Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler Sommersemester 2013

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

2 Elemente der Didaktik der Bruchrechnung

Literatur: Das Standardwerk zur Didaktik der Bruchrechnung ist:

PADBERG, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, 1995 (4. Aufl. 2009).

2.1 Einstieg: Probleme und typische Schülerfehler

Liste häufiger **Fehler** (nach PADBERG):

1. a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{7}$

   b) $\frac{3}{5}+6=\frac{3+6}{5}$

2. a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5\cdot 3}{7}$

   b) $4\cdot\frac{1}{7}=\frac{4}{28}$

3. a) $\frac{9}{10}:\frac{3}{10}=\frac{9:3}{10}=\frac{3}{10}$

   b) $2:\frac{2}{3}=\frac{2:2}{3}=\frac{1}{3}$

4. a) $0,45<0,238$

   b) $0,23=\frac{23}{10}$

5. a) $3,48+4,2=7,50$

   b) $0,45+7=0,52$

6. $0,4\cdot 0,2=0,8$

7. a) $5:0,1=0,5$

   b) $0,36:0,9=4$

- Rechenregeln werden oft schematisch und dabei in vielen Fällen falsch angewendet.
- Inhaltliches (auch anschauliches) Verständnis wird nicht ausreichend herausgebildet.

2.2 Anwendungsaspekte gebrochener Zahlen

(1) Bruchzahlen (gebrochene Zahlen[1]) werden zur Bezeichnung von Größen (z. B. von Längen, Flächeninhalten, Zeitspannen, Gewichten usw.) eingesetzt (*Maßzahlaspekt*).

Beispiele: $\frac{1}{2}$ m, $\frac{3}{4}$ cm^2, $\frac{1}{2}$ Stunde, $\frac{3}{4}$ kg.

(2) Durch Bruchzahlen werden Beziehungen zwischen zwei Größen derselben Art (z. B. zwischen Gewichten) beschrieben (*Relationsaspekt*).

Beispiel: Fleisch besteht zu $\frac{2}{3}$ aus Wasser.

(3) Mit Hilfe von Bruchzahlen werden auf Größen anzuwendende multiplikative Rechenanweisungen angegeben (*Operatoraspekt*).

Beispiel: Nimm $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{8}$ l Sahne (bei einem Backrezept)

(4) Bruchzahlen dienen zur Bezeichnung von Stellen auf einer Skala (*Skalenwertaspekt*).

Beispiel: Wasserstand $1\frac{1}{2}$ m

(5) Bruchzahlen dienen zur Angabe von Quotienten (Verhältnissen) aus natürlichen Zahlen bzw. aus Größen (*Quotientenaspekt*).

Beispiele: Maßstab, Mischungsverhältnis.

(nach PADBERG)

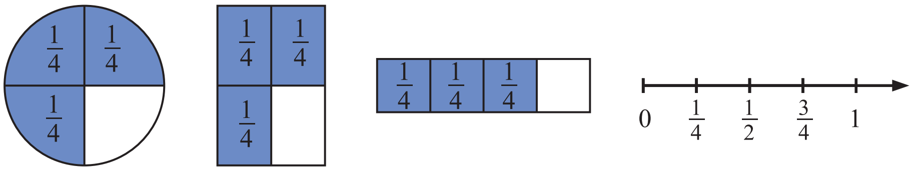
[1] Die Begriffe *Bruchzahl* und *gebrochene Zahl* werden synonym verwendet, sind jedoch klar von dem Begriff *Bruch* zu unterscheiden (siehe dazu auch die Ausführungen zum Äquivalenzklassenkonzept).

2.3 Zwei Grundvorstellungen von Brüchen

1. Bruch als Teil eines Ganzen

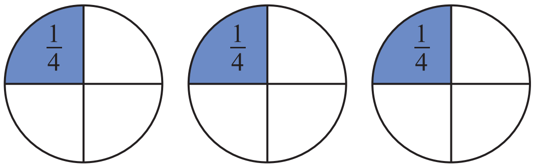
Das „Ganze“ kann auf verschiedene Arten veranschaulicht werden, z. B.

- Kreis (konkrete Interpretationen: Pizza, Torte, Uhr),
- Rechteck (konkrete Interpretation: u. a. Schokoladentafel),
- Streifen (Vermittlung zwischen Rechteck und Strecke); Strecken (Bezug zum Zahlenstrahl).



2. Bruch als Teil mehrerer Ganzer

Mehrere Ganze werden in gleiche Teile geteilt.



Der Zusammenhang zwischen beiden Auffassungen lässt sich anhand konkreter Überlegungen herausarbeiten (beliebtes Beispiel: Teilen von Pizzen).

