Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2013

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

3 Zur Behandlung der rationalen Zahlen

3.1 Historische Bemerkungen

Antike (Griechenland):

- Zunächst nur natürliche Zahlen (ohne die Zahl Null) und Verhältnisse natürlicher Zahlen (bis ins 6. Jahrhundert). Irrationale Zahlen (als Streckenverhältnisse) wurden bereits entdeckt (Hippasos, ca. 400 v. Chr.). Negative Zahlen wurden jedoch nicht betrachtet.

Indien:

- Einführung der Zahl Null und der negativen Zahlen in die Mathematik im 7. Jahrhundert.

Europa:

- FRANCOIS VIETA (1540–1603) vermied negative Zahlen.
- RENE DESCARTES (1596–1650) sprach von falschen Lösungen, wenn eine Gleichung negative Zahlen als Lösung hatte.
- CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855): „*Positive und negative Zahlen können nur da eine Verwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleichzustellen ist.*“

3.2 Herangehensweisen / Beispiele zur Einführung negativer Zahlen

Aus dem täglichen Leben sind negative Zahlen vor allem in zwei Zusammenhängen vertraut:

- *Temperaturen* (über/unter 0°C),
- *Kontostände* (Soll/Haben).

Ein drittes Beispiel sind Höhenangaben (über/unter NN).

5 Ganze und rationale Zahlen

1 Die Zahlengerade

1

a) Am Nachmittag wurde eine Temperatur von 10° C gemessen. Über Nacht fiel die Temperatur um 15° C. Wieviel Grad unter Null ist es (Fig. 78.1)?
b) In einem großen Kaufhaus fährt der Fahrstuhl vom 3. Obergeschoß 5 Etagen nach unten. In welches Untergeschoß fährt er (Fig. 78.2)?
c) Der Wasserstandsmesser (Pegel, Fig. 78.3) einer Talsperre zeigte am 1. Juli einen Wasserstand von 50 cm über „Normal“. Wegen großer Trockenheit fiel der Wasserstand im Juli um 120 cm. Beschreibe seinen neuen Stand.

2 a) Fig. 78.4 zeigt einen Kontoauszug. Was ist am 11. 2. geschehen? Was bedeuten die roten Zahlen in der Spalte Kontostand?
b) Berechne die fehlenden Kontostände. Beachte die Bedeutung der roten und der schwarzen Zahlen.

3 a) Übertrage die Tabelle in Fig. 78.5 in dein Heft. Subtrahiere darin (soweit das möglich ist) von jeder Zahl die Zahl 3. Trage das Ergebnis unter die Zahl in die Tabelle ein.
b) In Fig. 78.6 ist $4 \xrightarrow{-3} ■$ am Zahlenstrahl dargestellt. Stelle ebenso $5 \xrightarrow{-3} ■$, $3 \xrightarrow{-3} ■$ dar. Kannst du auch $2 \xrightarrow{-3} ■$ darstellen? Welche Schwierigkeit ergibt sich?

Sparkasse Bachhausen Kontoauszug

Tag	Auszahlung	Einzahlung	Kontostand
1. 2.			76,–
3. 2.	40,–		36,–
4. 2.	25,–		11,–
7. 2.		30,–	41,–
11. 2.	46,–		5,–
18. 2.	20,–		25,–
23. 2.		60,–	
24. 2.	42,–		
25. 2.	37,–		
28. 2.		100,–	

78.4

−3	6	5	4	3	2	1	0
	3						

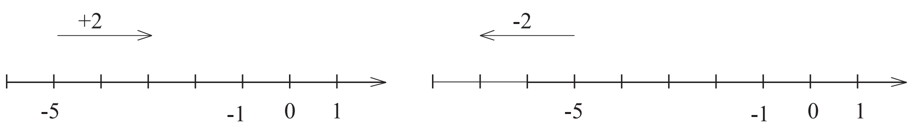
78.5

78.6

Einführung negativer Zahlen in einem älteren Schulbuch (Gamma 7, Hauptschule)

