Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2015

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Elementargeometrie

4 Problemlösen

4.1 Öffnung anspruchsvoller mathematischer Probleme: Offene Aufgaben

4.1.1 Schwierigkeiten beim Problemlösen im Mathematikunterricht

Schülerinnen und Schülern bereitet das Lösen von Aufgaben, für die sie kein Routineverfahren kennen, Schwierigkeiten.

$\Rightarrow$ Einige (u. U. viele) Schüler finden keinen Ansatz, fühlen sich überfordert.

$\Rightarrow$ Aufgrund fehlender Strategien wissen diese Schüler dann nicht, was sie tun sollen/können.

$\Rightarrow$ Dadurch bedingter „Leerlauf" führt häufig zu Disziplinproblemen.

Barrieren beim Problemlösen

- *Objektive Barrieren:* Die zum Lösen notwendigen mathematischen Inhalte sind dem Bearbeiter nicht bekannt.
- *Subjektive Barrieren:* Der Bearbeiter weiß nicht, welche seiner Kenntnisse er auf welche Weise zur Lösung einsetzen soll.

Beseitigung aller Barrieren $\Rightarrow$ Verwandeln des Problems in eine Routineaufgabe.
Zu hohe Barrieren $\Rightarrow$ Viele Schüler finden keine Möglichkeit, die Barrieren zu überwinden.

- Barrieren nicht beseitigen aber „niedriger legen"; für (fast) alle Schüler überwindbare Barrieren an den Anfang stellen.

$\Rightarrow$ Das Überwinden von Barrieren lernen.

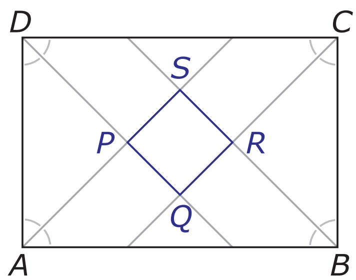
- Differenzierte Ziele mit unterschiedlich hohen Barrieren setzen.
- Unterschiedliche Wege zur Problemlösung ermöglichen.

4.1.2 Beispiel – Öffnung einer anspruchsvollen geometrische Aufgabe

In einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 4$ cm sind die vier Winkelhalbierenden mit den Schnittpunkten P, Q, R und S eingezeichnet.

a) Zeige, dass $PQRS$ ein Quadrat ist.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Quadrates.

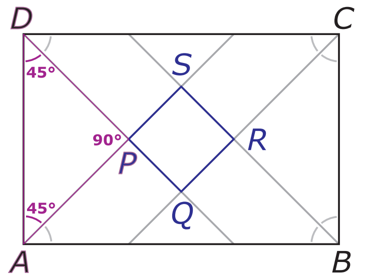


- Anfangszustand und Zielzustand sind bei dieser Aufgabe klar festgelegt; die möglichen Lösungsschritte („Transformation") sind unklar; es steht dafür keine Routine zur Verfügung.

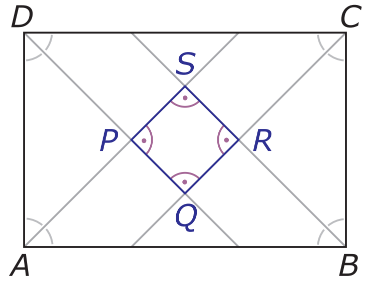
$\Rightarrow$ Es handelt sich um ein Problem.

- Für den Beweis, dass $ABCD$ ein Quadrat ist, bestehen mehrere (sehr unterschiedliche) Möglichkeiten.

Beweis, dass $PQRS$ ein Quadrat ist (eine Möglichkeit):



- Durch die Winkelhalbierenden entstehen Winkel mit einem Maß von 45°.
- Anwendung des Innenwinkelsatzes für das Dreieck ΔAPD: Winkel bei P muss ein rechter Winkel sein: $180° - 45° - 45°$.
- Nach dem Scheitelwinkelsatz ist $\angle(QPS)$ ein rechter Winkel.



- Analoge Betrachtungen in den Dreiecken ΔASB, ΔBRC und ΔCQD $\Rightarrow$ Alle Winkel im Viereck $PQRS$ sind rechte Winkel.
- $PQRS$ ist ein Rechteck.
  Um zu diesem Zwischenergebnis zu gelangen, gibt es auch andere Wege ähnlichen Schwierigkeitsgrades. Zum Beispiel ergibt sich die Parallelität gegenüberliegender Seiten aus der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes; also ist $PQRS$ ein Parallelogramm, für das dann noch gezeigt wird, dass *ein* Innenwinkel ein rechter Winkel ist.

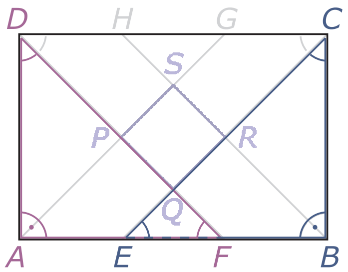
Für den Nachweis, dass $PQRS$ ein Quadrat ist, genügt es nun, zu zeigen, dass zwei benachbarte Seiten des Rechtecks $PQRS$ gleich lang sind.