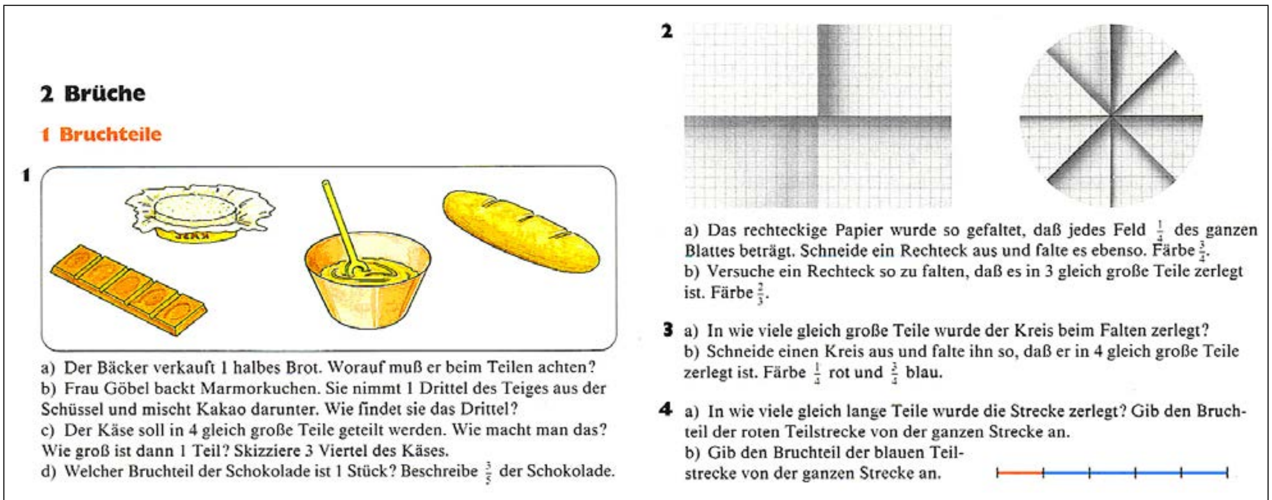
Beispiel für die beiden Grundvorstellungen:

$\frac{3}{4}$ dm bedeutet: 1. Teile 1 dm in vier Teile und nimm drei davon.
2. Teile 3 dm in vier Teile und nimm einen davon.

2.4 Konzepte für die Bruchrechnung

2.4.1 Größenkonzept

Von konkreten Größen zu Brüchen; dann durch Abstraktion zu Bruchz. (gebrochenen Zahlen).



2 Brüche

1 Bruchteile

1

a) Der Bäcker verkauft 1 halbes Brot. Worauf muß er beim Teilen achten?
b) Frau Göbel backt Marmorkuchen. Sie nimmt 1 Drittel des Teiges aus der Schüssel und mischt Kakao darunter. Wie findet sie das Drittel?
c) Der Käse soll in 4 gleich große Teile geteilt werden. Wie macht man das? Wie groß ist dann 1 Teil? Skizziere 3 Viertel des Käses.
d) Welcher Bruchteil der Schokolade ist 1 Stück? Beschreibe $\frac{3}{5}$ der Schokolade.

2 a) Das rechteckige Papier wurde so gefaltet, daß jedes Feld $\frac{1}{4}$ des ganzen Blattes beträgt. Schneide ein Rechteck aus und falte es ebenso. Färbe $\frac{3}{4}$.
b) Versuche ein Rechteck so zu falten, daß es in 3 gleich große Teile zerlegt ist. Färbe $\frac{2}{3}$.

3 a) In wie viele gleich große Teile wurde der Kreis beim Falten zerlegt?
b) Schneide einen Kreis aus und falte ihn so, daß er in 4 gleich große Teile zerlegt ist. Färbe $\frac{1}{4}$ rot und $\frac{3}{4}$ blau.

4 a) In wie viele gleich lange Teile wurde die Strecke zerlegt? Gib den Bruchteil der roten Teilstrecke von der ganzen Strecke an.
b) Gib den Bruchteil der blauen Teilstrecke von der ganzen Strecke an.

Einführung von Brüchen nach dem Größenkonzept in einem (älteren) Schulbuch (Gamma 6, Hauptschule)

Vorteile:

- Nähe zu den Anwendungen
- Addition und Subtraktion lassen sich sehr gut veranschaulichen

Hauptnachteil:

- Probleme bei der Multiplikation und Division – hierzu sind andere Ansätze erforderlich („von-Ansatz“, steht im Zusammenhang mit dem Operatorkonzept, s. u.).

2.4.2 Äquivalenzklassenkonzept

Klassenbildung mithilfe einer Äquivalenzrelation $\sim$ (reflexive, symmetrische, transitive Relation): *Quotientengleichheit*: $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

Das Äquivalenzklassenkonzept ist bedeutsam als fachwissenschaftlicher Hintergrund und für die Einordnung des Verhältnisses Bruch – gebrochene Zahl (Bruchzahl). Die „1:1-Umsetzung“ in der Schule kann aber als gescheitert betrachtet werden.

Die Abstraktion durch Klassenbildung ist von fragwürdigem Wert.

FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, 1973, Band 1, S. 207

- Sowohl die Definition der Bruchzahlen wie auch die der Rechenoperationen erfolgen für die Sch. unmotiviert und formal. Die Genese der Begriffe und Definitionen wird unterschlagen.
- Es gelingt kaum, Schülern eine anschauliche Vorstellung von den Bruchzahlen und besonders von den Verknüpfungen zu vermitteln.
- An das Vorwissen der Schüler wird nicht angeknüpft.

