Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler Sommersemester 2015

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Elementargeometrie

5 Raum- bzw. Körpergeometrie in der Sekundarstufe I

Körperdarstellungen und Körperberechnungen treten in mehreren Klassenstufen auf. Dabei werden im Laufe der Schulzeit immer „kompliziertere“ Körper betrachtet. Ein Sonderfall ist die Kugel: in Bezug auf Definition und Darstellung ist sie der einfachste (und zugleich „perfekteste“) aller Körper; die Berechnung ihres Oberflächeninhalts und Volumens erfordert hingegen tiefgehende Überlegungen und sorgfältige „Vorarbeiten“. Neben *Begriffsklärungen* umfassen die Stoffgebiete zur Körpergeometrie in den einzelnen Schuljahren vor allem *Körperdarstellungen und -berechnungen*. Da oft lange Zeiträume zwischen der Behandlung von Elementen der Körpergeometrie liegen (mitunter mehr als ein Schuljahr), kommt *Wiederholungen und Übungen* besondere Bedeutung zu. Dies trifft u. a. für Schrägbilddarstellungen zu, die erstmals bereits in Klassenstufe 5/6 für Würfel und Quader auftreten, später dann für Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel.

5.1 Überblick über die im Mathematikunterricht behandelten Körper

Aussagen des Rahmenlehrplanes zur Behandlung von Elementen der Körpergeometrie finden sich unter den *Leitideen „Raum und Form“* sowie *„Messen“* bzw. in der Grundschule unter *„Form und Veränderung“* sowie *„Größen und Messen“*.

Klassenstufen 3/4

- Objekte aus der Umwelt beschreiben und nach ihren mathematischen Eigenschaften ordnen: Pyramide, Kegel, Zylinder;
- Freihandzeichnungen von Würfeln und Quadern;
- vage Aussagen zu Volumina:
  – „Einheitswürfel“
  – „Größenangaben umwandeln … Rauminhalt: Liter, Milliliter

Klassenstufen 5/6

- Körper darstellen – Schrägbilder in Punkt- und Karoraster;
- zu regelmäßigen Körpern Netze herstellen;
- Zuordnungen zwischen Körpern und Netzen vornehmen;
- Symmetrien in ebenen Figuren und Körpern identifizieren;
- Volumen von Würfel und Quader berechnen und die Formel begründen;
- Volumen von aus Würfeln und Quadern zusammengesetzten Körpern;
- Oberflächeninhalt des Quaders

Klassenstufen 7/8

Kompetenzen: Bestimmen des Flächen- und Rauminhaltes von geometrischen Objekten, insbesondere in der Umwelt

Schülertätigkeiten

* entwerfen Netze von Prismen, Zylindern, Pyramiden und Kegeln;
* stellen Modelle von Prismen und Zylindern her;
* begründen die Formeln für das Volumen von geraden Prismen und geraden Kreiszylindern;
* wenden die Volumenformeln für Prismen und Zylinder an;
* ermitteln Oberflächeninhalte von Quadern und geraden Kreiszylindern in ihrem Umfeld;

** ermitteln Oberflächeninhalte von regelmäßigen dreiseitigen Prismen in ihrem Umfeld;
** Oberflächen- und Rauminhalte von zusammengesetzten Körpern;
*** – keine zusätzlichen Vorgaben –

Klassenstufen 9/10 – Modul „Körper herstellen und berechnen“

Kompetenzbezug:

Die folgenden Kompetenzen zum Darstellen und zu den Leitideen Raum und Form und Messen bilden den Schwerpunkt dieses Moduls:

- Erkennen und Beschreiben geometrischer Strukturen in der Umwelt;
- Analysieren und Klassifizieren von Körpern auch aus entsprechenden zweidimensionalen Darstellungen;
- Skizzieren von Schrägbildern, Entwerfen von Körpernetzen und Herstellung von Modellen ausgewählter Körper;
- Berechnen von Volumen und Oberflächeninhalt von Körpern.

Schülertätigkeiten

* charakterisieren Körper (Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel);
* charakterisieren Körper aus ihrer Umwelt;
* zeichnen Schrägbilder von Körpern;
* entwerfen Netze von Pyramiden und Kegeln;
* stellen Modelle einfacher Körper her (Pyramide, Kegel);
* begründen die Formeln für das Volumen von Pyramide, Kegel und Halbkugel durch experimentellen Inhaltsvergleich;
* berechnen das Volumen und den Oberflächeninhalt von Pyramiden, Kegeln und Kugeln in Sachzusammenhängen.

** skizzieren u. zeichnen Schrägbilder zusammengesetzter Körper;
** begründen den Satz von Cavalieri anschaulich;
** wenden den Satz von Cavalieri zur Bestimmung des Pyramidenvolumens an;
** leiten die Formeln für den Oberflächeninhalt von Pyramide und Kegel her;
** ermitteln den Oberflächeninhalt von Kugeln näherungsweise durch Zerlegung;
** berechnen Volumina von zusammengesetzten Körpern in Sachzusammenhängen;

*** begründen das Volumen von Kegel oder Kugel mit einem Näherungsverfahren.

Zusammenfassung

Die Behandlung der folgenden Körper soll also erfolgen:

- Körper mit ebenen Begrenzungsflächen
  - Würfel, Quader
  - Prisma
  - Pyramide (und Pyramidenstumpf)
- Körper mit gekrümmten Begrenzungsflächen
  - Kreiszylinder
  - Kreiskegel (und Kegelstumpf)
  - Kugel, Kugelteile.
- zusammengesetzte Körper

Von diesen Körpern sollen zeichnerische Darstellungen angefertigt, Netze und Abwicklungen betrachtet (soweit möglich) sowie Flächeninhalte und Volumina berechnet werden.

5.2 Begriffsbestimmungen

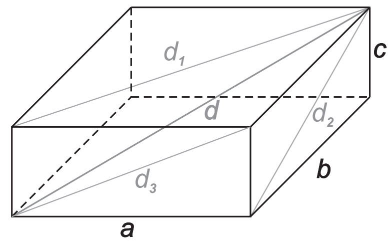
Im Folgenden werden Definitionen und einige grundlegende Eigenschaften der im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I behandelten Körper angegeben.[1] Diese können als Grundlage und „Hintergrund" für die Erarbeitungen der entsprechenden Begriffe im Unterricht dienen. Unmittelbar lassen sich diese Definitionen jedoch in früheren Schuljahren nicht im Unterricht verwenden.

Polyeder [2] (Vielflächner, ebenflächig begrenzter Körper): Ein Polyeder ist eine beschränkte dreidimensionale Punktmenge des Raumes, die von endlich vielen ebenen Flächenstücken (n-Ecken) begrenzt wird. Gemeinsame Strecken verschiedener Begrenzungsflächen (Facetten) eines Polyeders werden *Kanten*, gemeinsame Eckpunkte von Begrenzungsflächen *Ecken* des Polyeders genannt. … Die Vereinigung aller Punkte der begrenzenden n-Ecke ist die *Oberfläche des Polyeders*, die gewöhnlich als Teilmenge des Polyeders aufgefasst wird. Ein Polyeder heißt *konvex*, falls es zu jeweils zwei beliebigen seiner Punkte auch alle Punkte ihrer Verbindungsstrecke enthält. Sind alle Kanten eines konvexen Polyeders gleich lang und treffen sich an jeder Polyederecke gleich viele Seitenflächen, so handelt es sich um ein *reguläres Polyeder*. Ein konvexes Polyeder kann auch als beschränkte Durchschnittsmenge endlich vieler abgeschlossener Halbräume definiert werden.

Würfel: geometrischer Körper, der von sechs Quadraten begrenzt wird. Jeder Würfel besitzt 8 Eckpunkte und 12 Kanten, die alle gleich lang sind. Würfel sind reguläre Polyeder (Platonische Körper) und werden auch als *Hexaeder* bezeichnet. Jedem Körper kann eine Kugel umbeschrieben werden. Ihr Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen.

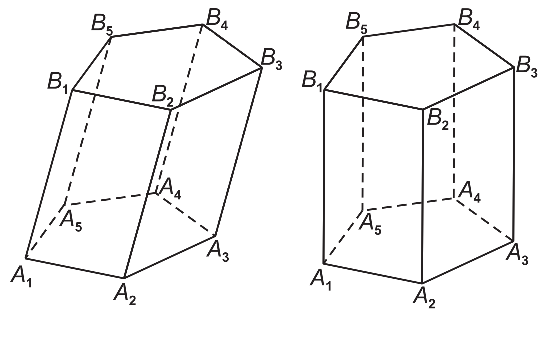
Quader: geometrischer Körper der von 6 Rechtecken begrenzt wird. Davon sind jeweils zwei gegenüberliegende Rechtecke kongruent. Jeder Quader besitzt acht Eckpunkte und zwölf Kanten, von denen jeweils vier gleich lang sind.

Die vier Raumdiagonalen eines beliebigen Quaders schneiden sich in einem Punkt und halbieren jeweils einander. Alle acht Eckpunkte eines Quaders liegen auf einer Kugel, der *Umkugel* des Quaders, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der Raumdiagonalen ist. Ein Quader, dessen sämtliche Kanten gleich lang sind, ist ein Würfel.



Prisma: ebenflächig begrenzter Körper mit zwei kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden, n-Ecken $A_1A_2 \dots A_n$ und $B_1B_2 \dots B_n$ als Grund- und Deckfläche sowie n Parallelogrammen als Seitenflächen. Die beiden n-Ecke müssen „parallelkongruent" zueinander sein, d.h. sie müssen durch eine Verschiebung auseinander hervorgehen; die Eckpunkte der Parallelogramme sind jeweils zwei Paare zueinandergehörender Ecken der Grund- und Deckfläche. Die Seiten der Grund- und Deckfläche heißen *Grundkanten*, diejenigen der Seitenflächen *Mantellinien* des Prismas. Ein Prisma, dessen Grund- und Deckfläche jeweils n Ecken haben, besitzt somit $3n$ Kanten, davon n Mantellinien, und wird *n-seitiges Prisma* genannt.