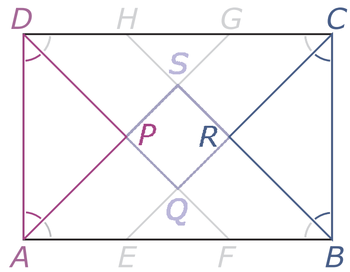
- Die Dreicke ΔAFD und ΔBEC sind kongruent zueinander (gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, die in einer Kathete übereinstimmen).

$\Rightarrow$ $\overline{DF} = \overline{CE}$

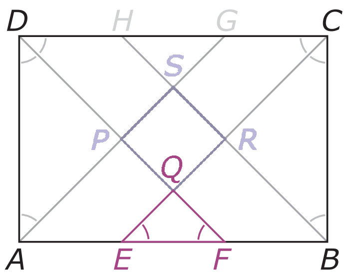
$\Rightarrow$ $\Delta APD \equiv \Delta BRC$ (nach dem Kongruenzsatz „wsw“)

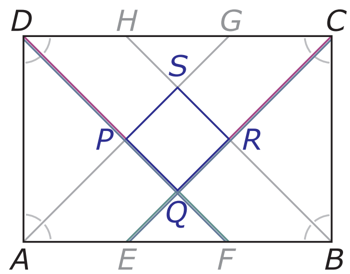
$\Rightarrow$ $\overline{DP} = \overline{CR}$





- Das Dreieck ΔEFQ ist gleichschenklig (wegen kongruenter Winkel bei E und F) $\Rightarrow$ $\overline{EQ} = \overline{FQ}$





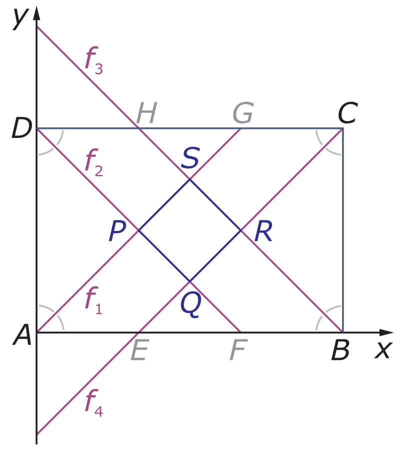
- Wegen $\overline{DF} = \overline{CE}$, $\overline{DP} = \overline{CR}$ und $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ gilt $\overline{CE} - \overline{CR} - \overline{EQ} = \overline{DF} - \overline{DP} - \overline{FQ}$

$\Rightarrow$ $\overline{PQ} = \overline{RQ}$

- Damit ist das Rechteck $PQRS$ ein Quadrat.

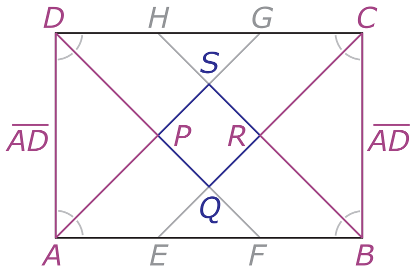
Die Reihenfolge der Schritte und die Auswahl der Teildreiecke sind nicht zwingend, es existieren hierfür zahlreiche Varianten. Bereits hierdurch ist eine gewisse (allerdings sehr eingeschränkte) Offenheit der Aufgabe gegeben.

Gänzlich **andere Herangehensweise** an den Nachweis, dass $PQRS$ ein Quadrat ist:

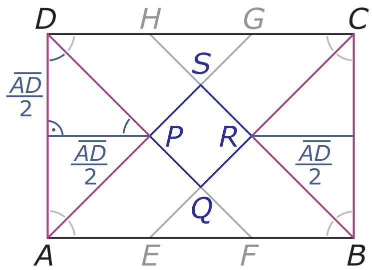


- Betrachtung der Winkelhalbierenden als **Graphen linearer Funktionen** und Verwendung des Satzes des Pythagoras.

Berechnung des Flächeninhalts



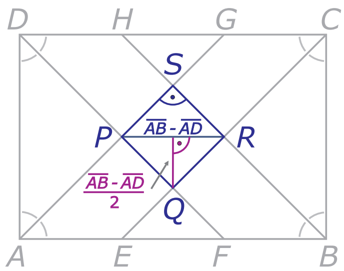
- Betrachtung der Dreiecke ΔAPD und ΔCRB.
- Beide Dreiecke sind gleichschenklig rechtwinklig.
- Die Basen der Dreiecke ΔAPD und ΔCRB haben jeweils die Länge $\overline{AD}$.



- Die entsprechenden Höhen sind jeweils halb so lang wie die Basen.

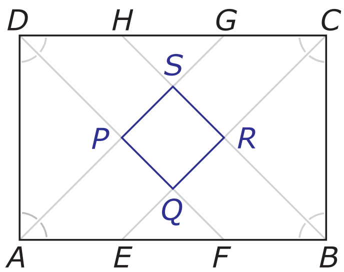
  (Wegen der Winkelmaße von jeweils 45° sind auch die durch die Höhen erzeugten Teildreiecke gleichschenklig.)
- Die Diagonale $\overline{PR}$ des Quadrates $PQRS$ hat somit die Länge $\overline{PR} = \overline{AB} - 2 \cdot \dfrac{\overline{AD}}{2} = \overline{AB} - \overline{AD}$.