Trotz dieser Gründe gegen eine explizite Behandlung im Unterricht, ist das Äquivalenzklassenkonzept bedeutsam als „Hintergrund“ der Zusammenfassung von Brüchen zu gebrochenen Zahlen, für die Zuordnung zu Punkten des Zahlenstrahls sowie für das Erweitern und Kürzen.

2.4.3 Operatorkonzept

Das Operatorkonzept hatte große Bedeutung in den siebziger Jahren – bis hinein in die achtziger Jahre – nachdem das Äquivalenzklassenkonzept als gescheitert betrachtet wurde.

Operatoren bzw. Funktionen auf etwas angewendet weisen der Zahl bzw. Größe, auf die sie angewendet werden, eine neue Zahl bzw. Größe zu.

Beispiel: $\frac{2}{3}$ von 6 kg sind 4 kg. *Deutung:* „$\frac{2}{3}$ von“ ordnet der Größe 6 kg die Größe 4 kg zu.

Konkretisierung des Operators durch Maschine: Eingabe $x \longrightarrow \boxed{\cdot\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{2}{3}x$ Ausgabe

Multiplikations- und Divisionsoperatorenen

Der *Multiplikationsoperator* $(\cdot n)$ ordnet einer Größe a die Größe $n \cdot a$ zu. Der *Divisionsoperator* $(:n)$ ordnet einer Größe a die Größe $a : n$ zu.

Verkettung von Operatoren durch Hintereinanderschalten der Maschinen

- Für Verkettung gilt: $(\cdot m) \circ (: n) = (: n) \circ (\cdot m)$.
- Der Bruchoperator $(\cdot \frac{m}{n})$ wird als Verkettung definiert: $(\cdot \frac{m}{n}) := (\cdot m) \circ (: n)$.

Gegenoperatoren, die die Wirkung eines Multiplikations- bzw. Divisionsoperators aufheben: $(\cdot n)$ wird durch $(: n)$ und $(\cdot \frac{m}{n})$ durch $(\cdot \frac{n}{m})$ neutralisiert.

Probleme bei der Umsetzung des Operatorkonzepts

- Addition ist recht kompliziert und unanschaulich zu erklären,
- an die Vorerfahrungen der Schüler über Bruchzahlen wird v. a. am Anfang nicht angeknüpft,

2.4.4 Gleichungskonzept

- Ein Bruch wie $\frac{7}{3}$ entspricht dem Wunsch nach Lösbarkeit der Gleichung $3 \cdot x = 7$.
- Man rechne also mit x, als ob $3 \cdot x = 7$ sei.
- FREUDENTHAL nannte diese Gebrauchsregel „das algebraische Prinzip“.
  Multiplikation rechts und links mit 5 ergibt
  $$15 \cdot x = 35,$$
  woraus folgt, dass $\frac{7}{3}$ und $\frac{35}{15}$ dieselbe Zahl darstellen.

- Sollen $\frac{7}{3}$ und $\frac{3}{5}$ addiert werden, so leitet man aus
$$3 \cdot x = 7 \quad \text{und} \quad 5 \cdot y = 3$$
eine Gleichung für $x + y$ ab, nämlich $15 \cdot (x + y) = 44$.

FREUDENTHAL, H.; *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart: Klett, 1979, Band 1, S. 249.

Gleichungskonzept zusammengefasst: Die Bruchzahl $\frac{n}{m}$ ist die Lösung der Gleichung $m \cdot x = n$.

Nachteile:

- Die Einführung erfolgt recht formal.
- Es sind Kenntnisse aus der Gleichungslehre erforderlich, die oft erst später (Klasse 7) zur Verfügung stehen.
- Belastung für die spätere Behandlung der Gleichungslehre:
  Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen werden einfach vorausgesetzt.
  $\Rightarrow$ Gefahr der Generalisierung durch die Schüler.

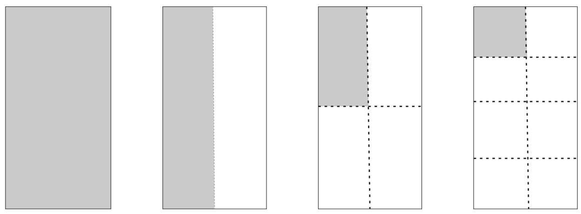
2.4.5 Konzepte für die Bruchrechnung – Fazit

- Alle vier Konzepte haben sinnvolle Aspekte, aber auch ihre Probleme.
- Anzustreben ist einsichtiges und verständnisvolles Umgehen mit gebrochenen Zahlen.
- Herauslösen der Begriffe und Verfahren aus Umweltbezügen