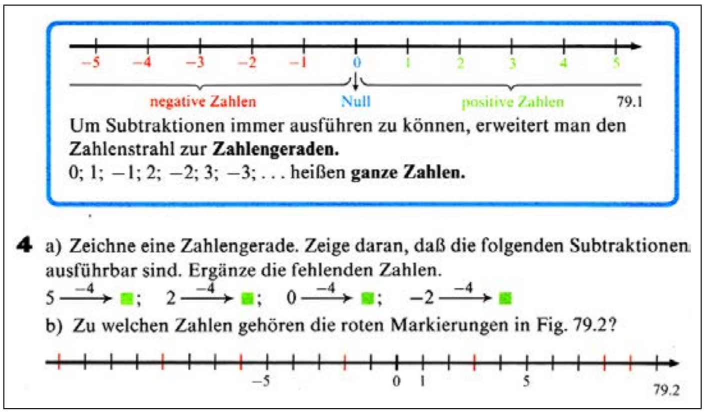
Von Anfang an sollten die Zahlengerade und die Ordnung auf ihr betrachtet werden.

- $-5 + 2 = \ ?$ *Es ist* $-5°C$ *kalt und wird um* $2°C$ *wärmer/kälter. Welche Temperatur herrscht jetzt?*
- $-5 - 2 = \ ?$ (Entsprechend bei Höhenangaben, Kontoständen usw.)



Die Zahlengerade hat hohe Bedeutung für das Verständnis von und die Arbeit mit rationalen Zahlen. Die obigen Beispiele zeigen, dass sich durch inhaltliche Überlegungen anhand der Zahlengeraden auch einfache Aufgaben lösen lassen, ohne dafür Regeln zu kennen. Genutzt werden sollte dazu auch der sehr leicht herzustellende Bezug zwischen der Zahlengeraden und einer Thermometerskale.

Auch für die Einführung / Begriffsbestimmung der rationalen Zahlen ist die Zahlengerade bedeutsam:



Um Subtraktionen immer ausführen zu können, erweitert man den Zahlenstrahl zur **Zahlengeraden.**
0; 1; −1; 2; −2; 3; −3; ... heißen **ganze Zahlen.**

4 a) Zeichne eine Zahlengerade. Zeige daran, daß die folgenden Subtraktionen ausführbar sind. Ergänze die fehlenden Zahlen.
$5 \xrightarrow{-4} \blacksquare$; $2 \xrightarrow{-4} \blacksquare$; $0 \xrightarrow{-4} \blacksquare$; $-2 \xrightarrow{-4} \blacksquare$

b) Zu welchen Zahlen gehören die roten Markierungen in Fig. 79.2?

Schulbuchkopie: Gamma 7 (Hauptschule)

Die negativen rationalen Zahlen werden durch *Symmetrisierung* aus den gebrochenen Zahlen gewonnen ⇒ Erweiterung des *Zahlenstrahls zur Zahlengeraden* durch Spiegelung am Nullpunkt.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der der „Gegenzahlen“:

Der Bereich der rationalen Zahlen ergibt sich als Vereinigung der Menge der gebrochenen Zahlen und der Menge der zu ihnen entgegengesetzten Zahlen.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei nicht um eine fachlich saubere Definition des Bereichs der rationalen Zahlen, sondern um eine Möglichkeit, diesen Bereich in der Sekundarstufe I anschaulich und plausibel einzuführen.

Weiterer Aspekt: Rationale Zahlen sind *Äquivalenzklassen von Paaren differenzengleicher gebrochener Zahlen* (Beispiel: Gutschein-/Schuldscheinmodell, siehe weiter hinten).

Probleme mit der Kleiner-Relation

„Kleiner als“ bedeutete in den natürlichen Zahlen auch:

- „weniger der Anzahl nach“,
- „kommt beim Zählen eher dran“,
- „hat höchstens so viele Stellen wie“.

Der Rückgriff auf die Zahlengerade ist wichtig, um Irrtümer zu vermeiden, gibt dafür jedoch noch keine Gewähr: Es besteht die Gefahr, dass die Schüler die Zahlen „in zwei Hälften aufteilen“, die positiven und die negativen und jede Hälfte für sich betrachten.

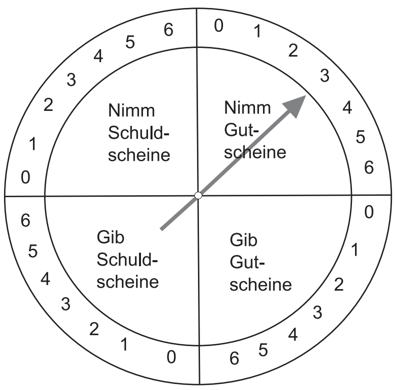
Möglicher Denkfehler: $-279 > -2$, denn $279 > 2$
(denn 279 € Schulden sind ja auch mehr als 2 € Schulden)

Abhilfe: Rückgriff ins Modell (kälter, weniger, tiefer), konsequentes Durchlaufen der Zahlengeraden von links nach rechts, „kleiner“ heißt „liegt links von“.