  (Für die gegebenen Zahlen ist $\overline{PR} = 2$ cm.)



- Berechnung der Seitenlänge des Quadrates (Satz des Pythagoras).

  Oder:
- Berechnung des Flächeninhaltes der beiden Teildreiecke (aus Grundseite und Höhe).



Andere Möglichkeit für die Berechnung des Flächeninhalts:
Berechnung der Flächeninhalte geeignet auszuwählender Teilfiguren, die das Quadrat umgeben und Subtraktion dieser Flächeninhalte von dem des gegebenen Rechtecks (mehrere Möglichkeiten).

Zwischenresümee:

- Die Aufgabe verfügt über einen gewissen Grad an „Offenheit"; eine „Lösungsroutine" ist nicht abrufbar.
- Verschiedene Wege (unter Einsatz unterschiedlicher mathematischer Mittel) führen zum Ziel.
- Es müssen Informationen über Strecken und Winkel, die weder in der Ausgangs- noch in der zu untersuchenden Figur vorkommen, gefunden und verarbeitet werden.
- Die Schüler müssen entscheiden, mit welchen Informationen sie bei ihrer Lösung beginnen und welche Figuren sie betrachten.

- In Sackgassen zu gehen und dann andere Wege zu probieren, ist beim Lösen von Problemen selbstverständlich. Recht schnell erfolgreiche Wege zu finden, erfordert Erfahrung.
- Der Nachweis, dass es sich bei $PQRS$ um ein Rechteck handelt, ist wesentlich leichter zu führen, als der Nachweis, dass dieses Rechteck ein Quadrat ist.

  Aber: Durch die Formulierung der Aufgabe wird die Lösung nur eines Teilproblems gewissermaßen zum Misserfolg erklärt.

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe

Eine erste sinnvolle Neuformulierung der Aufgabe wäre:

a) *Was für ein Viereck ist PQRS? Begründe Deine Antwort.*

statt

a) Zeige, dass $PQRS$ ein Quadrat ist.

⇒ Erkenntnis***findung*** rückt in den Mittelpunkt gegenüber reiner Erkenntnis***sicherung*** in der ursprünglichen Formulierung.

- Vielfältige unterschiedliche Herangehensweisen sind möglich:
  - Theoretische Überlegungen zu Teilfiguren,
  - Anfertigung einer exakten Zeichnung,
  - Experimente (z. B. mit Papier oder Software).
- Die Chancen für ein erstes Erfolgserlebnis wachsen enorm.
- Aktivitäten erleichtern geistiges Eindringen in die Problemstellung.
- Es ergeben sich Möglichkeiten der inneren Differenzierung, indem Schüler unterschiedlich abstrakte Zugänge wählen.

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe (2)

Eine Umformulierung der Aufgabe, welche das Finden einer ***Beweisidee*** erleichtert:

a) *Gib von möglichst vielen Winkeln in der entstandenen Figur die Größe an.*

Auch diese Aufgabe kann natürlich durch Messungen gelöst werden; das Herausfinden einiger der Winkelgrößen ist jedoch auch mittels theoretischer Überlegungen relativ leicht zu bewältigen.

⇒ Ein erster Schritt zur Lösung der ursprünglichen Aufgabe wird durch die Ermittlung der Winkelgrößen getan.

⇒ Das Arbeitsergebnis führt zu Impulsen für weitere Überlegungen.

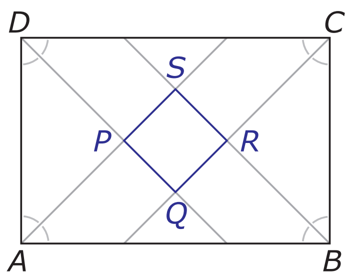
Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe (3)

Ein offener Zielzustand wird auch durch folgende Frage erreicht:

b) *Welche Arten von Vielecken erkennst du in der Figur?*

⇒ Die Chancen, richtige Teilergebnisse zu erreichen, sind sehr hoch (eine vollständige Lösung muss nicht angestrebt werden).

- Die Figur „in der Mitte“ kann daraufhin in den Mittelpunkt des Interesses gerückt werden.



Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe (4)

Um die Hürde für die Berechnung des Flächeninhaltes nicht zu hoch zu legen, könnte der entsprechende Aufgabenteil erweitert werden:

- *Berechne von möglichst vielen Teilfiguren den Flächeninhalt.*

statt

- *Berechne den Flächeninhalt des Quadrates PQRS.*

Möglichkeiten der Öffnung der Aufgabe – Zusammenfassung

Vergleichen Sie die ursprüngliche Formulierung der Aufgabe (siehe S. 1) mit der folgenden „offeneren“ Fassung:

a) *Zeichne in ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen* $\overline{AB} = 6$ *cm und* $\overline{AD} = 4$ *cm die vier Winkelhalbierenden ein.*

b) *Gib von möglichst vielen Winkeln in der entstandenen Figur die Größe an.*

c) *Welche Arten von Vielecken erkennst Du in der Figur?*

d) *Berechne von möglichst vielen Teilfiguren den Flächeninhalt.*

Um die Fragen der ursprünglichen Formulierung zu behandeln, muss der Unterrichtsverlauf u. U. von Lehrerseite entsprechend gelenkt werden.