Verlaufen die Mantellinien eines Prismas senkrecht zur Grundfläche, so heißt es *gerades Prisma*, anderenfalls *schiefes Prisma*. Als *Höhe* eines Prismas wird der Abstand der beiden Ebenen, denen die Grund- und die Deckfläche angehören, bezeichnet. Ein Prisma, dessen Grund- und Deckfläche regelmäßige Vielecke sind, heißt *regelmäßiges Prisma*; sind Grund- und Deckfläche eines Prismas Parallelogramme, so handelt es sich um ein *Parallelepiped*.

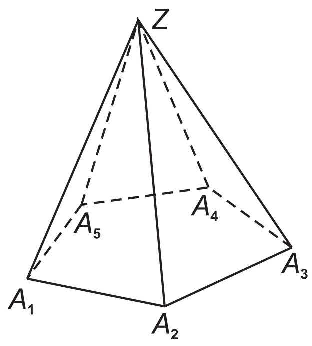


[1] Die Definitionen sind entnommen aus dem *Lexikon der Mathematik* (Bände 1-6). Heidelberg: Spektrum, 1999-2003.

[2] Obwohl das Wort „Polyeder" in der Schule selten verwendet wird, muss die Definition hier gegeben werden, da „Polyeder" bzw. „ebenflächig begrenzter Körper" ein Oberbegriff ist, der in vielen der folgenden Definitionen verwendet wird.

Pyramide: geometrischer Körper, der von einem ebenen n-Eck $A_1A_2\dots A_n$ und allen Dreiecken $\triangle A_iA_{i+1}Z$, deren Eckpunkte jeweils zwei benachbarte Punkte dieses n-Ecks und ein fester Punkt Z sind, begrenzt wird.

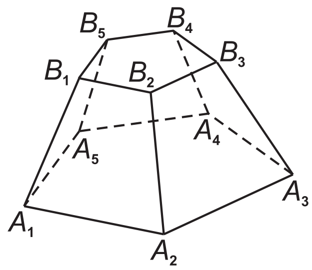
Das n-Eck $A_1A_2\dots A_n$ heißt *Grundfläche*, die Dreiecke *Seitenflächen*, die Gesamtheit aller Seitenflächen *Mantelfläche* und der Punkt Z *Spitze* der Pyramide. Die Seiten des n-Ecks werden als *Grundkanten*, die Verbindungsstrecken zwischen den Eckpunkten der Grundfläche und der Pyramidenspitze als *Mantellinien* bezeichnet. Der Abstand der Spitze einer Pyramide zur Ebene der Grundfläche heißt *Höhe der Pyramide*.



Eine Pyramide mit einer n-eckigen Grundfläche wird als *n-seitige Pyramide* bezeichnet, eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche z. B. als vierseitige Pyramide. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt M und ist die Verbindungsstrecke zwischen M und Z senkrecht zur Grundfläche der Pyramide, so heißt diese *gerade*, anderenfalls *schief*. Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, wird *regelmäßige Pyramide* genannt.

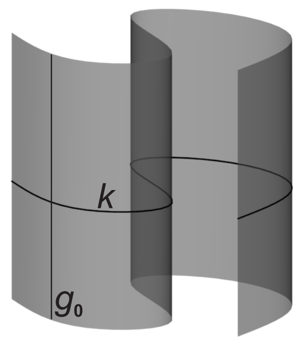
Pyramidenstumpf: Körper der entsteht, indem eine Pyramide von einer Ebene ϵ geschnitten wird, die parallel zur Grundfläche der Pyramide verläuft.

Eine solche Ebene schneidet eine n-seitige Pyramide in einem n-Eck $B_1B_2\dots B_n$, das zur Grundfläche $A_1A_2\dots A_n$ der Pyramide ähnlich ist und als *Deckfläche* des Pyramidenstumpfes bezeichnet wird. Die Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes sind Trapeze; geht der Pyramidenstumpf aus einer regelmäßigen Pyramide hervor, so handelt es sich um gleichseitige Trapeze. Der Abstand zwischen der Schnittebene ϵ und der Grundebene ist die *Höhe* des Pyramidenstumpfes.



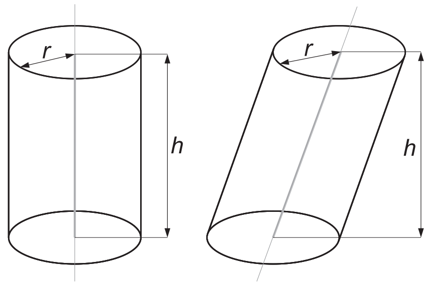
Zylinder: geometrischer Körper, der von einer *Zylinderfläche* und zwei parallelen Ebenen begrenzt wird. Unter einer Zylinderfläche wird dabei eine Fläche verstanden, die aus allen Geraden g des Raumes besteht, die mit einer vorgegebenen Kurve k, der *Leitkurve* der Zylinderfläche, jeweils einen gemeinsamen Punkt besitzen und zu einer vorgegebenen Geraden g_0, die ebenfalls k schneidet, parallel sind.

Diese Geraden werden als die *Erzeugenden* der Zylinderfläche bezeichnet. Die Leitkurve k soll eine „echte" Kurve, also weder eine Punkt noch eine Kurve, die ein gesamtes Flächenstück vollständig bedeckt, sein. Es muss sich dabei jedoch nicht notwendig um eine geschlossene und auch nicht um eine ebene Kurve handeln. Jede Zylinderfläche kann in eine Ebene abgewickelt werden und besitzt daher in jedem ihrer Punkte die Gaußsche Krümmung Null. Oft wird auch die Zylinderfläche selbst als Zylinder bezeichnet.



Ein Körper, der von einem Teil einer Zylinderfläche mit einer geschlossenen Leitkurve k, der von zwei parallelen Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 ausgeschnitten wird, und den Ebenenstücken, welche die Zylinderfläche aus ϵ_1 und ϵ_2 ausschneidet, begrenzt wird, heißt *Zylinderkörper* oder einfach *Zylinder*. Die Teile der Zylinderoberfläche, die in ϵ_1 bzw. ϵ_2 liegen, heißen *Grund-* und *Deckfläche*; derjenige Teil, welcher auf der Zylinderfläche liegt, *Mantelfläche* oder *Mantel* des Zylinders. Die Grund- und die Deckfläche eines beliebigen Zylinders sind zueinander kongruent. Die Teile der Erzeugenden der Zylinderfläche, die auf dem Mantel liegen, werden als *Mantellinien* und der Abstand der Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 als *Höhe h* des Zylinders bezeichnet.

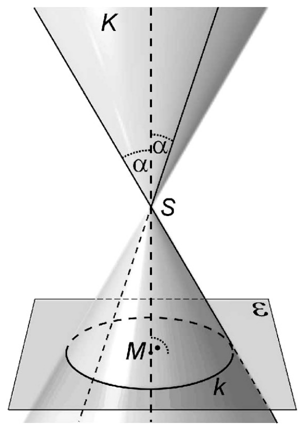
Ein Zylinder mit kreisförmigen Grund- und Deckflächen heißt *Kreiszylinder*; die Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten des Grund- und Deckkreises *Achse* des Kreiszylinders. Bei einem *geraden Kreiszylinder* steht die Achse senkrecht auf der Ebene des Grundkreises (und somit auch auf der Ebene des Deckkreises); anderenfalls handelt es sich um einen *schiefen Kreiszylinder*.



Kreiskegel: Menge der Punkte aller Geraden, die einen Punkt S des Raumes mit den Punkten eines Kreises k verbinden. Diese Geraden werden *Mantellinien* des Kreiskegels K genannt. Der Punkt S heißt *Spitze*, der Kreis k *Grundkreis* von K.

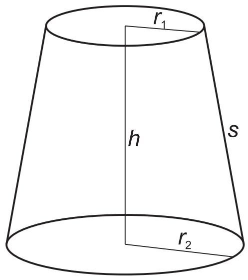
Die Gerade durch die Spitze S und den Mittelpunkt M des Grundkreises wird als *Achse des Kreiskegels K* bezeichnet. Steht die Achse eines Kreiskegels K senkrecht auf der Grundkreisebene ϵ, so ist K ein *gerader Kreiskegel*. Ist α der Winkel zwischen der Kegelachse und den Mantellinien, so heißt 2α *Öffnungswinkel* von K.

Ein Kreiskegel in dem so beschriebenen Sinne ist unendlich ausgedehnt und besteht aus zwei *Kegelästen* (den beiden Hälften, in die der Kegel durch seine Spitze geteilt wird); es handelt sich also um einen Doppelkegel. Allerdings lassen sich auch *einfache Kreiskegel* betrachten, wobei dann die Mantellinien lediglich Strahlen mit der Spitze als Anfangspunkt sind. *Endliche Kreiskegel* werden durch die Grundkreisebene und die Verbindungsstrecken zwischen der Spitze und den Punkten des Grundkreises begrenzt.



Kegelstumpf: Körper, der entsteht, wenn ein Kreiskegel mit zwei zur Achse des Kegels senkrechten Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 geschnitten wird (wobei ϵ_1 und ϵ_2 die Kegelachse auf derselben Seite bezüglich der Spitze des Kreiskegels schneiden).