2.5 Schülertätigkeiten zum Einstieg in die Arbeit mit Brüchen

Tätigkeiten auf enaktiver Ebene

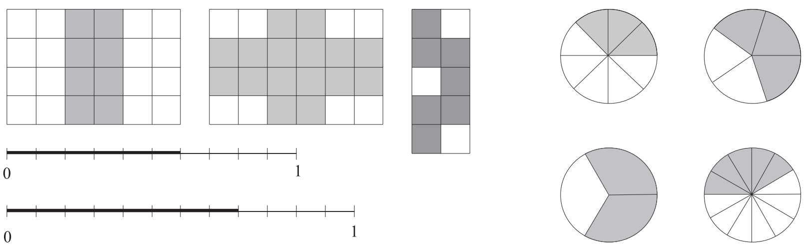
- Herstellen und Einstellen von Bruchteilen (Kreisscheibe, Uhren).
- Falten: Halbe, Viertel, Achtel:
  - $\frac{1}{2}$ Blatt = $\frac{}{4}$ Blatt = $\frac{}{8}$ Blatt
  - Wie viele Achtel enthält ein dreiviertel Blatt?
  - Wie viele Halbe, Viertel, Achtel sind in $2\frac{1}{2}$ Faltblättern enthalten?



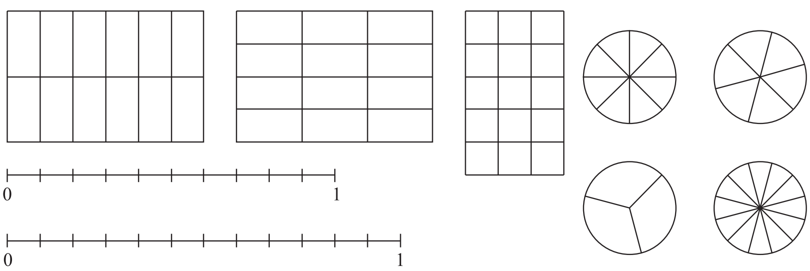
Ein Ganzes Ein Halbes Ein Viertel Ein Achtel

Tätigkeiten auf ikonischer Ebene (an Kreisen, Rechtecken, am Zahlenstrahl usw.)

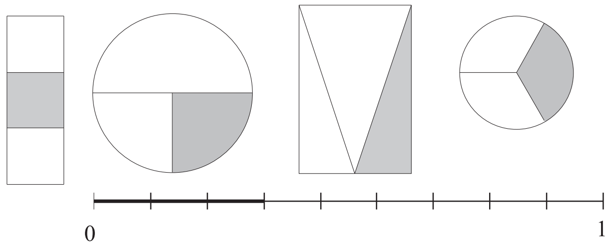
- Welche Brüche sind dargestellt?



- Kennzeichne folgende Brüche an geeigneten Kreisen, Rechtecken und Zahlenstrahlen:
  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{7}{15}, \frac{5}{8}$



- Wo wird $\frac{1}{3}$ *nicht* richtig dargestellt?



Einfache rechnerische Tätigkeiten: Bruchteile von Größen (Längen, Gewichte, Zeit ...) bestimmen

- Wie viele cm sind das? Schreibe ausführlich wie in den Beispielen:

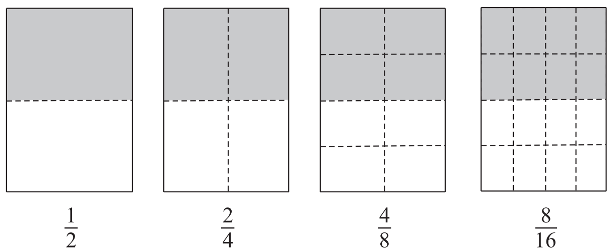
  Beispiele: $\frac{1}{4}$ m $= 25$ cm, denn $\frac{1}{4}$ m $= 100$ cm $: 4 = 25$ cm

  $\frac{3}{4}$ m $= 75$ cm, denn $\frac{3}{4}$ m $= 3 \cdot \frac{1}{4}$ m $= 3 \cdot (100$ cm $: 4) = 3 \cdot 25$ cm $= 75$ cm

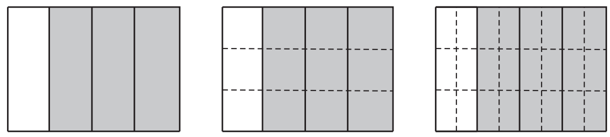
$\frac{1}{2}$ m = ____ cm, denn $\qquad$ $\frac{1}{5}$ m = ____ cm, denn $\qquad$ $\frac{3}{10}$ m = ____ cm, denn

2.6 Erweitern und Kürzen

Ausgehend von der ikonischen Darstellung können die Schüler erkennen, dass verschiedene Brüche denselben „Wert“ haben können.