Weitere Möglichkeit: Verzicht auf die Angabe von Maßen.

„Noch offenere“ Formulierung:

Zeichne in ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6$ *cm und* $\overline{AD} = 4$ *cm die vier Winkelhalbierenden ein.*

Setze Dich mit den entstehenden Figuren, ihren Winkeln und Flächeninhalten auseinander.

Diese Formulierung setzt allerdings voraus, dass die Schüler im Umgang mit offenen Aufgaben geübt sind. („Open ended problem“ nach BECKER, SHIMADA)

4.1.3 Zusammenfassung: Ziele bei der „Öffnung“ von Aufgaben

- Aufgaben sollten möglichst allen Schülern *Erfolgserlebnisse* ermöglichen.

⇒ Erfolge beim Lösen (auch Teilergebnisse) ermutigen und motivieren zur weiteren Beschäftigung.

- Sie sollten Lösungswege besitzen, die anspruchsvolle *Problemlöseprozesse* beinhalten:
  - ⇒ Leistungsstarke Schüler fordern,
  - ⇒ Strategien des Problemlösens entwickeln.
- Sie sollten *unterschiedliche Herangehensweisen* zulassen:
  - allgemeine, theoretische Überlegungen,
  - Arbeit mit konkreten Beispielen (exakte Zeichnungen, Rechnen mit konkreten Zahlen),
  - experimentelle und heuristische Herangehensweisen.
- *Handlungsorientierte Zugänge* ermöglichen:

  „Damit kann ich erst einmal *anfangen*, das kann ich.“

4.2 Einige Arten geometrischer Probleme

Beweisproblem: stößt die Suche nach einem Beweis an.
Beispiele: siehe Kapitel 2 der Vorlesung

Konstruktionsproblem: ein Objekt (Punkt, Strecke, Winkel, Figur, ...) soll konstruiert werden.
Beispiele: siehe Kapitel 3 der Vorlesung

Berechnungsproblem: zielt auf die rechnerische Ermittlung einer unbekannten Größe; erfordert mehr als nur das Einsetzen gegebener Größen in Formeln.
Beispiele: siehe Übung, Raumdiagonalen im Quader, ...

Modellierungsproblem: Lösung besteht in einem mathematischen Modell für ein außermathematisches Problem.

Anzahlproblem: „Wie viele … gibt es?“

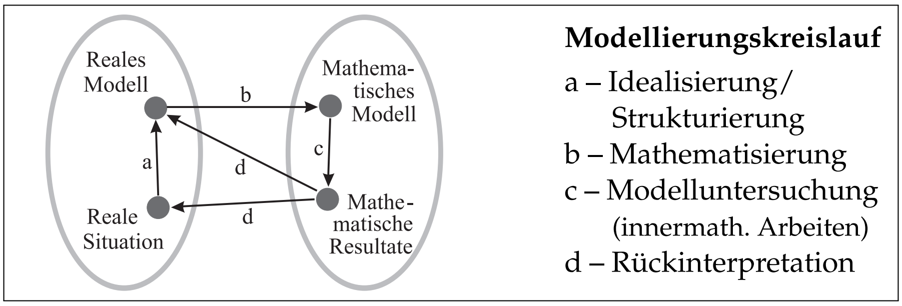
Optimierungsproblem*:** eine Größe soll optimiert werden; Spezialfall: ***Extremwertprobleme, bei denen es gilt, eine Größe zu maximieren oder zu minimieren.

Beispiel für ein ***Modellierungsproblem***

- Wie groß sind die Oberfläche und das Volumen eines Menschen?

Einschub: Modellierungskreislauf (*Mathematische Modellierung / Modellbildung*)

- Anwendungssituationen geeignet „reduzieren“ / abstrahieren, sodass mit zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln (Werkzeugen) eine Beschreibung / Bearbeitung möglich ist.
- Lösung des Problems in dem (vereinfachten) Modell.
- Rückübertragung auf die reale Situation, Validierung der Lösung.

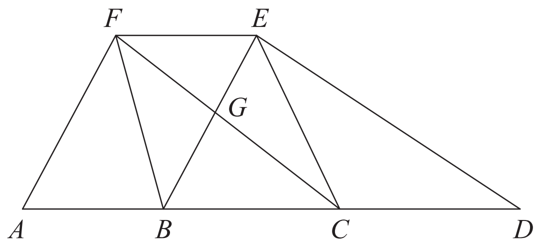


Näher wird auf Fragen der mathematischen Modellierung in der Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik“ eingegangen.

Beispiel für ein ***Anzahlproblem***

- In der Zeichnung sind die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{FE}$ parallel sowie die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{FE}$ alle gleich lang.

  Finde möglichst viele Paare geometrischer Figuren, die den gleichen Flächeninhalt besitzen.



