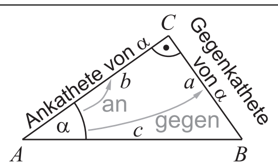


Nachdem die Erkenntnis gewonnen und gesichert wurde, dass sich in rechtwinkligen Dreiecken Winkelgrößen eindeutig[13] Seitenverhältnisse zuordnen lassen, einigen diesbezüglichen Aufgaben und zusätzlichen Beispielen sowie einer Wiederholung der Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse, können nun die Begriffe Sinus, Kosinus und Tangens eingeführt werden. Dabei ist es möglich, zunächst Beispiele zu betrachten, die zur Definition eines dieser Begriffe führen und die anderen Begriffe anschließend anhand dafür geeigneter Beispiele zu erarbeiten. Es können aber auch Sinus, Kosinus und Tangens gemeinsam definiert werden, wenn zuvor bereits unterschiedliche Seitenverhältnisse untersucht wurden.

Definition von Sinus, Kosinus und Tangens in einem Schulbuch (Maroska 1996, S. 52)

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$



Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α werden bezeichnet durch:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Man liest: Sinus von α, Kosinus von α, Tangens von α.

[13] Diese Zuordnung ist sogar eineindeutig. Jedoch ist an dieser Stelle zunächst vor allem eine Richtung (Winkelgröße $\to$ Seitenverhältnis) interessant.

7.3 Eigenschaften und Anwendungen von Sinus, Kosinus, Tangens

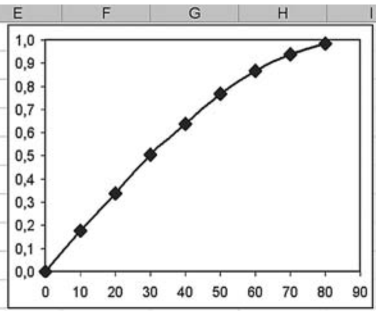
Nach der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens sollten Schüler einige Werte näherungsweise und spezielle Werte exakt bestimmen, Übungs- und Anwendungsaufgaben bearbeiten sowie Eigenschaften und Zusammenhänge untersuchen. Es empfiehlt sich nicht, diese Aspekte isoliert zu behandeln, sondern sie zu „verzahnen". Die Reihenfolge der folgenden Abschnitte soll somit keine zeitliche Abfolge für die Behandlung im Unterricht vorgeben.

7.3.1 Näherungswerte bestimmen und auswerten

Bevor Funktionswerte trigonometrischer Funktionen – mehr oder weniger gedankenlos – mit dem Taschenrechner bestimmt werden, ist die Frage aufzuwerfen, *wie* sich Funktionswerte ermitteln lassen. Dafür bietet sich zunächst die Bestimmung zu einigen Winkelgrößen gehörender Streckenverhältnisse durch Messungen an.[14] Die so gewonnenen Näherungswerte können in einer Tabelle zusammengefasst und in einem Koordinatensystem dargestellt werden (manuell oder mithilfe des Computers). Ohne bereits näher auf Eigenschaften trigonometrischer Funktionen einzugehen, ist dies u. a. deshalb sinnvoll, da die Schüler daran deutlich erkennen können, dass keine linearen Zusammenhänge zwischen Winkelgrößen und ihren Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten bestehen.

Bestimmung und Darstellung einiger Näherungswerte der Sinusfunktion mithilfe der Tabellenkalkulations-Software Excel

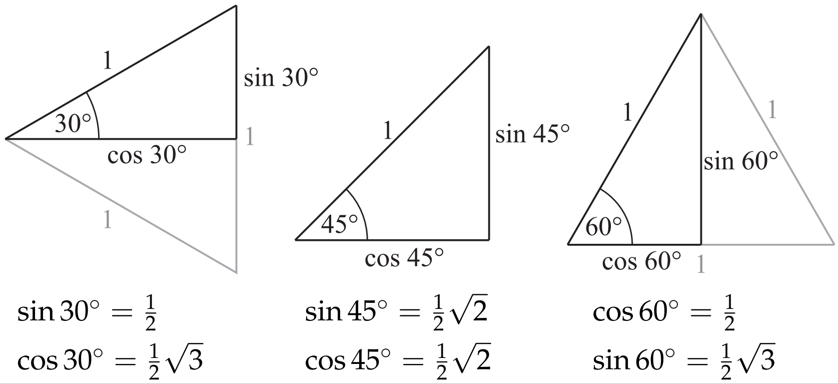
	A	B	C	D
1	α (in °)	a (in cm)	c (in cm)	sin α
2	0	0	9,5	0,00
3	10	1,7	9,6	0,18
4	20	3,4	10,1	0,34
5	30	5,5	10,9	0,50
6	40	7,9	12,4	0,64
7	50	11,3	14,7	0,77
8	60	16,4	18,9	0,87
9	70	26	27,7	0,94
10	80	53,7	54,5	0,99