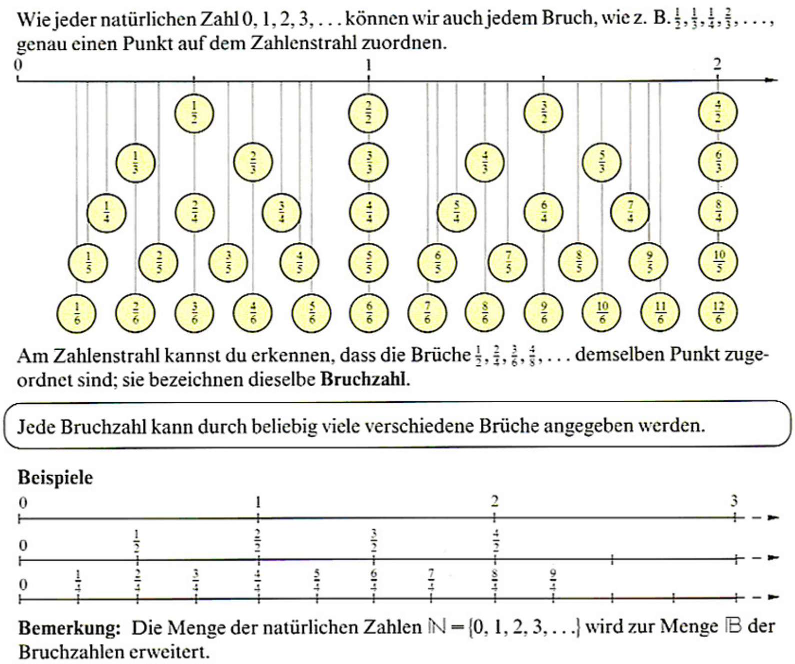
Welche Brüche haben denselben Wert wie $\frac{3}{4}$?



An derartigen Beispielen herausarbeiten:

- *Man **erweitert** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.*
- *Man **kürzt** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl teilt.*

Im Anschluss daran lässt sich herausarbeiten, dass Brüchen, die durch Erweitern und Kürzen auseinander hervorgehen, jeweils dieselben Punkte auf dem Zahlenstrahl zugeordnet sind und somit derartige Brüche jeweils dieselbe Zahl (Bruchzahl, gebrochene Zahl) beschreiben; siehe die Bemerkungen zum Äquivalenzklassenkonzept.


Wie jeder natürlichen Zahl 0, 1, 2, 3, ... können wir auch jedem Bruch, wie z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \ldots$, genau einen Punkt auf dem Zahlenstrahl zuordnen.

Am Zahlenstrahl kannst du erkennen, dass die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$ demselben Punkt zugeordnet sind; sie bezeichnen dieselbe **Bruchzahl**.

Jede Bruchzahl kann durch beliebig viele verschiedene Brüche angegeben werden.

Beispiele

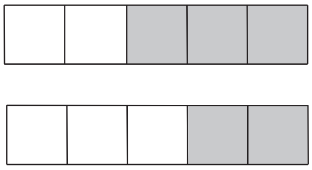
Bemerkung: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ wird zur Menge $\mathbb{B}$ der Bruchzahlen erweitert.

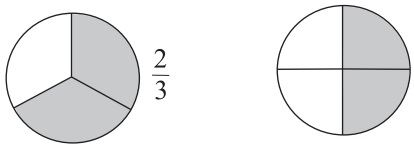
Abbildung: Einführung des Begriffs Bruchzahl (gebrochene Zahl) in einem Schulbuch für die Realschule.

2.7 Vergleichen von Brüchen

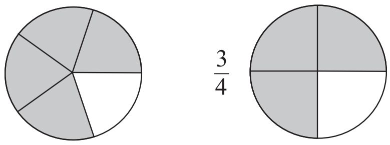
Zunächst sollten einfache Vergleiche angestellt und anschauliche Vorstellungen genutzt werden.

- Spezialfälle: gleiche Nenner gleiche Zähler



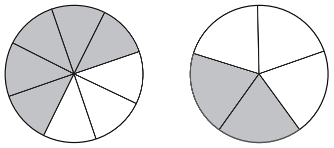


- Flächenvergleiche auch bei anderen einfachen Brüchen:



- Differenzen zu ganzen Zahlen betrachten:
  $\frac{4}{5} < \frac{6}{7}$, denn bei $\frac{4}{5}$ fehlt $\frac{1}{5}$ zur 1, bei $\frac{6}{7}$ fehlt nur $\frac{1}{7}$ zur Eins.

- Vergleichen mit besonders markanten Brüchen:
  $\frac{5}{8} > \frac{2}{5}$, denn $\frac{5}{8}$ ist größer als $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$.



Verallgemeinerung: Brüche vergleichen durch Erweitern auf gemeinsame Nenner

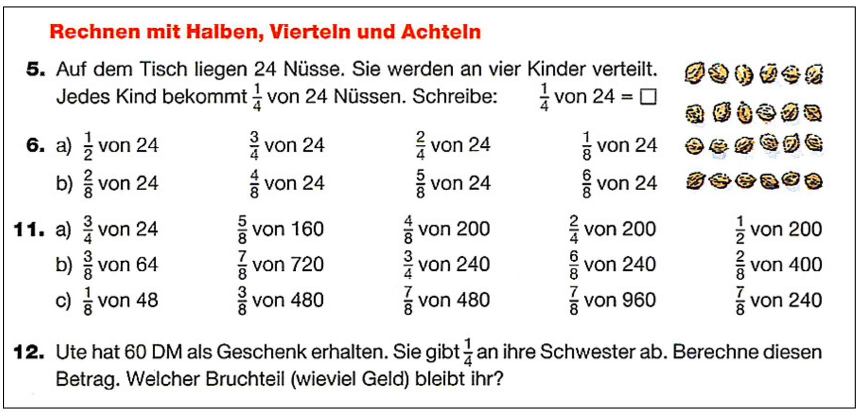
Beispiel: Vergleiche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{8}$.*