  Z. B.: Das Dreieck ΔBDE und das Parallelogramm $BCEF$ haben den gleichen Flächeninhalt.

Beispiele für ***Optimierungs- bzw. Extremwertprobleme***

- Drei (vier, fünf, …) Tennisbälle sollen verpackt werden. Finde eine optimale Form für die Verpackung.

  (Es bleibt hier offen, welche Lösung als optimal anzusehen ist – es kann sogar ein Teil des Problems sein, hierfür Kriterien zu entwickeln.)

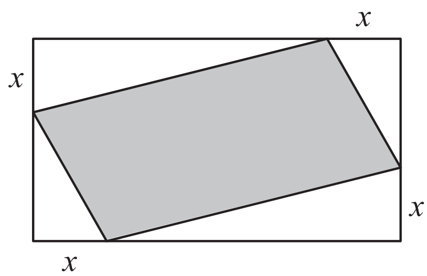
- Gegeben sind eine Gerade f (wie *F*lussufer), ein Punkt O (wie *O*ma) und ein Punkt R (wie *R*otkäppchen); O und R liegen nicht am Fluss.

  Rotkäppchen soll zum Fluss laufen, Wasser schöpfen und es der Oma bringen. Wie muss Rotkäppchen laufen, damit ihr Gesamtweg minimal ist?

- Auf den Seiten eines Rechtecks wird eine Strecke der Länge x jeweils ausgehend von den Eckpunkten entsprechend dem Umlaufsinn abgetragen.

  Die vier freien Endpunkte werden miteinander verbunden.

  Für welche Länge x wird der Flächeninhalt des Parallelogramms minimal?



4.3 Schritte im Problemlöseprozess; Fragen (nach Polya)

GEORGE POLYA: *Schule des Denkens*, Tübingen: Francke, 1949 (innerer Buchumschlag).

1. Verstehen der Aufgabe

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

Beispiel (Polya):
Bestimme die Längen der Raumdiagonalen eines Quaders, dessen Seitenlängen bekannt sind.

2. Ausdenken eines Planes

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die ... eine ähnliche Unbekannte hat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen?* Würdest Du irgend ein *Hilfselement* einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst du dir Aufgabe anders ausdrücken? ... Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, *zuerst eine verwandte Aufgabe* zu *lösen*.
  - Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken?
  - Eine allgemeinere Aufgabe? Eine spezielle Aufgabe? Eine analoge Aufgabe?
  - Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? ...

  Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

3. Ausführen des Planes

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist?

4. Rückschau

- Kannst du das *Resultat kontrollieren*? Kannst du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weisen ableiten?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Beispiel: Stufen (nach POLYA) bei einem Extremwertproblem

Ordnen Sie den Stufen von Problemlöseprozessen (nach POLYA) geeignete *Fragen, Lösungswege, Variationen* dem auf S. **??** genannten Extremwertproblem zu. (Lösen Sie dazu zunächst die Aufgabe und denken Sie dabei schon über mögliche Variationen, vor allem Vereinfachungen, nach.)

4.4 Allgemeine heuristische Strategien

- ***Inhaltliches oder konkret-experimentelles Lösen von Problemen***

  Berechnungsprobleme lassen sich oft mit Hilfe einer Tabelle oder Zeichnung durch das Messen der gesuchten Größen lösen. Auch wenn diese erste Lösung oft nur eine Näherung darstellt, kann sie zumindest Aufschluss über die Größenordnung geben oder bei offenen Problemen helfen, eine Vermutung zu generieren.

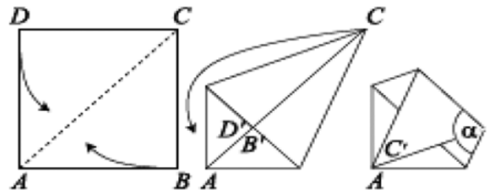
Beispiel: Bearbeitung der folgenden Aufgabe durch Realschüler, Kl. 7, 8

Ein quadratisches Papier wird wie auf der Abbildung zu einem Fünfeck gefaltet:

1. Die Seiten BC und CD werden auf die Diagonale AC gefaltet.
2. C wird auf A gefaltet.

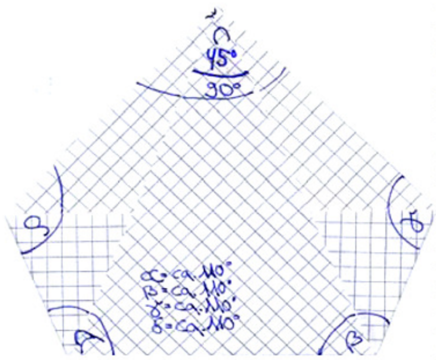
Ermittle den Winkel α ohne Hilfe des Geodreiecks.

Findest du noch möglichst viele andere Winkel ohne Messung?



Winkel α: 112°
Erklärung: Wir haben es nachgefaltet und dann gemessen. Aber wir haben das Nachgefaltete auf ein Blatt geklebt und den Winkel verlängert.