Der Abstand der Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 heißt *Höhe h* und die Radien r_1, r_2 der beiden entstehen Schnittkreise des Kegels mit den beiden Ebenen heißen *Radien des Kegelstumpfes*.



Kugel: Menge aller Punkte des Raumes, die von einem gegebenen Punkt M (dem Mittelpunkt) einen Abstand haben, der kleiner oder gleich einem festen Wert r (dem Radius) ist. Die Oberfläche einer Kugel (d. h. die Menge aller Punkte, die von M den Abstand r haben) wird als *Sphäre* bezeichnet, mitunter wird jedoch auch der Begriff „Kugel" selbst in diesem Sinne gebraucht und die Menge der Punkte im Kugelinneren als *Kugelkörper* bezeichnet.

Die Kugel gilt als der harmonischste aller Körper, was vor allem darauf zurückzuführen ist, daß ihre Krümmung in jedem Punkt denselben Wert besitzt.

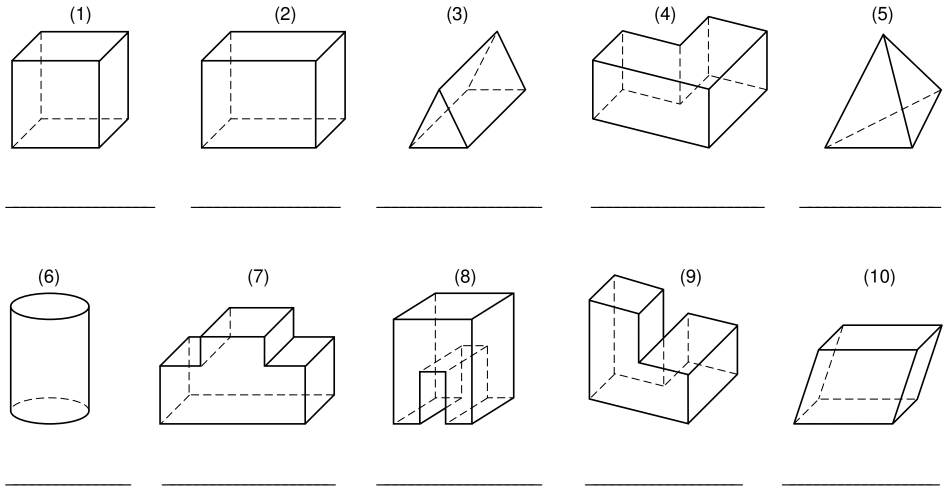
Wie bereits erwähnt wurde, werden exakte Definitionen nicht für alle in der Schule behandelten Körper erarbeitet werden können. Jedoch sollten die Schüler durch

- Untersuchung von realen Körpern,
- Anfertigung von Körpernetzen,
- Herstellen von Körpern (Kantenmodelle aus Stäben oder Draht, Flächenmodelle aus Körpernetzen),
- Schnittbetrachtungen

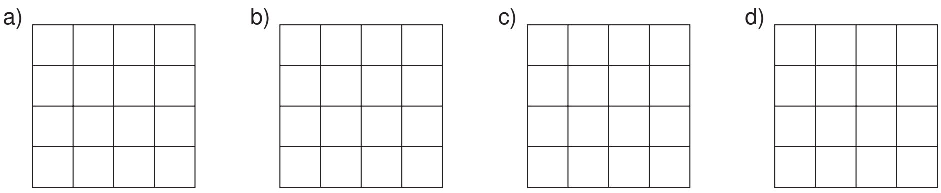
sowie Besprechung der dabei entdeckten Eigenschaften die meisten der in der obigen Aufzählung enthaltenen Charakteristika der Körper erarbeiten. Dies beginnt bereits in der Grundschule und setzt sich dann schrittweise bis zum Ende der Sekundarstufe I fort.

Im Folgenden sind einige Aufgaben zum „Kennenlernen“ bzw. Festigen von Körpern und ihren Eigenschaften angegeben (von denen einige naturgemäß auch auf die Entwicklung räumlichen Vorstellungsvermögens zielen).[3]

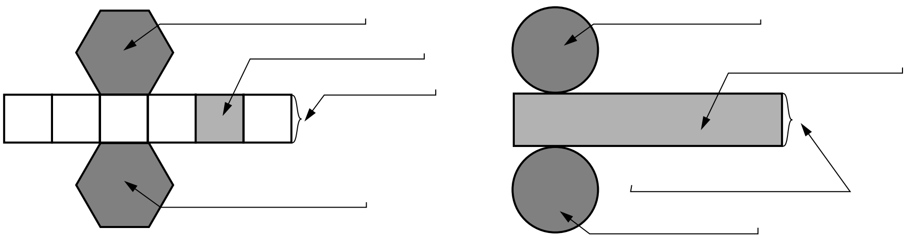
1. a) Gib jedem Körper nach Möglichkeit einen Namen!
b) Kennzeichne bei den Prismen eine mögliche Grundfläche farbig!



2. Zeichne vier unterschiedliche Würfelnetze! Färbe die entsprechenden Kästchen!



12. Vergleiche Begriffe am Prisma und am Zylinder! Gib den gekennzeichneten Flächen bzw. Strecken der Netze die für Prismen bzw. Zylinder gebräuchlichen Bezeichnungen!



3. Gegeben ist das Netz einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS.

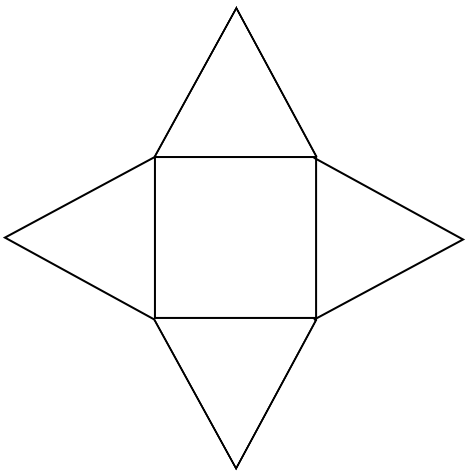
a) Bestimme die Länge der Höhe h durch Konstruktion und Messen!

____

b) Füge in das Netz den Grundriss der Pyramide ein und skizziere den dazugehörigen Aufriss!

c) Der Punkt A soll sich auf einem Kreis um den Mittelpunkt der Grundfläche bewegen. Wie bewegt sich dabei die Pyramide ABCDS?

____

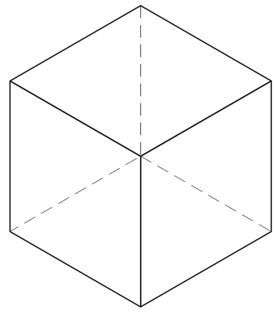


[3]Die Aufgaben sind entnommen aus: *Mathematik 7* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2002 und *Mathematik 8* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2003.

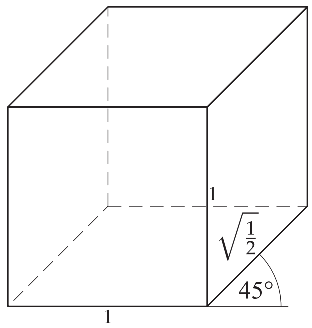
5.3 Körperdarstellung

Am häufigsten werden Körper in der Schule in perspektivischen Darstellungen (Schrägbildern) dargestellt. In Einzelfällen kommen Zweitafelprojektionen (Grund- und Aufriss) sowie (seltener) Zentralprojektionen zum Einsatz.

5.3.1 Schrägbilder von Würfeln und Quadern



Die in der Schule verwendeten Schrägbilder entstehen meist durch Parallelprojektion. Um einen im Raum befindlichen Körper abzubilden, müssen eine Bildebene und eine Richtung festgelegt werden. Als Bildebene verwendet man, wenn dies möglich ist, meist eine Ebene, in der eine Seitenfläche des darzustellenden Körpers liegt. Die nebenstehende Abbildung zeigt zwar ebenfalls ein Schrägbild eines Quaders (isometrische Darstellung), diese Darstellungsweise ist in der Schule aber eher unüblich.



Um zu einem Punkt eines Körpers den zugehörigen Bildpunkt in der Bildebene zu finden, konstruiert man durch ihn eine Gerade, die parallel zu Projektionsrichtung liegt. Ihr Schnitt mit der Bildebene definiert den Bildpunkt. Festzulegen sind bei den in der Schule verwendeten Schrägbilddarstellungen der Winkel zwischen Bildebene und Projektionsrichtung (meist 45°) sowie ein „Verkürzungsfaktor" für Strecken in der zur Bildebene senkrechten Raumdimension. Meist wird hierfür $\sqrt{\frac{1}{2}}$, seltener $\frac{1}{2}$ verwendet. (Mithilfe karierten Papiers können Schüler den Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}}$ auch dann leicht konstruieren, wenn sie Quadratwurzeln noch nicht kennen.)

In Klassenstufe 5/6 wird mit dem Zeichnen von Schrägbildern für Würfel und Quader begonnen, es können Aufgaben der folgenden Art gestellt werden:

Aufgabe: Zeichne das Schrägbild eines Quaders, der 3 cm lang, 3 cm breit und 2 cm hoch ist.

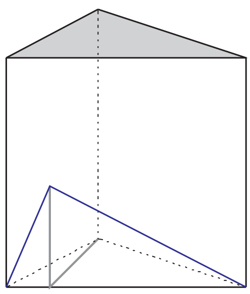
1. Die „vordere" Seitenfläche des Körpers in wahrer Größe zeichnen.
2. Die nach hinten verlaufenden Kanten im Winkel von 45° zeichnen, für jeden „wahren" Zentimeter die Diagonale eines Kästchens (mit der Seitenlänge 0,5 cm), also $\sqrt{\frac{1}{2}}$ cm, verwenden.
3. Die entstehenden Eckpunkte miteinander verbinden, nicht sichtbare Kanten stricheln.