1. Schritt: Suchen eines gemeinsamen Nenners:
   8 so lange vervielfachen, bis ein Vielfaches von 3 gefunden ist
   $\Rightarrow$ 24 ist ein gemeinsamer Nenner (kleinster gemeinsamer Nenner: Hauptnenner).
2. Schritt: Erweitern auf den gemeinsamen Nenner: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$, $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$.
3. Schritt: Vergleichen: $\frac{16}{24} > \frac{15}{24}$, also $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

* Es sind auch noch andere Argumentationen möglich, z. B.: $\frac{5}{8}$ ist um $\frac{1}{8}$ größer als $\frac{1}{2}$; hingegen ist $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, also um $\frac{1}{6}$ größer als $\frac{1}{2}$. Da $\frac{1}{6}$ größer ist als $\frac{1}{8}$, ist also $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

2.8 Rechnen mit einfachen Brüchen vor der Einführung von Rechenregeln

- Vor der Einführung von Rechenregeln sollten die Schüler mit einfachen Brüchen rechnen und dabei inhaltlich und anschaulich vorgehen. Ein wichtiges Ziel ist, dass sie erkennen, dass sich viele Aufgaben ohne (oft nur auswendig gelernte und nicht wirklich verstandene) Kalküle lösen lassen.



Rechnen mit Halben, Vierteln und Achteln

5. Auf dem Tisch liegen 24 Nüsse. Sie werden an vier Kinder verteilt. Jedes Kind bekommt $\frac{1}{4}$ von 24 Nüssen. Schreibe: $\frac{1}{4}$ von 24 = $\square$

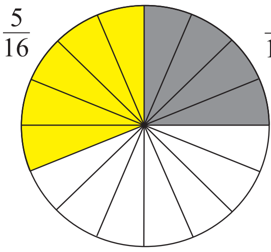
6.	a) $\frac{1}{2}$ von 24	$\frac{3}{4}$ von 24	$\frac{2}{4}$ von 24	$\frac{1}{8}$ von 24	
	b) $\frac{2}{8}$ von 24	$\frac{4}{8}$ von 24	$\frac{5}{8}$ von 24	$\frac{6}{8}$ von 24	
11.	a) $\frac{3}{4}$ von 24	$\frac{5}{8}$ von 160	$\frac{4}{8}$ von 200	$\frac{2}{4}$ von 200	$\frac{1}{2}$ von 200
	b) $\frac{3}{8}$ von 64	$\frac{7}{8}$ von 720	$\frac{3}{4}$ von 240	$\frac{6}{8}$ von 240	$\frac{2}{8}$ von 400
	c) $\frac{1}{8}$ von 48	$\frac{3}{8}$ von 480	$\frac{7}{8}$ von 480	$\frac{7}{8}$ von 960	$\frac{7}{8}$ von 240

12. Ute hat 60 DM als Geschenk erhalten. Sie gibt $\frac{1}{4}$ an ihre Schwester ab. Berechne diesen Betrag. Welcher Bruchteil (wieviel Geld) bleibt ihr?

Auszug aus einem älteren Schulbuch („Die Welt der Zahl“, Hauptschule, Kl. 7)

Addition und Subtraktion von Brüchen mit gleichem Nenner

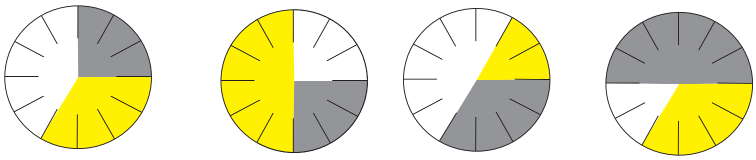
- Das Rechnen mit natürlichen Zahlen lässt sich in diesem Spezialfall auf Brüche übertragen.
- *Quasikardinales Vorgehen*:
  Der durch den Nenner gegebene Teil des Ganzen wird als Einheit (z. B. Tortenstück), die Zähler werden als Anzahlen aufgefasst.
- Der ansonsten häufig gemachte Fehler $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ erscheint in diesem Spezialfall absurd.



$\frac{4}{16} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16}$

Gemischte Nenner: einfache Fälle

- Handelt es sich bei den Nennern um Teiler von 12, so kann mit der Uhr gearbeitet werden.