Ein Lösungsbeispiel für „Messen“

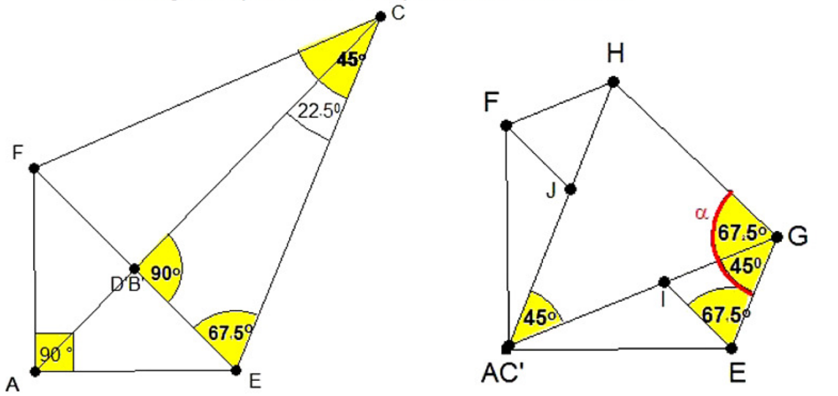


Wir haben das Papier genauso gefaltet
Seite A = 90°
α = ca. 110° (geschätzt)
Wir wollten die Winkelsumme − 90° und durch 4 teilen. Aber wir wussten nicht wie die Summe.
Wir haben versucht mit Summe = 360°
Aber das ist falsch! Kommt nur 67,5° raus.
Wir haben dann Summe um 180° erhöht.
540° − 90° = 450° : 4 = 112,5° Das ist das richtige Ergebnis!

1) α = 67,5°
γ = 45°
β = 67,5°

α = 67,5° + 45° = 112,5°
Wir haben die Winkel nacheinander berechnet.

Lösungsbeispiel für „In Teilprobleme unterteilen“



- ***Nutzung von Darstellungen und Darstellungswechsel***

  Dass das Anfertigen einer Skizze bei einem geometrischen Problem weiterhelfen kann, ist unmittelbar einsichtig.

  Hilfreich können auch der Übergang von einem Schrägbild zu einer Schnittzeichnung oder das Einzeichnen von Hilfsebenen und Teilfiguren sein.

  Mitunter lassen sich ursprünglich geometrische Probleme durch eine Algebraisierung lösen: Speziell bei Extremwertproblemen werden dann Maxima oder Minima von Funktionen bestimmt.

- ***Vorwärtsarbeiten***

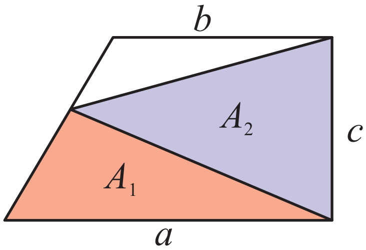
  Ausgehend von den gegebenen Größen geht man Schritt für Schritt weiter zu den gesuchten. Die Leitfragen lauten: Was weiß man schon über das Gegebene? Was kann man damit erreichen?

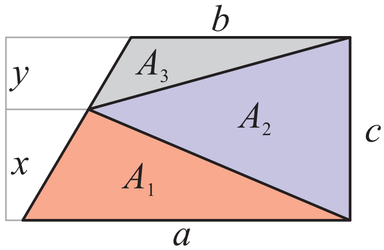
- ***Rückwärtsarbeiten***

  Beim Rückwärtsarbeiten beginnt der Lösungsweg bei der gesuchten Größe; von dieser ausgehend arbeitet man rückwärts bis hin zu den gegebenen Größen. Die Leitfragen lauten: Was weiß man schon über das Gesuchte? Was benötigt man, um das Gesuchte zu erreichen? In der Praxis ist oft auch eine Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten erfolgreich.

Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten an einem Beispiel

In der abgebildeten Figur sind folgende Größen bekannt:
$a = 9\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$,
$A_1 = 13{,}5\,\text{cm}^2$.
Gesucht ist der Flächeninhalt A_2.



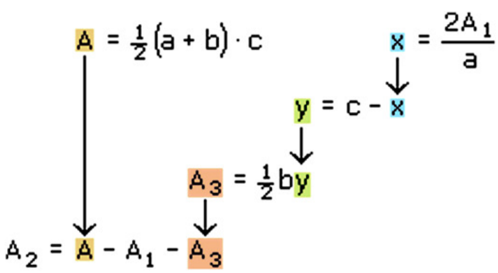


- Welche Größen in der Figur könnten für die Lösung noch von Bedeutung sein?

$\rightarrow$ Einzeichnen weiterer Größen in die Figur (siehe die Abb. rechts).

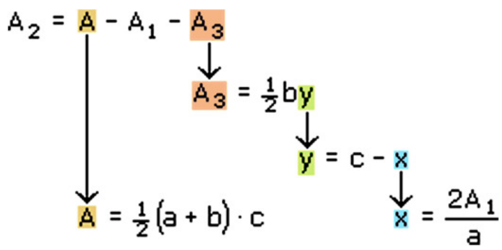
Lösung durch Vorwärtsarbeiten

- Beginnen mit den gegebenen Größen a, b und c;
- Flächeninhalt A des Trapezes (Gesamtfigur) berechnen;
- x aus A_1 und a berechnen
  $\rightarrow y \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$



Lösung durch Rückwärtsarbeiten

- Der gesuchte Flächeninhalt A_2 bildet den Ausgangspunkt;
- der Lösungsweg wird „rückwärts“ hin zu den gegebenen Größen entwickelt.