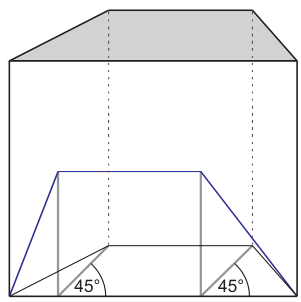
Schrägbilder „komplizierterer" Körper werden (in höheren Klassenstufen) oft auf Schrägbilder von Würfeln und Quadern zurückgeführt. Deshalb wird diese Thematik im Verlauf der Schulzeit mehrfach zu wiederholen und zu festigen sein.

5.3.2 Schrägbilder von Prismen

Die Seiten der Grundfläche eines Prismas verlaufen i. Allg. nicht senkrecht zur Bildebene, daher sind für die Schrägbilddarstellung Hilfslinien notwendig.

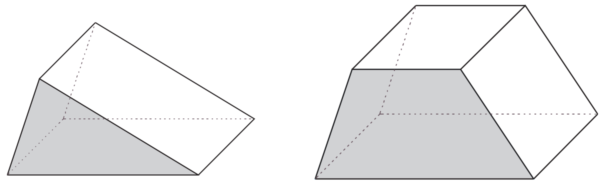
Beispiele: Prismen mit dreieckiger und trapezförmiger Grundfläche; die wahre Größe der Grundfläche ist jeweils blau dargestellt.



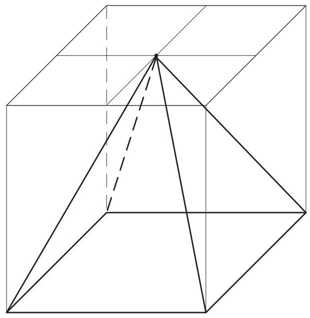


Die Arbeit mit Schrägbildern erlaubt vielfältige Variationen:

- Verschiedene Schrägbilder für denselben Körper, jeweils eine andere Seite ist Frontseite (siehe Abb.).
- Auf die Oberfläche eines Prismas (bzw. speziell eines Quaders) ist ein Muster gezeichnet. Übertrage das Muster auf das Schrägbild.
- Zu Schrägbildern Netze erstellen und umgekehrt.



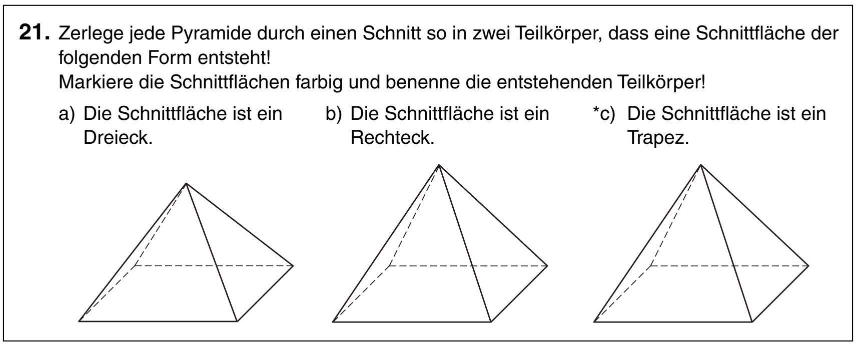
5.3.3 Schrägbilder und Schnitte von Pyramiden



Für die Erstellung von Schrägbildern von Pyramiden greift man auf Schrägbilder von Quadern zurück, wobei auf der Deckfläche das Bild der Zylinderspitze zu konstruieren ist.

Axialschnitte (Schnitte durch die Symmetrieachse) der Pyramide sind Dreiecke. Wichtig für die räumliche Vorstellung ist die Überlegung, welche Schnittflächen überhaupt entstehen können. Da Schnitte mit technischen Geräten (Sägen u. ä.) hergestellt werden können, ist das für viele Berufe unmittelbar relevant.

Bei der regelmäßigen Pyramide kann man Dreiecke, Quadrate, Trapeze und weitere Vierecke erhalten. Die konkrete Umsetzung kann (neben dem realen Zerschneiden oder der Verwendung des Computers) auch durch das Eintauchen von Körpermodellen in Wasser erfolgen.

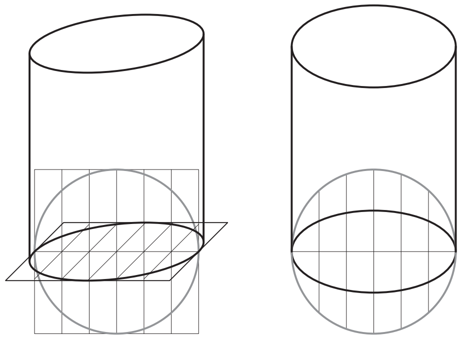


21. Zerlege jede Pyramide durch einen Schnitt so in zwei Teilkörper, dass eine Schnittfläche der folgenden Form entsteht!
Markiere die Schnittflächen farbig und benenne die entstehenden Teilkörper!

a) Die Schnittfläche ist ein Dreieck.
b) Die Schnittfläche ist ein Rechteck.
*c) Die Schnittfläche ist ein Trapez.

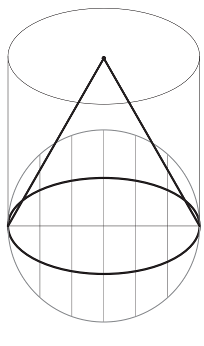
Aus: *Mathematik 9* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2004.

5.3.4 Schrägbilder von Zylindern und Kegeln



Wird das übliche Schrägbildverfahren (Verkürzungsfaktor $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$, Verzerrungswinkel 45°) auf einen Kreis angewendet, so entsteht ein ungewohntes Bild (siehe links); zudem ist die Konstruktion nicht ganz einfach. Es ist daher üblich, als Verkürzungsfaktor zwar $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (oder in diesem Falle im Sinne der Einfachheit $\frac{1}{2}$) zu wählen, als Verzerrungswinkel aber 90° zu verwenden.

Bei der Behandlung von Schrägbildern von Zylindern müssen die Schüler punktweise *Ellipsen* konstruieren. Das ist eine Gelegenheit, diese in der Schule sträflichst vernachlässigte Figur zu thematisieren.



So wie Schrägbilder von Pyramiden aus Schrägbildern von Quadern bzw. Prismen konstruiert werden können, dient als Hilfsfigur zur Konstruktion des Schrägbildes eines geraden Kreiskegels ein gerader Kreiszylinder.

5.4 Oberflächeninhalte von Körpern

Für die Berechnung von Oberflächeninhalten der in der Sekundarstufe I behandelten Körper (mit Ausnahme der Kugel) sind folgende Überlegungen zu führen:

- (Gedankliche oder tatsächliche) Konstruktion eines Netzes (bei ebenflächig begrenzten Körpern) oder Abwicklung (bei Zylindern, Kegeln und Kegelstümpfen),
- Bestimmung der Flächeninhalte der durch Netzbildung oder Abwicklung entstehenden ebenen Figuren.

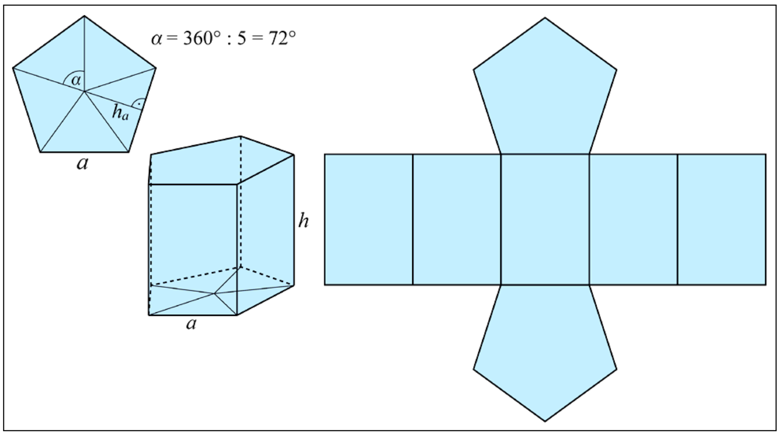
Neben der räumlichen Anschauung und der Fähigkeit, die auftretenden Grund-, Deck-, Seiten- und Mantelflächen richtig zuzuordnen, kommt es für die Bestimmung von Oberflächeninhalten also wesentlich darauf an, dass die Schüler Flächeninhalte ebener Figuren (Dreiecke, Rechtecke, mitunter andere Vierecke und Fünfecke, Kreise sowie Kreissektoren) bestimmen können. Diese Flächeninhaltsberechnungen können bei der Bestimmung von Oberflächeninhalten gefestigt werden, oft ist dabei eine Wiederholung notwendig.

5.4.1 Oberflächeninhalte ebenflächig begrenzter Körper

Beispiel
(aus dem Schulbuch Konkret 6, Realschule, Klasse 10)

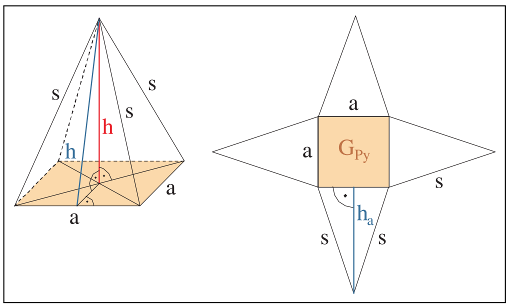
Aufgabe:
Gib mithilfe der Abbildungen allgemeine Formeln zur Berechnung des Volumens, des Mantels und der Oberfläche eines Prismas an.