7.3.2 Exakte Bestimmung einiger Funktionswerte

Unter Nutzung des Satzes des Pythagoras können die Schüler einige Funktionswerte exakt bestimmen. Dazu sollte herausgearbeitet werden, dass es in vielen Fällen vereinfachend sein kann, Dreiecke mit der Hypotenusenlänge 1 zu betrachten. Der Kosinus eines Winkels entspricht dann der Länge der Ankathete in einem solchen rechtwinkligen Dreieck, der Sinus der Länge der Gegenkathete. Damit lassen sich, teilweise mit Hilfsdreiecken, Sinus- und Kosinuswerte für 30°, 45° und 60° ermitteln.

Bestimmung einiger spezieller Werte für Sinus und Kosinus



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad$ $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In den meisten Fällen wird nach den hier skizzierten Überlegungen für die Bestimmung von Funktionswerten der Taschenrechner genutzt werden.

[14] Dies kann manuell oder mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware erfolgen.

7.3.3 Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens für spitze Winkel

Aus geometrischen Überlegungen heraus lassen sich die Zusammenhänge

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

erarbeiten. Ein leicht zu erkundender Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens ist $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. In diesem Zusammenhang kann (vor allem wenn es sich im Unterrichtsgespräch ergibt) der Kotangens eingeführt werden.

Bei der Bestimmung spezieller Funktionswerte mithilfe des Satzes des Pythagoras fällt auf, dass in rechtwinkligen Dreiecken mit der Hypotenusenlänge 1 gilt: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Daran kann sich die Frage anschließen, ob dieser Zusammenhang allgemein, also für beliebige rechtwinklige Dreiecke, gilt. Durch Rückbezug auf die Definitionen von Sinus und Kosinus ergibt sich aus dieser Frage der *trigonometrische Satz des Pythagoras*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

mit der verkürzten Schreibweise $\sin^2\alpha$ für $(\sin\alpha)^2$.

Aus didaktischer Sicht sind die exakte Bestimmung spezieller Funktionswerte sowie die Erarbeitung von Zusammenhängen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens u. a. deshalb sinnvoll, da die Schüler hierbei mehrfach die Definitionen anwenden und dadurch eine Festigung erfolgt. Außerdem werden Unterrichtsinhalte früherer Jahre (z. B. Innenwinkelsatz, Satz des Pythagoras) wiederholt. Vor allem aber erfolgt eine Vernetzung geometrischer Überlegungen mit algebraischen Herleitungen. Der Schulung diesbezüglicher Fähigkeiten kommt – wie sich im Folgenden noch zeigt – eine wichtige Bedeutung für das Lösen inner- und außermathematischer Probleme zu.

7.3.4 Lösen von Übungs- und Anwendungsaufgaben

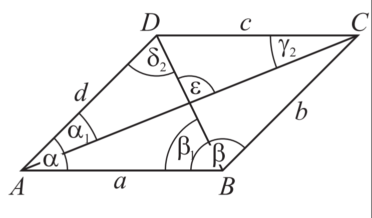
Nach der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens sollten die Schüler vielfältige Übungen durchführen. Dazu gehören die Bestimmung fehlender Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke und Berechnungen von Winkeln.

Zu den *Prinzipien operativen Übens* gehören die *Zerlegung von Aufgaben in Teilschritte* und die *Zusammensetzung von Teilschritten zu größeren Komplexen*. Neben einfachen Übungsaufgaben sind Aufgaben bedeutsam, in denen mehrere rechtwinklige Dreiecke auftreten, zumal die Zerlegung komplexerer Figuren in Teildreiecke als „fundamentale Idee“ der Schulgeometrie anzusehen ist.

Übungsaufgabe zu trigonometrischen Beziehungen (aus Koullen 2008, S. 45)

Gegeben ist das Parallelogramm *ABCD*.