$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

2.9 Addition und Subtraktion

- Für das Problem der *Hauptnennerbestimmung* Hilfen geben:
  Beispiel: $\frac{7}{12} - \frac{9}{20}$; wie finde ich den Hauptnenner?
  $\Rightarrow$ Suche in der 20-er Reihe das erste Vielfache von 12: 20, 40, 60.
- Es ist nicht sehr schlimm, wenn Schüler nicht den kleinsten gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) finden, sondern einen größeren gemeinsamen Nenner verwenden. (Mit dem gemeinsamen Nenner 120 lässt sich obige Aufgabe ebenfalls leicht lösen.) Sie sollten aber erkennen, dass unnötig große Nenner die Fehlergefahr erhöhen.

Mitunter sollten Ergebnisse, die größer als 1 sind, in *gemischte Zahlen* umgewandelt werden (z. B. $\frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$ und $\frac{133}{100} = 1\frac{33}{100}$, wobei sich in letzterem Falle die *Darstellung als Dezimalbruch* anbietet).

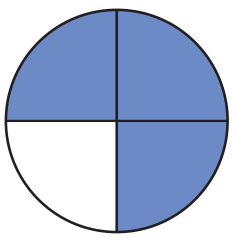
2.10 Multiplikation und Division

Die Anwendung der Regel für die Multiplikation von Brüchen fällt Schülern leichter als die der Addition, trotzdem werden Fehler gemacht, wenn sie sich nicht mehr daran erinnern, *welche* Regel anzuwenden ist. Einem inhaltlichen Verständnis der Regel kommt also hohe Bedeutung zu.

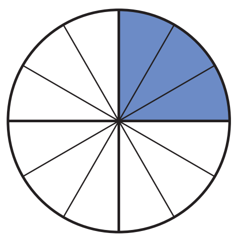
Vervielfachen von Brüchen (natürliche Zahl mal Bruch)

- Dieser Spezialfall lässt sich leicht als wiederholte Addition deuten: $3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$.
- Veranschaulichungen sind wie bei der Addition möglich.
- Wichtig ist es, zu verhindern, dass Schüler das *Vervielfachen* von Brüchen (Multiplikation mit natürlichen Zahlen) mit dem *Erweitern verwechseln*.

Vervielfachen:
$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



Erweitern:
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$



Vervielfachen von Brüchen (Bruch mal natürliche Zahl)

- Die Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen ist den Schülern seit langem bekannt („Vertauschungsgesetz"). Nimmt man sie als gegeben, so lassen sich Aufgaben der Art „Bruch mal natürliche Zahl" auf o. g. Aufgaben „natürliche Zahl mal Bruch" zurückführen.
- Die Reihenfolge „Bruch mal natürliche Zahl" lässt sich auch eigenständig plausibel machen, wobei der „von-Ansatz" zum Tragen kommt, der auch für die allgemeine Multiplikation von Brüchen Bedeutung besitzt.
- $\frac{1}{4} \cdot 3$ kann interpretiert werden als „ein Viertel von drei" (oder auch: drei geteilt durch vier); z. B.: ein Kind erhält ein Viertel von drei Pizzen, vier Kinder teilen sich drei Pizzen.
- Es ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der Interpretation „natürliche Zahl mal Bruch", also ist $\frac{1}{4} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{4}$; das Kommutativgesetz kann somit plausibel gemacht werden.

Zusammenfassung:

Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man den Zähler des Bruchs mit dieser Zahl multipliziert und den Nenner beibehält.

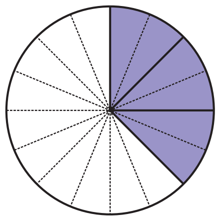
Division von Brüchen durch natürliche Zahlen

Beispiel 1: $\frac{6}{16}$ einer Torte werden an 3 Kinder verteilt. Wie viel erhält jedes Kind?

Beispiel 2: $\frac{3}{4}$ einer Torte werden an 4 Kinder verteilt. Wie viel erhält jedes Kind?

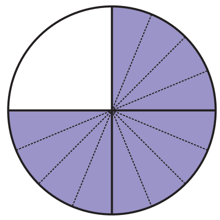
Beispiel 1:

$$\frac{6}{16} : 3 = \frac{6:3}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$



Beispiel 2:

$$\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16}$$



Die Division von Brüchen durch natürliche Zahlen ist durch *Teilen des Zählers durch die natürliche Zahl* oder durch *Multiplizieren des Nenners mit der natürlichen Zahl* möglich. (Die erste Variante ist ein spezieller Fall, der nur anwendbar ist, wenn der Zähler durch die natürliche Zahl teilbar ist.)

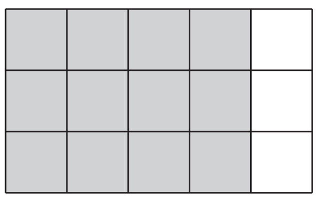
Die Multiplikation von Brüchen (allgemein)

- Ziel ist es, die bekannte Regel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ für Schüler wirklich plausibel werden zu lassen.
- Aus den bereits diskutierten Spezialfällen ergibt sich $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{b \cdot d}$.