3.3 Einstiege in die Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Das Gutschein-/Schuldscheinspiel

- Es stehen Gutscheine und Schuldscheine zur Verfügung. Ein Gutschein und ein Schuldschein heben sich im Wert auf.
- Durch einen Zufallsmechanismus (Glücksrad mit entsprechender Beschriftung oder Stapel gemischter Karten mit Anweisungen) erhalten die Schüler Befehle der Art „Nimm ... Gutscheine“, „Nimm ... Schuldscheine“, „Gib ... Gutscheine ab‘, „Gib ... Schuldscheine ab“.
- Gewonnen hat, wer am Ende des Spiels am reichsten ist. (Der Spielstand für jeden Schüler wird nur in Gutscheinen oder in Schuldscheinen notiert, also z. B. nicht 5 Gutscheine, 3 Schuldscheine, sondern 2 Gutscheine.)



Das Spiel steht der Auffassung von ganzen Zahlen als Klassen differenzengleicher Paare natürlicher Zahlen nahe (Äquivalenzklassenkonzept). So wird die Zahl -5 durch 0 Gutscheine und 5 Schuldscheine, oder 1 Gutschein und 6 Schuldscheine oder 7 Gutscheine und 12 Schuldscheine usw. repräsentiert.

Erklärung von Aufgaben zur Addition und Subtraktion anhand des Gutschein-Schuldschein-Modells:

$-5+2$	Du hast 5 Schuldscheine und bekommst 2 Gutscheine dazu. Wie „reich“ bist du nun? (2 Nullpaare ablegen)
$-5-2$	Du hast 5 Schuldscheine und sollst 2 Gutscheine abgeben. (Das ist möglich, wenn du 2 „Nullpaare“ aufnimmst.)
$-5+(-2)$	Du hast 5 Schuldscheine und bekommst 2 Schuldscheine dazu.
$-5-(-2)$	Du hast 5 Schuldscheine und gibst 2 Schuldscheine ab.

Statt allgemeiner Regeln zum Addieren/Subtrahieren ganzer (rationaler) Zahlen sind beispielgebundene Formulierungen für viele Schüler hilfreicher:

6 – (–2) rechne ich als 6 + 2

6 + (–2) rechne ich als 6 – 2

Eine Begründung kann über das Spiel gegeben werden:

- Statt Schuldscheine abzugeben, kann ich Gutscheine aufnehmen: 6 – (–2) = 6 + 2
- Statt Schuldscheine aufzunehmen, kann ich Gutscheine abgeben: 6 + (–2) = 6 – 2

Als Ergänzung zu dieser modellhaften Begründung lassen sich *Permanenzreihen* betrachten, bei denen die Schüler einfache Rechenreihen gesetzmäßig fortsetzen:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl@{\qquad}lcl}
3+2 & = & 5 & 3-2 & = & 1 & 5-2 & = & 3 \\
3+1 & = & 4 & 3-1 & = & 2 & 4-1 & = & 3 \\
3+0 & = & 3 & 3-0 & = & 3 & 3-0 & = & 3 \\
3+(-1) & = & & 3-(-1) & = & & 2-(-1) & = & \\
3+(-2) & = & & 3-(-2) & = & & 1-(-2) & = & \\
3+(-3) & = & & 3-(-3) & = & & 0-(-3) & = &
\end{array}$$

3.4 Multiplikation rationaler Zahlen

W. R. HAMILTON (irischer Mathematiker 1805–1865) fragte sich noch 1833, wie es erklärlich ist, *„dass zwei Zahlen, die weniger als nichts sind, ein Produkt haben können, das mehr als nichts sein soll.“*

Weitere Äußerungen zu der Thematik:

„Fast kein Abiturient ... weiß (das heißt: versteht einem Anderen klarzumachen), warum zum Beispiel ‚Minus mal Minus Plus‘ gibt.“ WAGENSCHEIN, 1962