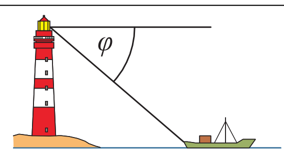
a) Berechne a und b aus $\overline{BD} = 7{,}2$ cm, $\beta_1 = 35^\circ$ und $\delta_2 = 71^\circ$.
b) Berechne a und b aus $\overline{AC} = 13$ cm, $\alpha_1 = 14^\circ$ und $\gamma_2 = 10^\circ$.
c) Berechne $\overline{BD}$ und β_1 aus $b = 16{,}1$ cm, $c = 44{,}2$ cm und $\gamma = 99^\circ$.
d) Berechne $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ und ε aus $a = 23{,}2$ cm, $b = 15{,}1$ cm, $\alpha = 71^\circ$.



Neben rein innermathematischen Aufgaben sollten die Schüler auch Anwendungsaufgaben lösen (siehe eine Reihe der hier angegebenen Beispiele). Ein wichtiges Ziel dabei ist, dass die Schüler zunehmend lernen, in Anwendungssituationen selbst geeignete rechtwinklige Dreiecke zu finden. In Aufgabenstellungen können diese deshalb auch unvollständig dargestellt sein.

Anwendungsaufgabe zu trigonometrischen Beziehungen (aus Lütticken/Uhl 2008, S. 54)

Von einem Leuchtturm (Höhe 90 m über NN) erscheint ein Schiff unter einem Tiefenwinkel φ von 28°. Wie weit ist das Schiff vom Fuß des Leuchtturms entfernt?



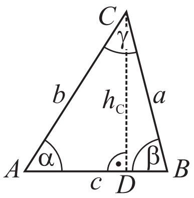
7.3.5 Berechnungen in beliebigen Dreiecken

Durch Betrachtung rechtwinkliger Teildreiecke lassen sich die trigonometrischen Beziehungen auch für spitzwinklige und – nach der Erweiterung von Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkel – stumpfwinklige Dreiecke nutzen. Schüler können an konkreten Dreiecken fehlende Stücke durch die Zerlegung in Teildreiecke berechnen und durch Verallgemeinerung der dabei angewendeten Schritte den Sinus- und den Kosinussatz herleiten.

Beispielbezogene und allgemeine Herleitung des Sinussatzes

In einem Dreieck *ABC* sind gegeben:
a = 8,2 cm, b = 6,2 cm, α = 57,5°

Gesucht: β



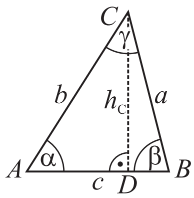
Die Höhe *hc* zerlegt das Dreieck *ABC* in zwei rechtwinklige Teildreiecke *ACD* und *BCD*.

In *ACD*: $h_c = b \cdot \sin\alpha = 5,23\,\text{cm}$

In *BCD*: $\sin\beta = \dfrac{h_c}{a} \approx 0,637$

$\beta \approx 39,6°$

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen zwei Seiten a und b eines Dreiecks und den gegenüberliegenden Winkeln α und β.



Die Höhe *hc* zerlegt das Dreieck *ABC* in zwei rechtwinklige Teildreiecke *ACD* und *BCD*.

In *ACD* gilt: $h_c = b \cdot \sin\alpha$

In *BCD* gilt: $h_c = a \cdot \sin\beta$

Also gilt $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ bzw. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

Bei Berechnungen mit dem Sinussatz ist zu beachten, dass Lösungen nur dann existieren und eindeutig sind, wenn zu zwei Seitenlängen die Größe des der längeren Seite gegenüberliegenden Winkels gegeben ist. Berechnungsfehler, die auftreten, wenn diese Bedingung verletzt ist, sind mit dem Kongruenzsatz „ssw" in Beziehung zu setzen. Allgemein sollten bei Dreiecksberechnungen Bezüge zu den Kongruenzsätzen hergestellt werden und die Schüler erkennen, dass *Berechnungen* genau dann (eindeutig) möglich sind, wenn Dreiecke mit den gegebenen Größen *konstruiert* werden können und entsprechende *Kongruenzsätze* existieren, siehe Abschnitt 7.1.1.

Durch Anwendung trigonometrischer Beziehungen können natürlich auch *Höhen* in Dreiecken bestimmt werden. Die Möglichkeiten, *Flächeninhalte* zu berechnen, erweitern sich damit enorm.