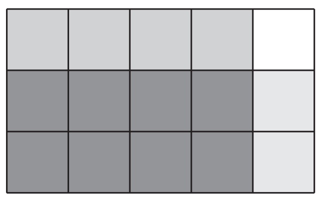
  Aus beiden Regeln lässt sich die allgemeine Regel der Multiplikation zusammensetzen. Allerdings ist dies für viele Schüler der betreffenden Altersstufe nicht hinreichend anschaulich.
- Als sehr sinnvoll für die Veranschaulichung der Multiplikation von Brüchen hat sich der *von-Ansatz* erwiesen.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{4}{5}$$

- Durch Flächenteile lässt sich verdeutlichen, was $\frac{2}{3}$ *von* $\frac{4}{5}$ bedeutet.
- Der Zeichnung lässt sich entnehmen: $\frac{2}{3}$ *von* $\frac{4}{5}$ der Gesamtfläche sind $\frac{8}{15}$ der Gesamtfläche, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

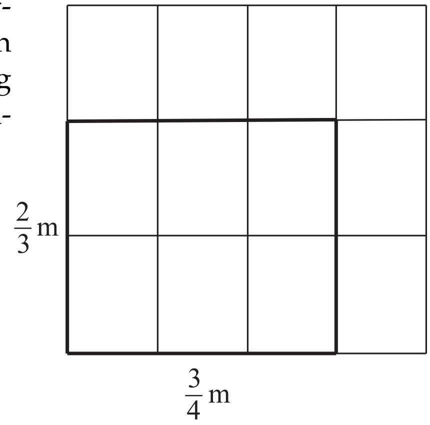


$\frac{4}{5}$ der Fläche



$\frac{2}{3}$ *von* $\frac{4}{5}$ der Fläche

- Auf analoge Weise sollten die Schüler eine Reihe von Aufgaben mithilfe von Karopapier lösen und auch später, wenn sie schon die Formel verwenden, mitunter einen Bezug zu dieser „geometrischen“ Multiplikation anhand des von-Ansatzes herstellen.



Flächeninhaltsberechnung:

- Ein Rechteck ist $a = \frac{3}{4}$ m lang und $b = \frac{2}{3}$ m breit.

  Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?

  $F = a \cdot b = \frac{3}{4}\text{ m} \cdot \frac{2}{3}\text{ m} = \frac{6}{12}\text{ m}^2 = \frac{1}{2}\text{ m}^2$

Die Division von Brüchen

Die Division $a : b$ lässt sich interpretieren durch die Frage: *Wie oft passt b in a?*

- Beispiel in den natürlichen Zahlen: Wie oft passt 3 in 12?

  Als Sachaufgabe: Verpacke 12 Äpfel in Netze zu je 3 Äpfeln. Wie viele Netze erhältst du?

Diese Interpretation der Division lässt sich als *Messen* auffassen (man misst 12 mit 3, etwa eine Entfernung von 12 m mit einer 3 m langen Messlatte).

Beispiele für die Division von Brüchen:

- Wie viele $\frac{1}{4}$ l Becher kannst du mit einer $2\frac{1}{2}$ l-Flasche füllen?
- Wie oft passt eine $\frac{1}{2}$ m lange Messlatte in einen $3\frac{1}{2}$ m langen Balken?
- $2\frac{1}{2}$ l Saft sollen in $\frac{3}{4}$ l Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen erhält man?

Diese Divisionsaufgaben lassen sich konkret inhaltlich lösen (ohne Regel). Ist das Ergebnis nicht ganzzahlig (wie im letzten Beispiel), so ist eine Abschätzung möglich.

Erarbeitung der Regel für die Division von Brüchen durch Permanenzreihen

Serien bekannter Aufgaben führen zu Folgen von Ergebnissen, die sich logisch fortsetzen lassen.

Was fällt an den Rechenreihen auf? Setze gesetzmäßig fort.

$16 : 8 = 2$
$16 : 4 = 4$
$16 : 2 = 8$
$16 : 1 = 16$
$16 : \frac{1}{2} = \mathbf{32}$

- Der Dividend bleibt in allen Aufgaben unverändert 16.
- Der *Divisor* wird jeweils *halbiert*.
- Bei jeder Halbierung des Divisors *verdoppelt* sich der *Quotient*.
- Diese Gesetzmäßigkeit gilt für natürliche Zahlen und auch für den Fall „Bruch durch natürliche Zahl“, wie anhand anderer Beispiele deutlich wird.
- Sollte diese Gesetzmäßigkeit auch – im Sinne des Permanenzprinzips – für den Fall gelten, dass der Divisor ein Bruch ist, so müsste gelten: $16 : \frac{1}{2} = \mathbf{32}$.

Weitere Beispiele für Permanenzreihen zur Division:

$16 : 8 = 2$	$\frac{1}{4} : 8 =$	$36 : 18 =$
$16 : 4 = 4$	$\frac{1}{4} : 4 =$	$36 : 6 =$
$16 : 2 = 8$	$\frac{1}{4} : 2 =$	$36 : 2 =$
$16 : 1 = 16$	$\frac{1}{4} : 1 =$	$36 : \frac{2}{3} =$
$16 : \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} =$	$36 : \frac{2}{9} =$

Ausführlicher siehe:
PADBERG, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*, S. 165f (3. Aufl.).