„... nur einige der leistungsstärksten Schüler erfassen, dass es sich bei der Einführung negativer Zahlen um eine Zahlbereichserweiterung im systematischen Sinne handelt, schwächere Schüler legen sich eine Art "Regel-Hilfs-Welt"für das Rechnen zu.“
Speziell: *„Bei der Multiplikation bleibt der Fall ‚Minus mal Minus‘am unsichersten“*. ANDELFINGER

Gleichungsansatz (FREUDENTHAL)

„-3 ist das Ding mit dem man so rechnet, als ob $(-3)+3=0$ sei.“

„Man kann auf diesen Ansatz das Rechnen mit negativen Zahlen gründen, z. B. aus

$$(-3)+3=0 \qquad \text{und} \qquad (-4)+4=0$$

durch Addition ableiten, dass

$$((-3)+(-4))+(3+4)=0$$

ist, also dass

$$(-3)+(-4)=-(3+4)$$

ist, oder auch durch Multiplikation der ersten Gleichung mit 4 und der zweiten mit -3, dass

$$4 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 = 0 \qquad \text{und} \qquad (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot (-3) = 0$$

ist, woraus dann

$$(-4) \cdot (-3) = 4 \cdot 3$$

folgt.“

FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1, S. 209

Kontomodell (nach WINTER)

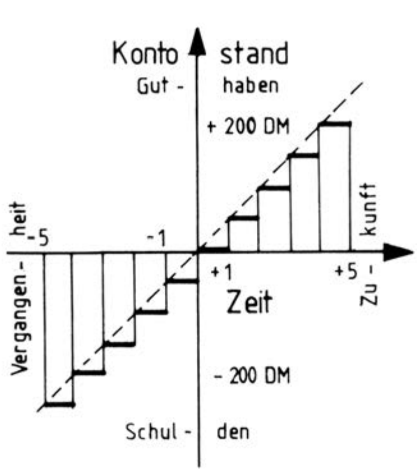
Ein wichtiger Ansatz der Einführung der Multiplikation rationaler Zahlen ist die Betrachtung von *Permanenzreihen*, die bereits in anderen Zusammenhängen erwähnt wurden. Dieser Ansatz liegt auch dem Kontomodell (nach WINTER) zugrunde:

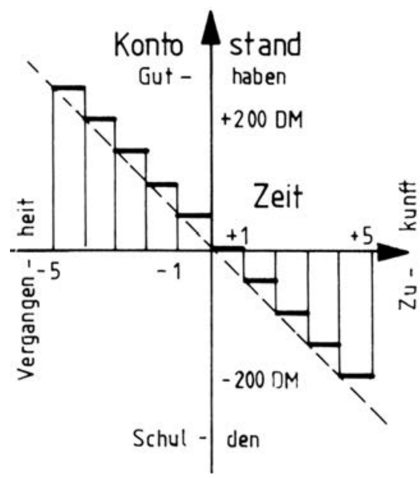
„Auf ein Konto wurde bis jetzt zu jedem Monatsersten ein Betrag von 50 €[1] *eingezahlt, und das soll auch weiter so geschehen. Heute ist ein Monatserster, es ist ein Eingang von 50 € gewesen, und der Kontostand ist jetzt ausgeglichen.“*

–2	für	„vor 2 Monaten“
+3	für	„in drei Monaten“
–100 €	für	„100 € Schulden“
+50 €	für	„50 € Guthaben“.

Kontostand in drei Monaten:	+150 €	=	(+3) · (+50 €)
Analogie: Kontostand vor drei Monaten:	–150 €	=	(–3) · (+50 €)

(+3) · (+50 €)	=	+150 €	(+3) · (–50 €)	=	–150 €
(+2) · (+50 €)	=	+100 €	(+2) · (–50 €)	=	–100 €
(+1) · (+50 €)	=	+50 €	(+1) · (–50 €)	=	–50 €
0 · (+50 €)	=	0 €	0 · (–50 €)	=	0 €
(–1) · (+50 €)	=	–50 €	(–1) · (–50 €)	=	+50 €
(–2) · (+50 €)	=	–100 €	(–2) · (–50 €)	=	+100 €
(–3) · (+50 €)	=	–150 €	(–3) · (–50 €)	=	+150 €





[1]Die Beschreibung des Modells ist dem (sehr empfehlenswerten) Buch *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* von HEINRICH WINTER (Braunschweig: Vieweg, 1991) entnommen. Die Angaben sind dort in DM gemacht (siehe die Abbildungen) und wurden hier einfach in € abgeändert.