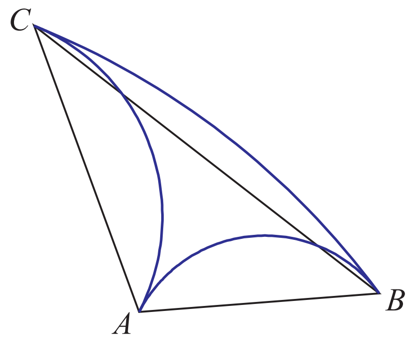
Anspruchsvolles Beispiel für Rückwärtsarbeiten: *Dreibogeneck*

- Drei Kreisbögen bilden ein Dreibogeneck ABC, wenn sie auf Kreisen liegen, die sich in den Punkten A, B bzw. C berühren.

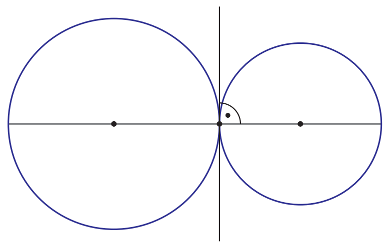
  Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, die in der Zeichenebene liegen und deren Mittelpunktswinkel kleiner als $180°$ sind.

  Gegeben sind die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist. Konstruiere das zugehörige Dreibogeneck ABC.

  (Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg, 2006)



Mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware und unter Herausarbeitung einer Bedingung für eine gemeinsame Tangente an zwei Kreise (siehe die Abb. rechts) kann eine Lösung konstruiert werden, bei der aber noch ein Punkt „an die richtige Stelle gezogen“ werden muss
→ immerhin eine „halbe“ Lösung.

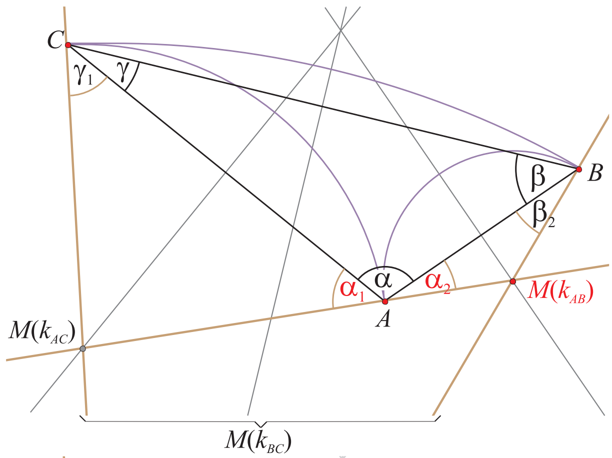


Die so schon erhaltene Lösung erleichtert den Schritt zu einer exakten Konstruktion.

Die Kenntnis von α_1 / α_2 würde zu einer eindeutigen Konstruktion führen.

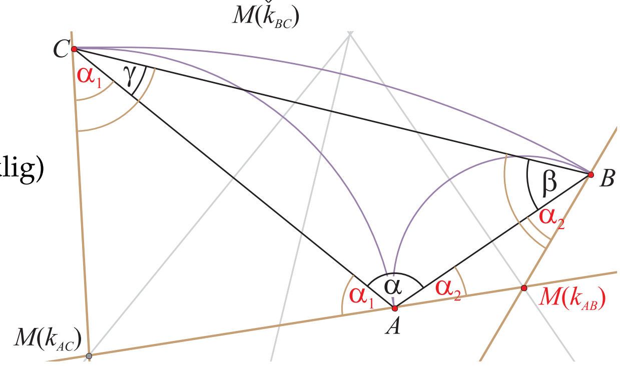
Gleichsch. Dreiecke $ACM(k_{AC})$, $ABM(k_{AB})$
$\Rightarrow$ $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 &= 180° \\ \Rightarrow \qquad \beta + \gamma &= \alpha_1 + \alpha_2 \quad (1) \end{aligned}$$



Außerdem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \gamma &= \alpha_2 + \beta && (\Delta BCM(k_{BC}) \text{ ist gleichschenklig}) \\ \gamma - \beta &= \alpha_2 - \alpha_1 && (2) \\ 2\gamma &= 2\alpha_2 && (\text{wegen } (1) \text{ und } (2)) \\ \gamma &= \alpha_2 \end{aligned}$$



Alternative Lösung (nach der Konstruktion der drei Mittelsenkrechten und dem Zeichnen „einigermaßen passender“ Kreise):

- Zeichne den Umkreis des Dreiecks ΔABC.
- Welchen Zusammenhang erkennst du zwischen dem Umkreis und deinen ungefähr „passenden“ Kreisen des Dreibogenecks?
- Versuche nun, das Dreibogeneck exakt zu konstruieren.
- Begründe, dass deine Konstruktion die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Weitere allgemeine heuristische Strategien

- ***Analogisieren***

  Das Herstellen von Analogien – insbesondere zu bereits bekannten Problemen – kann oft hilfreich sein.

  $\rightarrow$ Siehe auch die „POLYA-Fragen".

