Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2013

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

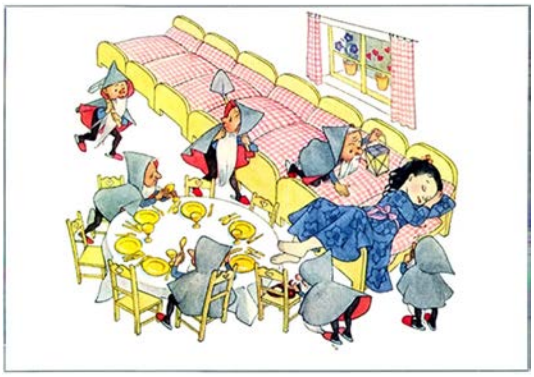
1 Behandlung der natürlichen Zahlen; Zahlaspekte

Literatur: Das Standardwerk zur Didaktik der Arithmetik ist:

PADBERG, F.; BENZ, CHR.: *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum, 2011 (4. Aufl.).

1.1 Kardinaler Zahlaspekt

Die Zahl „7" erhält in dem Märchen „Schneewittchen und die sieben Zwerge" ihre Bedeutung durch bijektive Zuordnungen.

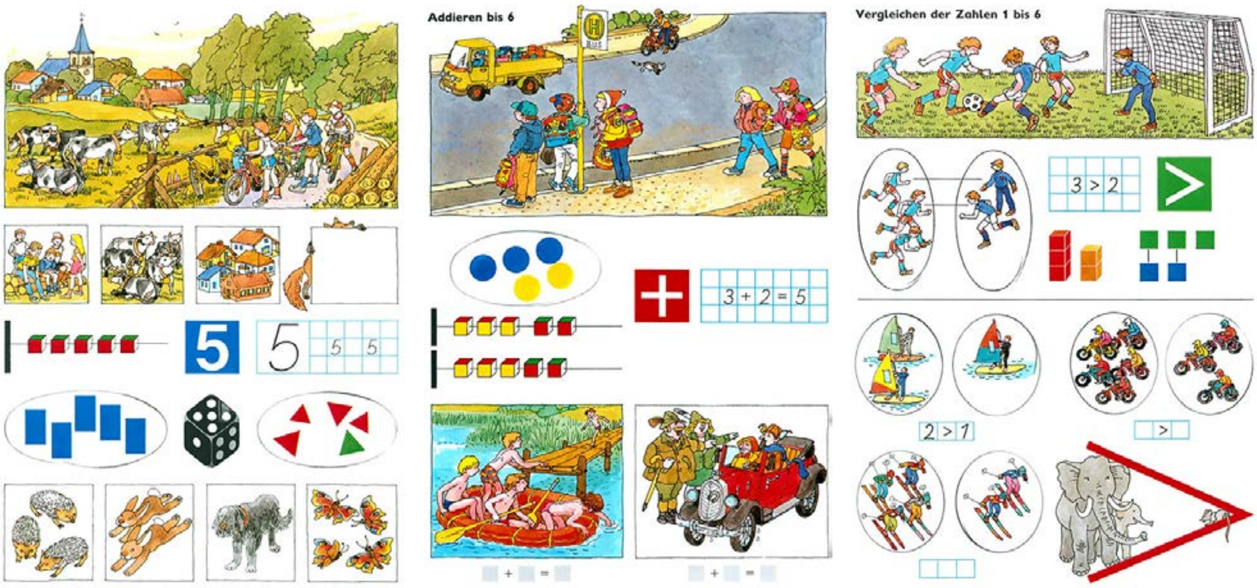


Genetisch-mengentheoretische Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen

- *Bijektion*: Injektive und surjektive Abbildung, d. h. *eineindeutige* Abbildung *von* einer Menge M_1 *auf* eine Menge M_2.
- *Gleichmächtigkeit*: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleichmächtig ($M_1 \sim M_2$), falls eine bijektive Abbildung ϕ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

  Die Gleichmächtigkeit ist eine *Äquivalenzrelation*, sie zerlegt eine Menge (von Mengen) daher in Äquivalenzklassen.
- *Kardinalzahl:* Äquivalenzklasse $\text{card}(M)$ bzgl. der Gleichmächtigkeit einer Menge M:
  $$\text{card}(M) := \left\{ X : X \in E^{(1)} \wedge X \sim M \right\}$$
  ($E^{(1)}$ ist die Menge aller Teilmengen des Grundbereiches.)

Die Menge aller Kardinalzahlen endlicher Mengen heißt *Menge der natürlichen Zahlen*.