7.3.6 Anwendungen der Trigonometrie in der Raumgeometrie

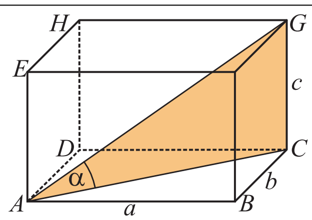
Die trigonometrischen Beziehungen lassen sich für Körperberechnungen anwenden. Auch hierbei ist das Erkennen und Nutzen geeigneter Dreiecke eine entscheidende Lösungsstrategie. Durch sich verändernde Aufgabenstellungen mit abnehmenden Hilfen (z. B. bezüglich vorgegebener Hilfsdreiecke) sollten Schüler zunehmend befähigt werden, in Körpern selbst die benötigten Dreiecke zu finden, an denen sie sinnvolle trigonometrische Berechnungen durchführen können.

Berechnung an einem Quader (aus Lütticken/Uhl 2008, S. 54)

Wie groß ist der Winkel α, den die Raumdiagonale des Quaders mit der der Flächendiagonale einschließt?

a) a = 4 cm; b = 3 cm; c = 8 cm

b) a = 4 cm; b = 8 cm; c = 3 cm



Berechnung an einer Pyramide

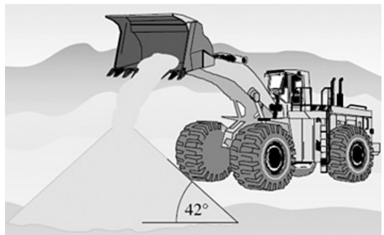
Bei einer Pyramide mit einer viereckigen Grundfläche sind alle Kanten gleich lang. Unter welchem Winkel ist eine der zur Spitze führenden Kanten gegenüber der Grundfläche geneigt?

Unter Anwendung trigonometrischer Berechnungen lassen sich Oberflächeninhalte und Volumina von Körpern auf der Grundlage von gegeben Stücken berechnen, anhand derer dies für die Schüler zuvor nicht möglich war. Hierbei besteht die Möglichkeit – und die Notwendigkeit – am Ende der Sekundarstufe I wichtige Inhalte des Unterrichts früherer Klassenstufen zu wiederholen.

Berechnungen an einem Kegel (aus Koullen 2008, S. 52)

Feuchter Sand lässt sich gerade noch ohne abzurutschen mit einem Schüttwinkel von etwa 42° aufschütten.

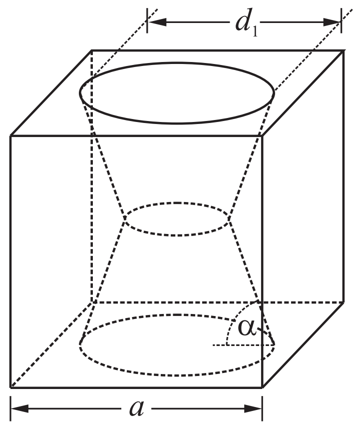
- Wie hoch ist ein kegelförmiger feuchter Sandhaufen mit 30 m Durchmesser am Boden?
- Es werden 20 m^3 feuchten Sandes aufgeschüttet. Dabei wird eine Höhe von 2,70 m erreicht. Reicht dafür eine Grundfläche mit 3 m Radius?



Aufgabe aus der Abschlussprüfung nach Kasse 10 an Hauptschulen in B/W (2008)

Aus einem Würfel aus Messing (Dichte: 8,3 g/cm^3) wurden zwei Kegelstümpfe ausgefräst, die zueinander symmetrisch sind (siehe Skizze).

a) Berechnen Sie das Gewicht des Werkstücks.
b) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante eines Kegelstumpfs.
c) Das Werkstück wird in einem Tauchbad mit einer 0,1 mm dicken Silberschicht überzogen (Dichte: 10,5 g/cm^3). Berechnen Sie das Gewicht des aufgetragenen Silbers.
d) Zeichnen Sie einen Diagonalschnitt des Werkstücks in einem geeigneten Maßstab.
e) Bei welchem Durchmesser d_2 haben die beiden Kegelstümpfe zusammen das gleiche Volumen wie der Restkörper des Würfels (d_1 und h bleiben unverändert)?



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

$a = 8$ cm $d_1 = 6$ cm $\alpha = 73°$

7.4 Trigonometrische Funktionen

7.4.1 Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen – der Einheitskreis

Bislang wurden – auf Grundlage der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck, siehe Abschnitt 2.1 – lediglich Funktionswerte für spitze Winkel betrachtet. Für die Behandlung der trigonometrischen Funktionen sowie eine Reihe von Anwendungen ist es notwendig, verallgemeinerte Definitionen zu erarbeiten.