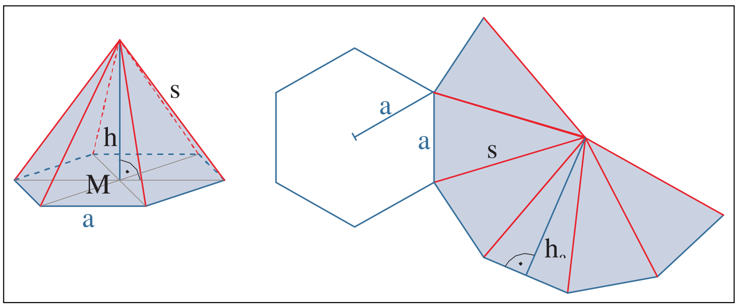
Natürlich könnte diese Aufgabe auch beispielbezogen (mit konkreten Zahlen) gestellt werden.



Grundsätzlich gilt für den Oberflächeninhalt eines Prismas natürlich $O = 2A_G + M$ (A_G – Grundfläche, M – Mantelfläche). Diese Formel sollte aber von den Schülern als geometrische Eigenschaft verstanden werden und nicht als „Formel“ „abgelegt“ oder im schlimmsten Fall sogar auswendig gelernt werden.

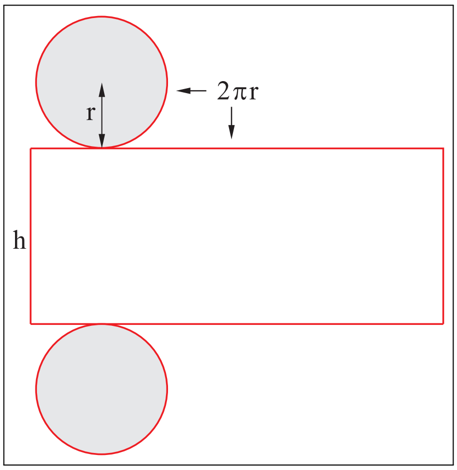
Analoge Überlegungen mithilfe von Körpernetzen lassen sich auch für den Oberflächeninhalt von Pyramiden anstellen:

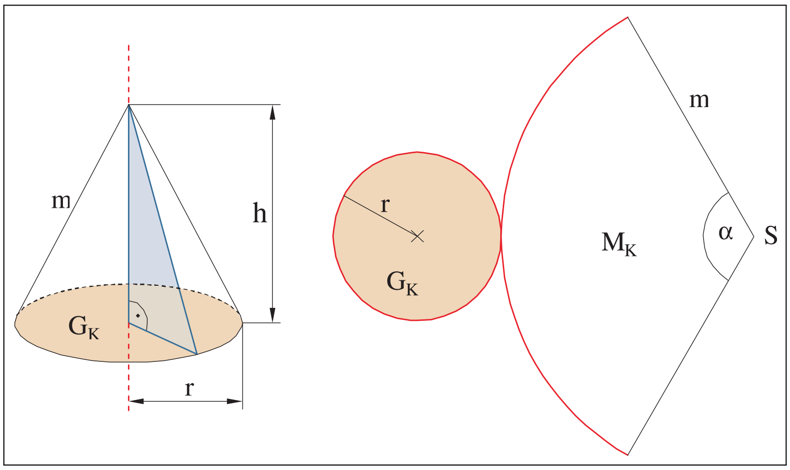




5.4.2 Oberflächeninhalte von Körpern mit gekrümmten Begrenzungsflächen

Um Oberflächeninhalte von Kreiszylindern berechnen, müssen die Schüler Berechnungen an Kreisen (Umfang und Flächeninhalt) wiederholen und anwenden (siehe die nächste Abbildung, links).





Für Oberflächeninhalte von Kegeln werden zusätzlich Kreissektoren benötigt (siehe die Abb. oben rechts). Um den Flächeninhalt des Kreissektors zu bestimmen, der durch Abwicklung des Mantels des Kegels entsteht, ist zunächst der Umfang des Grundkreises des Kegels zu berechnen: $u = 2\pi r$. Die Bogenlänge des Kreissektors ist gleich diesem Umfang, damit gilt $u = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi m$.
Damit ließe sich nun der Winkel α des Kreissektors berechnen, was aber nicht unbedingt nötig ist, denn für den gesuchten Flächeninhalt des Kreissektors gilt $M_K = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi m^2$. Setzt man hierin nun $u = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi m$ ein, so erhält man $M_K = \frac{u \cdot m}{2} = \pi r m$. Für den gesamten Oberflächeninhalt des Kreiskegels ergibt sich daraus $O_K = G_K + M_K = \pi r^2 + \pi r m = \pi r(r + m)$.

Häufig ist die Länge der Mantellinien eines Kegels nicht bekannt, sondern nur sein Radius und seine Höhe. Dann muss m mithilfe des Satzes des Pythagoras durch h und r ausgedrückt werden: $m = \sqrt{h^2 + r^2}$. Damit ergibt sich die folgende Formel für den Oberflächeninhalt eines Kreiskegels:

$$O_K = \pi r \left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right).$$

Die Herleitung einer Formel für den Oberflächeninhalt eines Kreiskegels benötigt – wie oben zu sehen ist – einige Schritte. Es ist nicht zu erwarten, dass die Mehrzahl der Schüler diese ad hoc führen wird. Durch geeignete Aufgabensequenzen lassen sich Schüler aber zur Herleitung der Formel hinführen. Dies kann beispielbezogen oder allgemein erfolgen.

Aufgabe: Entwickeln Sie eine Aufgabensequenz, welche Schüler an einem Beispiel zur Berechnung des Oberflächeninhalt eines Kreiskegels führt (die Formel ist den Schülern nicht bekannt). Überlegen Sie dazu insbesondere, welche mathematischen Kenntnisse dazu reaktiviert werden müssen und berücksichtigen Sie dies bei der Zusammenstellung und Formulierung der Aufgaben.

5.4.3 Der Oberflächeninhalt der Kugel

Die Berechnung des Oberflächeninhalts der Kugel bzw. die Herleitung einer Formel dafür ist auf den bisher für andere Körper beschriebenen Wegen *nicht möglich*, denn die Kugeloberfläche (oder auch nur ein Teil davon) lässt sich nicht in eine Ebene „abwickeln“. Eine exakte Berechnung der Kugeloberfläche ist mithilfe der *Integralrechnung* (was jedoch für die Sekundarstufe I nicht in Frage kommt) oder mithilfe des *Kugelvolumens* möglich. Dazu muss dieses bereits behandelt worden sein (siehe S. 18). Ansonsten sollten zu der Oberflächenformel $O = \pi d^2 = 4\pi r^2$ der Kugel zumindest *Plausibilitätsbetrachtungen* geführt werden, die mit unterschiedlicher Genauigkeit möglich sind:

- Der Term für den Oberflächeninhalt der Kugel muss proportional zu r^2 sein, da dies von der Einheit einen Flächeninhalt ergibt, und da sich Flächeninhalte bei Streckung generell quadratisch ändern. Die Oberfläche des Würfels, der die Kugel einschließt ist $6 \cdot (2r)^2 = 24r^2$ und das ist, wie es ja sein muss, mehr als der Formelwert $O = 4\pi r^2 \approx 12{,}57r^2$. Sowohl Struktur des Terms als auch Größenordnung sind also plausibel.
- Eine genauere Plausibilitätsbetrachtung kann experimentell geführt werden. Dazu überlegt

man, dass $O = 4\pi r^2$ gerade den Flächeninhalten von vier Großkreisen (Äquatorkreisen) der Kugel entspricht. Um durch ein Experiment zu bestätigen, dass die Kugel denselben Flächeninhalt hat wie vier Äquatorkreise, zeigt man, dass eine Halbkugel durch zwei Äquatorkreise bedeckt wird. Dazu müssen diese ausgeschnitten, in kleine Schnipsel zerteilt und dann auf eine Halbkugel geklebt werden. Bei einigermaßen genauem Arbeiten zeigt sich, dass die Schnipsel die Halbkugel ziemlich genau bedecken, ohne zu überlappen.

5.5 Volumina von Körpern

Volumen:[4] Produkt $a \cdot e^3$ aus einer reellen Zahl a und einer festen Volumeneinheit e^3, das geometrischen Körpern zugeordnet wird und folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gilt $a \geq 0$.
2. Zwei kongruente Körper haben gleiche Volumina.
3. Haben zwei Körper mit den Volumina $a \cdot e^3$ und $b \cdot e^3$ keine gemeinsamen inneren Punkte, so hat die Vereinigung der Punkte der beiden Körper das Volumen $(a + b) \cdot e^3$.
4. Das Volumen einer festgelegten Volumenenheit beträgt $1 \cdot e^3$.

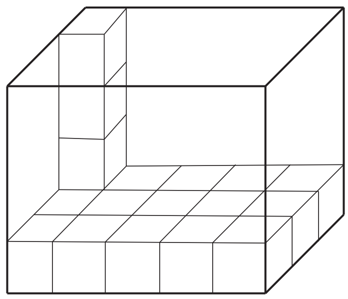
Die Zahl a wird als *Maßzahl* des Volumens bezüglich der verwendeten Volumeneinheit bezeichnet, für die oft ein Würfel mit einer Einheitsstrecke als Kante gewählt wird. Hat diese die Länge 1 Meter, so ist die daraus resultierende Volumeneinheit das Kubikmeter (m^3). Daraus können weitere Volumeneinheiten abgleitet werden, wie z. B. $1cm^3 = 0,01^3 m^3 = 10^{-6} m^3$.