Natürliche Zahlen als Kardinalzahlen in einem Schulbuch der Klasse 1

1.2 Ordinaler Zahlaspekt

Genetisch-mengentheoretische Einführung der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen

- *Wohlordnung*: Relation R in einer Menge M mit folgenden Eigenschaften:
  - R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (analog „$\leq$“).
  - In allen nichtleeren Teilmengen N von M existiert ein kleinstes Element bzgl. R (ein Element p mit pRx für alle Elemente x der Menge N).
- *Ähnlichkeit zweier Mengen*: Zwei wohlgeordnete Mengen (M_1, R) und (M_2, S) heißen ähnlich ($M_1 \approx M_2$), falls eine eineindeutige Abbildung $\phi : M_1 \to M_2$ existiert mit:
  $$\text{f. a. } x, y \in M_1 \text{ gilt: } x\,R\,y \Leftrightarrow \phi(x)\ S\ \phi(y).$$
  Auch die Ähnlichkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation.
- *Ordinalzahl*: Äquivalenzklasse $\operatorname{ord}(M)$ bzgl. der Ähnlichkeit einer Menge M:
  $$\operatorname{ord}(M) := \left\{ X : X \in E^{(1)} \wedge X \approx M \right\}$$

Peano-Axiome

Auch die Einführung der natürlichen Zahlen mittels der ***Peano-Axiome*** korrespondiert mit dem ordinalen Zahlaspekt.

(1) Die Zahl Eins (Null) ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als unmittelbaren Nachfolger.

(3) Jede natürliche Zahl ist unmittelbarer Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.

(4) Die Zahl Eins (Null) ist kein unmittelbarer Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(5) Die Menge aller natürlichen Zahlen ist die bezüglich Inklusion kleinste Menge, welche die Zahl Eins (Null) und mit jeder Zahl auch deren unmittelbaren Nachfolger enthält.

1.3 Zusammenhang von Ordinal- und Kardinalzahlen (nach PIAGET)

> *„Eine Kardinalzahl ist eine Klasse, deren Elemente aufgefasst werden als untereinander äquivalente und dennoch unterschiedliche 'Einheiten', deren Differenzen also nur darin bestehen, dass man sie aufreihen, also anordnen kann.*
>
> *Umgekehrt sind die Ordinalzahlen eine Reihe, deren Glieder, obgleich sie aufeinanderfolgen nach den Ordnungsrelationen, die ihnen ihre jeweiligen Rangstufen zuweisen, ebenfalls Einheiten sind, die einander äquivalent sind und infolgedessen kardinal zusammengefügt werden können.*
>
> *Die finiten Zahlen sind also zwangsläufig zugleich Kardinal- wie Ordinalzahlen; das ergibt sich aus der Natur der Zahl selbst, die ein in ein einziges operatorisches Ganzes verschmolzenes System von Klassen und asymmetrischen Relationen ist.“*

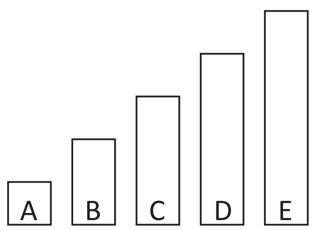
Versuch: Kindern werden 10 Pappstreifen gleicher Breite (1 Einheit) vorgelegt, die Länge von B beträgt 2, die von C 3 Einheiten usw.

1. Aufgabe: Ordnen und Zählen der Streifen.

2. Aufgabe: Wie viele A könnte man aus B und C herstellen?

3. Aufgabe: Es wird auf einen beliebigen Streifen gezeigt und gefragt, wieviele A daraus hergestellt werden könnten.

(Schluss von Ordination auf Kardination.)



... insg. 10 Streifen

1.4 Weitere Zahlaspekte

(nach Maier, Raddatz/Schipper, Lauter, Padberg)

- Kardinaler Zahlaspekt (Mächtigkeit von Mengen)
- Ordinaler Zahlaspekt (Zählzahlen, Ordnungszahlen)
- Operatoraspekt („Wieviel mal...?"), Maßzahlaspekt
- Rechenaspekt, algebraischer Zahlaspekt
- Codierungsaspekt (Zahlen zur Bezeichnung von Objekten)

Bemerkungen:

- Operatoraspekt und Maßzahlaspekt werden z. T. als getrennte Aspekte gefasst.
- Für die mathematische Begründung der natürlichen Zahlen sind der kardinale und der ordinale Zahlaspekt von größter Bedeutung.