Um Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen einzuführen, wird meist der Einheitskreis verwendet (siehe S. 62). Dabei erfolgt gewissermaßen eine „Neudefinition", jedoch sollten Bezüge zu Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck erkennbar sein. Der folgende Schulbuchauszug zeigt die Hinführung zum Einheitskreis, wobei die Vorkenntnisse der Schüler hinsichtlich des Sinus aufgegriffen werden.

Ein „Riesenrad" wird mathematisch untersucht (aus Koullen 2008, S. 58)

Der Künstler Orozco stellte auf der Expo 2000 in Hannover sein Modell eines Riesenrades vor, bei dem sich die Gondeln oberhalb und unterhalb des Bodens bewegen. Er nannte es „Rueda de la Fortuna" (Rad des Lebens). Die Achse des Rades lag annähernd auf Höhe des Bodens. In gleichen Abständen waren am Außenring mit ca. 8 m Durchmesser acht Gondeln befestigt.

In dem Bild ist das Riesenrad gerade in der Position aufgenommen worden, wo sich jeweils zwei Gondeln auf gleicher Höhe befinden.

1. Welche Winkel erzeugen die sichtbaren Riesenradstreben mit dem Erdboden?
2. a) Berechne für die dargestellte Stellung des Riesenrades die Höhen der Gondelachsen über dem Boden.
   b) Betrachte die Höhen über und unter der Erde als positive und negative Höhen. Welche Höhenangaben bekommen die Gondelachsen der Gondeln unter der Erde?
   c) Angenommen, eine Gondelachse verläuft parallel zum Erdboden. Fülle für die anderen Positionen der Gondelachsen die Tabelle aus.

α in °	0		
Höhe in m	0		

   d) Stelle die Zuordnung Winkel → Höhe für die in a) bis c) ermittelten Werte in einem Diagramm dar. Beschreibe den Graphen und entscheide, ob die Zuordnung eine Funktion ist. Begründe deine Entscheidung.

Es ist erkennbar, dass jeder beliebigen Winkelgröße eindeutig eine Höhe zugeordnet werden kann. Die Höhe der Achse konnte stets aus dem Radius des Riesenrades und dem Sinus des spitzen Winkels berechnet werden, der im erzeugten rechtwinkligen Dreieck beim Drehpunkt liegt. Bei der Betrachtung der Drehwinkel am Riesenrad treten auch Winkelgrößen größer als 90° auf. Es gibt also eine Zuordnung, in der bei beliebigen Winkelgrößen ein Sinuswert angegeben werden kann.

Mit diesem Beispiel kann also Erweiterung des Sinus für beliebige Winkel plausibel gemacht werden, wobei mit der *eindeutigen Zuordnung einer Höhe zu jeder beliebigen Winkelgröße* bereits die Einführung der Sinus*funktion* vorbereitet wurde. Mit der Erklärung „negativer Höhen" unter 2 b) wurde auch eine plausible Erklärung für negative Funktionswerte gefunden.[15]

[15] Bei der vorher erfolgten Einführung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck können negative Vorzeichen nicht auftreten. In der Geometrie haben die Schüler bislang sogar grundsätzlich nur nichtnegative Größen betrachtet.

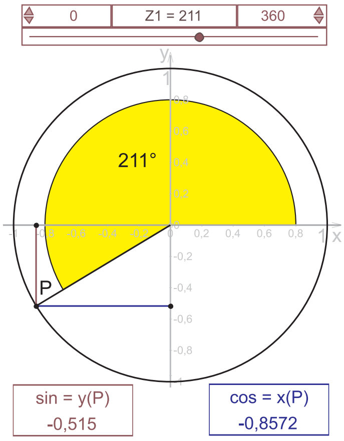
Bestimmung von Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware

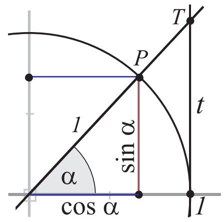
Es wird ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt (0;0) konstruiert. Um die Winkelgröße einzustellen, wird ein auf dem Einheitskreis gleitender Punkt, der mit dem Koordinatenursprung durch eine Strecke verbunden ist, oder ein Schieberegler verwendet.