Die Zuordnung eines Volumens zu einem Körper kann dadurch erfolgen, daß durch Unterteilung der Volumeneinheit kleinere Würfel gewonnen werden und ermittelt wird, wieviele dieser, immer kleiner werdenden, Würfel in dem gegebenen Körper Platz finden. Konvergiert die Summe der Volumina der Teilwürfel, die innerhalb des Körpers angeordnet werden können, für gegen Null strebende Kantenlängen der Teilwürfel, so besitzt der betrachtete Körper ein Volumen, er heißt dann *quadrierbar*.

Grundideen dieser Begriffsbestimmung können – wie die folgenden Überlegungen zeigen – am Ende der Grundschule und am Beginn der Sekundarstufe I bereits gut umgesetzt werden.

5.5.1 Exemplarische Volumenbestimmung

Eine Kiste wird mit Kubikzentimeter- oder Kubikdezimeterwürfeln ausgefüllt; die Anzahl der benötigten Einheitswürfel soll bestimmt werden. Es genügt, wie in der Zeichnung angedeutet, die Kiste nur teilweise auszufüllen, um die Strategie des Abzählens zu finden:



Anzahl der Würfel in der Kiste

= Anzahl der Würfel einer Schicht · Anzahl der Schichten.

Im nächsten Schritt wird zur *Maßzahlformel* übergegangen:

Maßzahl des Rauminhalts

= Maßzahl der Länge · Maßzahl der Breite · Maßzahl der Höhe

(bei gleicher Maßeinheit von Länge, Breite und Höhe)

Vorstellungsgrundlage für Raummaße und ihre Umrechnung

Durch ein Umfüllexperiment wird festgehalten: 1 l = 1 dm^3.

Die Beziehung 1 dm^3 = 1 000 cm^3 sollte unbedingt anhand entsprechender Modelle verdeutlicht werden (z. B. Kiste wie oben mit der Seitenlänge 1 dm). Auch die Beziehung 1 m^3 = 1 000 000 cm^3 mit der fast schon unvorstellbar großen Zahl von einer Million Würfel der Kantenlänge 1 cm in einer Kiste der Kantenlänge 1 m sollte für die Schüler so anschaulich wie möglich werden.

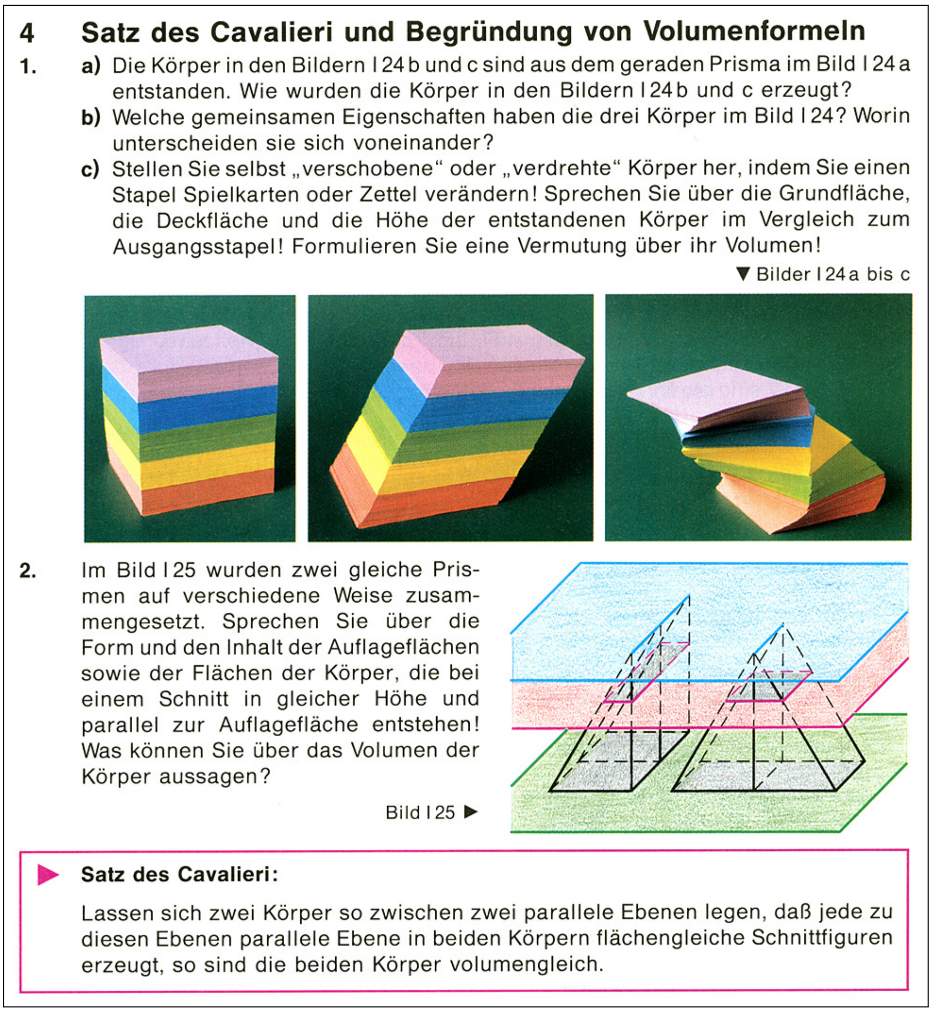
[4] *Lexikon der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum, 1999-2003, Band 5, S. 354.

5.5.2 Das Prinzip des Cavalieri

Das Prinzip des Cavalieri[a] ist bei Volumenbestimmungen häufig von Bedeutung. Es lässt sich anschaulich demonstrieren: Man stellt einen Bücherstapel als Quader auf den Tisch. Dann verschiebt (genauer gesagt: schert) man den Quader zu einem „schiefen Turm“. Offensichtlich ändert sich dabei das Volumen nicht. Auch wenn man den Stapel in sich verdreht, bleibt das Volumen konstant. Die Abbildung rechts zeigt die Einführung des Prinzips des Cavalieri in einem Schulbuch.[b]

[a] FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI, 1598-1647

[b] *Mathematik 9*. Berlin: Volk und Wissen, 1995. (Diesem Buch liegt die Vorstellung zugrunde, dass Schüler ab dem 14. Lebensjahr mit „Sie“ angesprochen werden.)



4 Satz des Cavalieri und Begründung von Volumenformeln

1. **a)** Die Körper in den Bildern I 24 b und c sind aus dem geraden Prisma im Bild I 24 a entstanden. Wie wurden die Körper in den Bildern I 24 b und c erzeugt?
b) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die drei Körper im Bild I 24? Worin unterscheiden sie sich voneinander?
c) Stellen Sie selbst „verschobene“ oder „verdrehte“ Körper her, indem Sie einen Stapel Spielkarten oder Zettel verändern! Sprechen Sie über die Grundfläche, die Deckfläche und die Höhe der entstandenen Körper im Vergleich zum Ausgangsstapel! Formulieren Sie eine Vermutung über ihr Volumen!

▼ Bilder I 24 a bis c

2. Im Bild I 25 wurden zwei gleiche Prismen auf verschiedene Weise zusammengesetzt. Sprechen Sie über die Form und den Inhalt der Auflageflächen sowie der Flächen der Körper, die bei einem Schnitt in gleicher Höhe und parallel zur Auflagefläche entstehen! Was können Sie über das Volumen der Körper aussagen?

Bild I 25 ▶

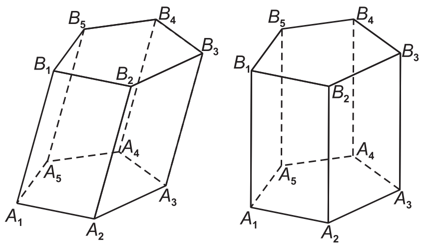
Satz des Cavalieri:

Lassen sich zwei Körper so zwischen zwei parallele Ebenen legen, daß jede zu diesen Ebenen parallele Ebene in beiden Körpern flächengleiche Schnittfiguren erzeugt, so sind die beiden Körper volumengleich.

5.5.3 Volumina von Prismen und Zylindern

Das Volumen eines *Prismas* hängt aufgrund des Prinzips von Cavalieri nur von der Höhe h und vom Flächeninhalt A_G der Grundfläche ab, nicht jedoch davon, ob es sich um ein gerades oder ein schiefes Prisma handelt (dies gilt natürlich auch für Zyliner); es gilt in beiden Fällen:

$$V = A_G \cdot h.$$

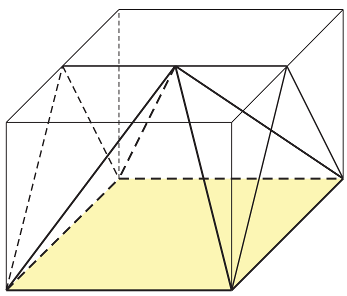


Aufgrund der Analogie zwischen Prisma und Zylinder berechnet sich das *Zylindervolumen* nach derselben Formel wie beim Prisma. Für einen beliebigen *Kreiszylinders* mit der Höhe h und dem Radius r des Grundkreises ergibt sich daraus:

$$V = \pi r^2 h.$$

5.5.4 Das Volumen der Pyramide

Bekannt ist die Formel für das Volumen von Prismen: $V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$. Viele Schüler vermuten (in Analogie zum ebenen Fall) für das Pyramidenvolumen $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{2} A_G \cdot h$. Diese Vermutung wird anschaulich widerlegt durch die Betrachtung eines „Keils“ (Dreiecksprisma, das ein halber Quader ist, siehe die Abbildung links).