  Häufig herangezogen werden u. a. Analogien zwischen ebener Geometrie und Raumgeometrie: So lassen sich typische Prinzipien der Flächeninhaltsbestimmung (wie die Zerlegungs- oder Ergänzungsgleichheit) auf die Volumenbestimmung übertragen.

- ***Invarianzprinzip***

  Es geht darum, die Invarianten (die unveränderlichen Größen) eines Problems zu erkennen. Dies ist nicht immer leicht, da sich die Aufmerksamkeit natürlicherweise zunächst stärker auf die Unterschiede oder auf veränderliche Größen richtet.

  (vgl. Beispiel „Rutschende Leiter")

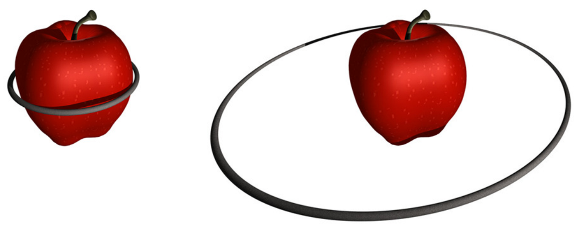
- ***Spezialisieren***

  Zunächst wird ein Spezialfall des gestellten Problems bearbeitet. In einem weiteren Schritt wird dann auf die Lösung des ursprünglichen Problems geschlossen. Diese heuristische Strategie kann auch helfen, eine Lösungsidee zu gewinnen. In Spezialfällen lassen sich ferner besonders gut manche Beziehungen (etwa über Winkelmaße oder Streckenlängen) ablesen.

- ***Generalisieren***

  Es wird ein allgemeineres als das gestellte Problem gelöst, was in manchen Fällen einfacher ist und auch zu weiter reichenden Einsichten führen kann (vgl. Beispiel 11).

Beispiel für Generalisieren: *Seil um die Erdkugel*



Ein Seil wird um einen Apfel ($d \approx 6$ cm) gelegt, um einen Meter verlängert und so gestrafft, dass es wiederum einen Kreis bildet, der an jeder Stelle denselben Abstand zum Apfel besitzt.

Kann dann eine Maus unter dem Seil durchschlüpfen?

In gleicher Weise wird ein Seil entlang des Äquators um die Erdkugel ($d \approx 12.700$ km) gelegt, um einen Meter verlängert und so gestrafft, dass es wiederum einen Kreis bildet, der an jeder Stelle denselben Abstand zum Äquator besitzt. Kann dann eine Maus unter dem Seil durchschlüpfen?

- Das Problem lässt sich durch Nachrechnen mit den gegebenen Zahlen lösen.
- Es kann aber auch im Zuge einer *Generalisierung* unabhängig von den gegebenen Zahlen in allgemeiner Weise betrachtet werden:

  Bei einem Kreis mit Radius r und Umfang u wird der Umfang um Δu vergrößert. Wie groß ist Δr?

  $$\Delta r = (r + \Delta r) - r = \frac{u + \Delta u}{2\pi} - \frac{u}{2\pi} = \frac{(u + \Delta u) - u}{2\pi} = \frac{\Delta u}{2\pi}$$

  Eine Verlängerung des Seils um Δu bewirkt also stets denselben Abstand Δr, unabhängig davon, wie groß r ist.

Die Generalisierung schafft *Einsichten, die weit über die eigentliche Problemlösung hinaus reichen:*

Wenn zwei Größen (hier: u und r) proportional sind, dann gilt dies auch für die entsprechenden Differenzen (hier: Δu und Δr).

4.5 Inhaltsspezifische heuristische Strategien

- Einzeichnen geeigneter *Hilfslinien*,
- Suchen *gleich langer Strecken* (gleichschenklige oder -seitige Dreiecke, Seiten eines Parallelogramms, Kreisradien, ...),
- Suchen *gleich großer oder einander ergänzender Winkel*,
- Suchen *rechtwinkliger Dreiecke bzw. Teildreiecke* $\rightarrow$ *Pythagoras*,
- Suchen nach *Symmetrien* oder auch *Ergänzung zu symmetri- schen Figuren*,
- Suchen *kongruenter Dreiecke*, um gleich lange Strecken bzw. gleich große Winkel zu bestimmen,
- Suchen *ähnlicher Dreiecke* $\rightarrow$ *Streckenverhältnisse* bestimmen,
- Suchen *paralleler Geraden* $\rightarrow$ *Winkelbeziehungen*; *Strahlensätze*,
- Suchen *inhaltsgleicher Drei- oder Vierecke*, um aus den Formeln für die Flächeninhalte unbekannte Größen zu errechnen,
- Suchen *ergänzungsgleicher oder zerlegungsgleicher Flächen*.

Bewusstmachen inhaltsspezifischer Strategien

Für Berechnungen an Körpern kann häufig der Satz des Pythagoras eingesetzt werden, wenn man geeignete rechtwinklige Dreiecke heranzieht. Diese inhaltsspezifische heuristische Strategie lässt durch eine entsprechende Zusammenstellung explizit und damit auch bewusst machen (nach BRUDER 2000, S. 15).