Der durch den (neben dem positiven Strahl der x-Achse) zweite Schenkel des Winkels schneidet den Einheitskreis in einem Punkt P. Dessen Koordinaten sind der Kosinus- bzw. Sinuswert des betrachteten Winkels. Sie lassen sich in Euklid Dynageo mithilfe des Termobjekts anzeigen.

Um den Tangens des Winkels zu bestimmen, hilft eine Strahlensatzfigur. Man verlängert den konstruierten Schenkel, so dass er die in dem Punkt (1;0) errichtete Senkrechte zur x-Achse schneidet. Ist t der Abstand des Schnittpunktes von der x-Achse, so gilt $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{t}{\sin\alpha}$, also $t = \tan\alpha$.

Beispieldateien:
`www.didaktik-der-geometrie.de` (unter Kapitel X)





7.4.2 Die trigonometrischen Funktionen

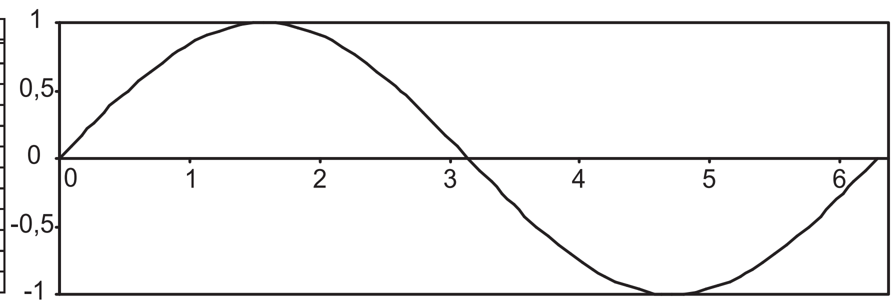
Nach Vorüberlegungen (wie oben beschrieben) und kurzen Zweckmäßigkeitsbetrachtungen zur Wahl des Radius 1 und des Koordinatenursprungs als Mittelpunkt lassen sich Sinus und Kosinus am Einheitskreis einführen (siehe S. 62). Dabei sollten die Schüler zunächst Wertetabellen anlegen und zugehörige Funktionsgraphen darstellen.

Bei der Darstellung von Funktionsgraphen ist die Frage nach der Skalierung der Achsen zu erwarten. Während die Funktionswerte als „normale“ Zahlen gegeben sind, wären auf der x-Achse Winkelmaße abzutragen. Dabei ist ein willkürlicher Maßstab anzusetzen – es bleibt die Frage, ob es einen „natürlichen“ Maßstab gibt und ob die Funktionsgraphen ein „natürliches“ Aussehen haben (wie etwa die Normalparabel). An dieser Stelle ist es nun sinnvoll, das *Bogenmaß* einzuführen.[16] Für die Verwendung von Schablonen zum Zeichnen von Funktionsgraphen ist dies sogar unabdingbar.

Darstellung des Graphen der Sinusfunktion mithilfe von Excel

Für die Berechnung des Bogenmaßes kann in Excel auch die Funktion BOGENMASS() verwendet werden. Für die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen stehen SIN(), COS() und TAN() zur Verfügung, die Argumente müssen im Bogenmaß angegeben werden.

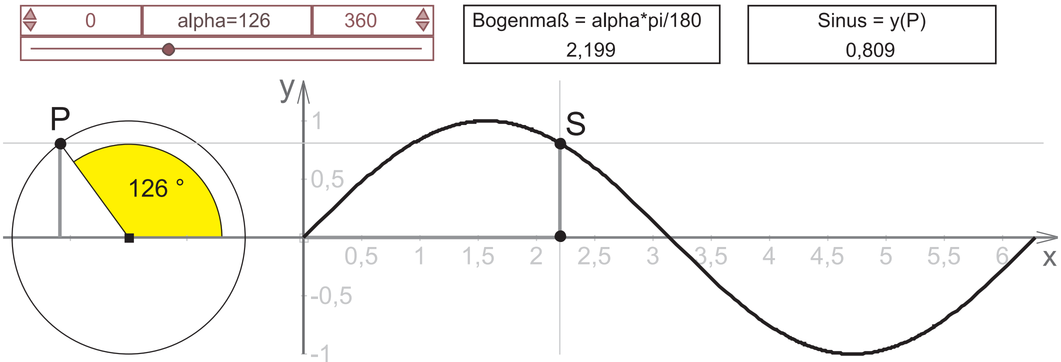
α in °	Bogenmaß	sin α
0	0,00	0,00
5	0,09	0,09
10	0,17	0,17
15	0,26	0,26
20	0,35	0,34
25	0,44	0,42
30	0,52	0,50
35	0,61	0,57
40	0,70	0,64
45	0,79	0,71
50	0,87	0,77
55	0,96	0,82