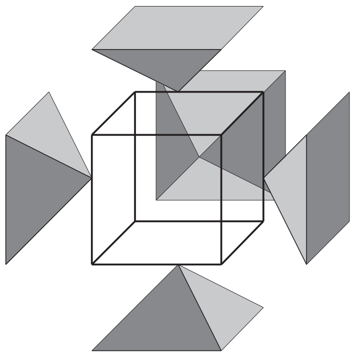


Es existieren mehrere Möglichkeiten (unterschiedlichen Allgemeinheitsgrades), die richtige Formel für das Pyramidenvolumen herzuleiten bzw. plausibel zu machen.

Umfüllversuche

- Zunächst wird gesammelt, von welchen Daten das Volumen wohl abhängen wird. Mögliche Schülerantworten: Höhe, Seitenfläche, Grundfläche, Kantenlänge.
- Umfüllversuche: Es werden Hohlmodelle mit Sand oder Wasser gefüllt und ihre Volumina durch Umfüllen miteinander verglichen. Schüler können so feststellen, dass der Inhalt einer Pyramide dreimal in den Inhalt eines umbeschriebenen (gleich hohen) Prismas passt. Solche Versuche eignen sich zur Überprüfung von Vermutungen und wohl auch zur besseren Speicherung solcher Vermutungen, mathematische Einsicht wird hingegen nicht vermittelt.

Sechsteilung eines Würfels entlang der Raumdiagonalen



- Es wird eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche betrachtet, deren Höhe gleich der halben Länge der Seitenlänge a der Grundfläche ist.
- Es wird weiterhin ein Würfel der Kantenlänge a betrachtet. Seine Raumdiagonalen zerlegen diesen Würfel in 6 kongruente Pyramiden (im Bild ist die „vordere" Pyramide weggelassen, da sie zuviel verdecken würde). Es gilt also für das Volumen der Pyramide:
$$V = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A_G.$$
- Diese Herleitung gilt natürlich nur für diese spezielle Form der Pyramide (mit Höhe = halbe Grundseite). Um sie zu verallgemeinern, lässt sich eine Streckung anwenden. Das Volumen der speziellen Pyramide mit der Höhe $\frac{a}{2}$ ist $V_0 = \frac{1}{6}a^3$. Indem man in Richtung der Höhe mit dem Streckfaktor $s = \frac{h}{\frac{a}{2}}$ streckt, erhält man daraus eine Pyramide der Höhe h. Dabei vergrößert sich das Volumen um den Faktor s, also auf
$$V = sV_0 = \frac{h}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}ha^2.$$

„Ausschöpfungsverfahren" für das Pyramidenvolumen

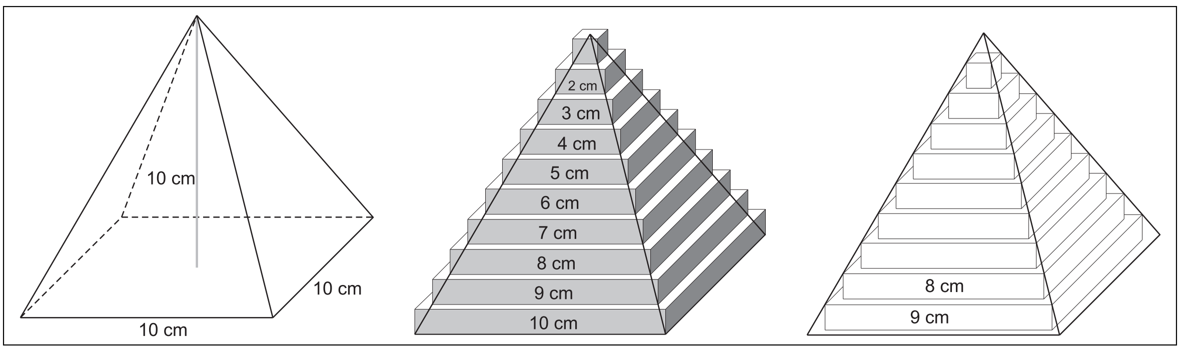
- Das Volumen einer quadratischen Pyramide soll näherungsweise bestimmt werden. Aus quadratischen „Platten" können pyramidenähnliche Körper zusammengesetzt werden (siehe die Abbildung unten).

Das Volumen des ersten Treppenkörpers ist etwas größer als das der Pyramide. Es beträgt

$$\begin{array}{rrcl} & 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 100\text{cm}^3 \\ + & 9\text{cm} \cdot 9\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 81\text{cm}^3 \\ + & \cdots & & \cdots \end{array}$$

Das Volumen des zweiten Treppenkörpers ist etwas kleiner als das der Pyramide. Es beträgt

$$\begin{array}{rrcl} & 9\text{cm} \cdot 9\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 81\text{cm}^3 \\ + & 8\text{cm} \cdot 8\text{cm} \cdot 1\text{cm} & = & 64\text{cm}^3 \\ + & \cdots & & \cdots \end{array}$$

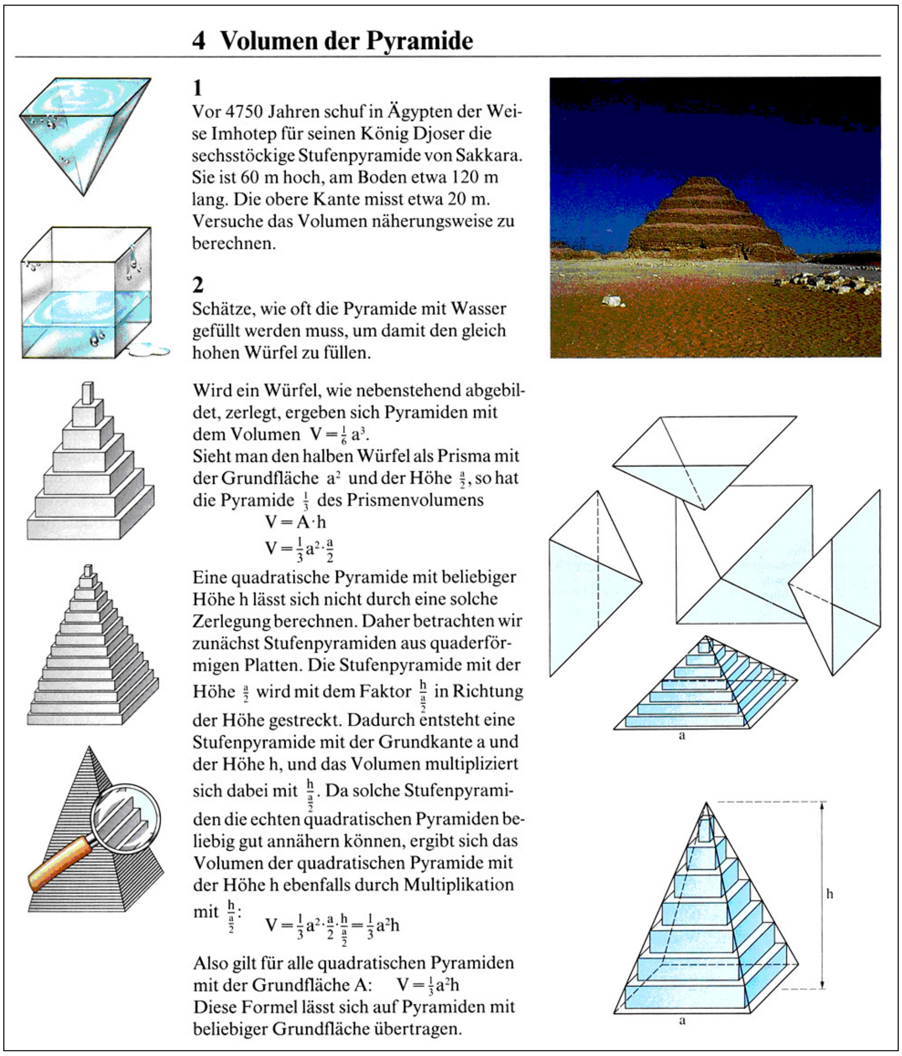


Aufgaben:

a) Führe die Berechnungen für das Volumen der beiden Treppenkörper zu Ende. Bilde den Mittelwert der beiden Volumina.

b) Vergleiche jetzt das Volumen der Pyramide mit dem Volumen des Würfels mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Vermutung: $V_{\text{Pyramide}} = \square \cdot V_{\text{Würfel}}$

In Schulbüchern lassen sich alle drei beschriebenen Herangehensweisen an die Herleitung der Formel für das Pyramidenvolumen finden, siehe den rechts abgebildeten Ausschnitt aus „Schnittpunkt".



4 Volumen der Pyramide

1
Vor 4750 Jahren schuf in Ägypten der Weise Imhotep für seinen König Djoser die sechsstöckige Stufenpyramide von Sakkara. Sie ist 60 m hoch, am Boden etwa 120 m lang. Die obere Kante misst etwa 20 m. Versuche das Volumen näherungsweise zu berechnen.