[16] Mitunter wird das Bogenmaß bereits vor der Behandlung der eigentlichen Trigonometrie gewissermaßen „auf Vorrat“ eingeführt, was in Anbetracht der Forderungen an einen genetischen Mathematikunterricht (siehe S. 8f.) nicht sinnvoll erscheint.

Besonders anschaulich ist die dynamische Konstruktion von Graphen trigonometrischer Funktionen als Ortskurven mithilfe von Software wie Euklid Dynageo oder Geogebra.

Konstruktion des Graphen der Sinusfunktion als Ortskurve in Euklid Dynageo
Es wird von der auf S. 72 beschriebenen Konstruktion ausgegangen, aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit allerdings der Einheitskreis nicht im Koordinatenursprung konstruiert. Auf der positiven x-Halbachse werden vom Koordinatenursprung aus die Bogenmaße der Winkel angetragen und in den entstehenden Punkten die Senkrechten errichtet. Die Schnittpunkte S dieser Senkrechten mit den Parallelen durch die zugehörigen Kreispunkte P beschreiben die Punkte des Graphen der Sinusfunktion. Wird in Euklid Dynageo das Werkzeug Kurven $\rightarrow$ Ortslinie verwendet, der Punkt S markiert und der Winkel mithilfe des Schiebereglers verändert, so entsteht punktweise die Sinuskurve.



Auf diese Weise lässt sich auch der Graph der *Tangensfunktion* konstruieren. Für die *Kosinuskurve* muss die Differenz zwischen den x-Koordinaten von P und dem Mittelpunkt des Kreises vertikal abgetragen werden.

Es würde den zeitlichen Rahmen der Vorlesung überschreiten, auf die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sowie auf Quadrantenbeziehungen und Zusammenhänge zwischen Funktionswerten näher einzugehen. Hierfür sei u. a. auf die speziell für Schüler verfasste Übersichtsdarstellung (Warmuth 2000, Kap. 11), Schulbücher für die 10. Klasse sowie auf (Wittmann 2007, Kap. 9) verwiesen.

In diesem Kapitel zitierte Literatur

- Brandt, D.; Greulich, D.; Jürgensen, Th.; Reimer, R.; Schmitt-Hartmann, R.; Zimmermann, P. (2006): Lambacher Schweizer 4 (Jahrgangsstufe 8, Baden-Württemberg). Ernst Klett Verlag: Stuttgart
- Koullen, R. (Hrsg., 1998): Mathematik Real, Ausgabe Baden-Württ., Klasse 10. Cornelsen: Berlin
- Koullen, R. (Hrsg., 2008): Mathematik Konkret, Band 6 (Realschule, Jahrgangsstufe 10, Baden-Württ.). Cornelsen: Berlin
- Leppig, M. (Hrsg., 1995): Lernstufen Mathematik 10 (Hauptschule, Baden-Württ.). Cornelsen: Berlin
- Lütticken, R.; Uhl, C. (Hrsg., 2008): Fokus Mathematik, Band 5 (Gymnasium, Jahrgangsstufe 9, Baden-Württemberg). Cornelsen: Berlin
- Malle, G. (2001): Genetisch in die Trigonometrie. In: Mathematik Lehren 109, S. 40-44
- Maroska, R.; Olpp, A.; Stöckle, C.; Wellstein, H. (1996): Schnittpunkt 10 (Mathematik für Realschulen, Baden-Württemberg). Ernst Klett Verlag: Stuttgart
- Schreiber, A. (1983): Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: Mathematica Didactica 6(2), S. 65-76
- Schwill, A. (1995): Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In: Hischer; Weiß (Hrsg.): Fundamentale Ideen. Franzbecker: Hildesheim, S. 18-25
- Warmuth, E. (Hrsg., 2008): Mathematik in Übersichten. Volk und Wissen: Berlin
- Wittmann, E. Ch. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg: Braunschweig
- Wittmann, E. Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Vieweg: Braunschweig
- Wittmann, G. (2007): Elementare Funktionen und ihre Anwendungen. Spektrum: Berlin, Heidelberg