2
Schätze, wie oft die Pyramide mit Wasser gefüllt werden muss, um damit den gleich hohen Würfel zu füllen.

Wird ein Würfel, wie nebenstehend abgebildet, zerlegt, ergeben sich Pyramiden mit dem Volumen $V = \frac{1}{6}a^3$.
Sieht man den halben Würfel als Prisma mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$, so hat die Pyramide $\frac{1}{3}$ des Prismenvolumens

$$V = A \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2}$$

Eine quadratische Pyramide mit beliebiger Höhe h lässt sich nicht durch eine solche Zerlegung berechnen. Daher betrachten wir zunächst Stufenpyramiden aus quaderförmigen Platten. Die Stufenpyramide mit der Höhe $\frac{a}{2}$ wird mit dem Faktor $\frac{h}{\frac{a}{2}}$ in Richtung der Höhe gestreckt. Dadurch entsteht eine Stufenpyramide mit der Grundkante a und der Höhe h, und das Volumen multipliziert sich dabei mit $\frac{h}{\frac{a}{2}}$. Da solche Stufenpyramiden die echten quadratischen Pyramiden beliebig gut annähern können, ergibt sich das Volumen der quadratischen Pyramide mit der Höhe h ebenfalls durch Multiplikation mit $\frac{h}{\frac{a}{2}}$:

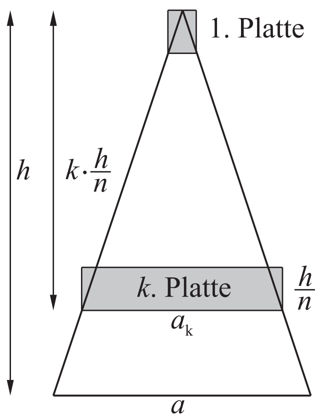
$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{3}a^2 h$$

Also gilt für alle quadratischen Pyramiden mit der Grundfläche A: $V = \frac{1}{3}a^2 h$
Diese Formel lässt sich auf Pyramiden mit beliebiger Grundfläche übertragen.

Das „Ausschöpfungsverfahren" einer Pyramide durch Quader lässt sich verfeinern und durch einen Grenzübergang exaktifizieren. Anstelle von 10 Quadern werden dazu n gleich hohe Quader verwendet.

- Ist h die Höhe der Pyramide, so ist die Höhe jedes Quaders $\frac{h}{n}$. Die anderen Kantenlängen des k-ten Quaders betragen $a_k = \frac{k}{n} \cdot a$ (falls a die Grundkantenlänge der quadratischen Pyramide ist. Für das Volumen des k-ten Quaders ergibt sich daraus

$$V_k = \left(\frac{k}{n} \cdot a\right)^2 \cdot \frac{h}{n} = \frac{a^2 \cdot h}{n^3} \cdot k^2 = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot k^2.$$



Das gesamte Volumen der „Treppenpyramide" ist somit

$$V = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Nun muss die Summe der ersten n Quadratzahlen bestimmt werden:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Für das Volumen erhalten wir daraus

$$V = \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = G \cdot h \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}.$$

Für sehr große n geht diese Formel in die bekannte Volumenformel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ über.

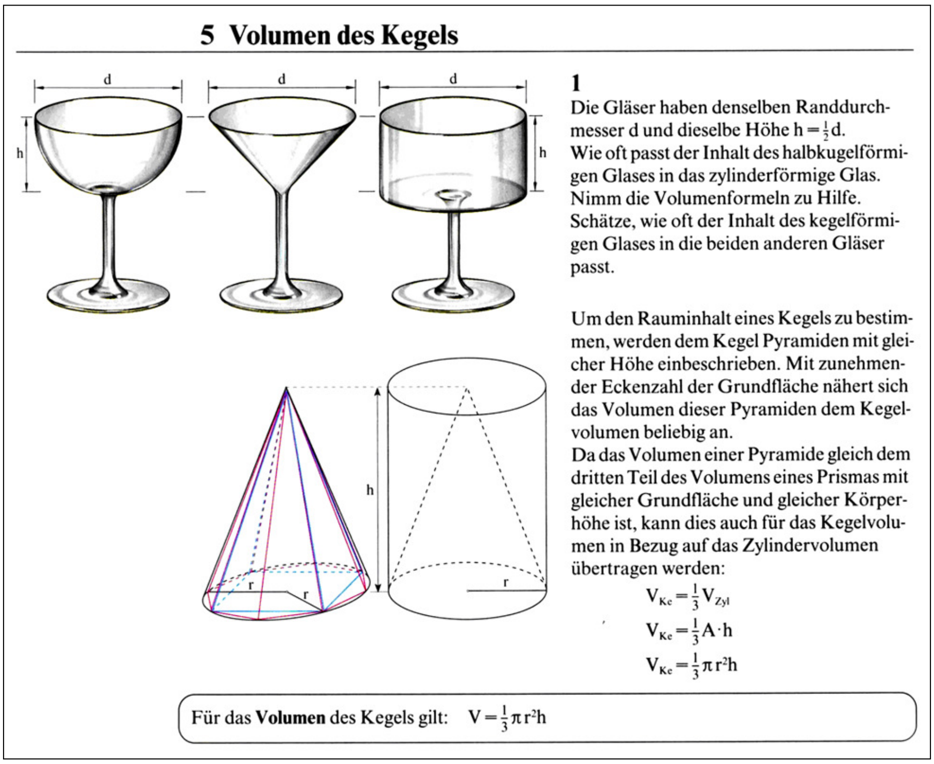
5.5.5 Das Kegelvolumen

Die Analogie zwischen Pyramide und Kegel liegt auf der Hand. Somit bieten sich vor der Behandlung des Kegelvolumens zunächst Übungen zur Wiederholung des Pyramidenvolumens an. Außerdem sollten die Schüler die Berechnungen an Kreisen wiederholen. Damit dürften sie dann recht leicht auf die Idee kommen, Volumina von Kegeln nach der Formel

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

zu berechnen. Zur Bestätigung bieten sich natürlich wieder Umfüllversuche an, wobei auch der Bezug zum Zylindervolumen hergestellt werden kann, der hier ebenfalls unbedingt ins Bewusstsein der Schüler rücken sollte.

Eine Exaktifizierung des Schlusses vom Pyramiden- auf das Kegelvolumen ist mithilfe des Prinzips von Cavalieri möglich. Mittels einer quadratischen Pyramide mit gleich großer Grundfläche und gleicher Höhe wie bei einem vorhandenen Prisma sind die Voraussetzungen das Prinzips von Cavalieri erfüllt (Strahlensatz), somit liegt gleiches Volumen von Kegel und Pyramide vor, also gilt die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ auch hier.



5 Volumen des Kegels

1
Die Gläser haben denselben Randdurchmesser d und dieselbe Höhe $h = \frac{1}{2}d$.
Wie oft passt der Inhalt des halbkugelförmigen Glases in das zylinderförmige Glas. Nimm die Volumenformeln zu Hilfe.
Schätze, wie oft der Inhalt des kegelförmigen Glases in die beiden anderen Gläser passt.

Um den Rauminhalt eines Kegels zu bestimmen, werden dem Kegel Pyramiden mit gleicher Höhe einbeschrieben. Mit zunehmender Eckenzahl der Grundfläche nähert sich das Volumen dieser Pyramiden dem Kegelvolumen beliebig an.
Da das Volumen einer Pyramide gleich dem dritten Teil des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Körperhöhe ist, kann dies auch für das Kegelvolumen in Bezug auf das Zylindervolumen übertragen werden:

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} V_{Zyl}$$
$$V_{Ke} = \frac{1}{3} A \cdot h$$
$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Für das **Volumen** des Kegels gilt: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Einführung des Kegelvolumens in dem Schulbuch „Schnittpunkt“
Die Wahl der drei Gläser könnte dadurch motiviert sein, dass bei gleichem Radius und gleicher Höhe gilt:

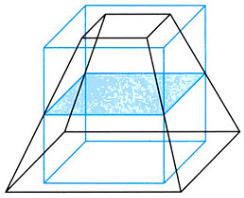
$$V_{Zylinder} = 3 \cdot V_{Kegel} = V_{Kegel} + V_{Halbkugel}$$

5.5.6 Volumina von Pyramiden- und Kegelstümpfen

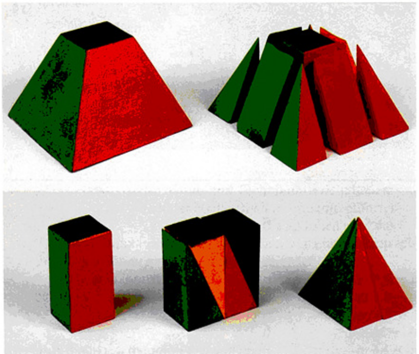
Anhand von Pyramidenstümpfen sind anspruchsvolle Überlegungen zu zusammengesetzten Körpern und/oder Differenzkörpern möglich. Die Ergebnisse lassen sich dann wiederum leicht auf Kegelstümpfe übertragen. Noch viel mehr als bei den anderen bisher behandelten Körpern, ist hier „der Weg das Ziel“. Schüler sollen *Überlegungen* zur Berechnung von Volumina anstellen, die *Formeln* können diese Überlegungen zwar „krönen“, merken werden sich die Schüler diese wohl kaum (und auswendig sollten sie selbstverständlich erst recht nicht gelernt werden).

Im Folgenden sind die Zugänge zu Volumina von Pyramiden- und Kegelstümpfen in dem Schulbuch „Schnittpunkt 6“ (Realschule, Klasse 10) wiedergegeben.

4 Volumen des Pyramidenstumpfs



Schon bei den Ägyptern und Babyloniern wurden Volumenberechnungen von pyramidenstumpfförmigen Körpern (z. B. Wasserspeicher, Dämme) durchgeführt.
Die exakten Formeln zur Berechnung waren aber noch nicht bekannt.
Das Volumen des Pyramidenstumpfs lässt sich durch den dargestellten Quader annähern. Erkläre, wie man das Quadervolumen erhält.



Ein quadratischer Pyramidenstumpf lässt sich in ein quadratisches Prisma, vier Dreiecksprismen und vier Pyramiden zerlegen. Die Dreiecksprismen lassen sich zu einem Quader, die Pyramiden zu einer quadratischen Pyramide zusammensetzen.

$V = V_{Prisma} + V_{Quader} + V_{Pyramide}$

$V = a_2^2 \cdot h + (a_1 - a_2) \cdot a_2 \cdot h + \frac{1}{3}(a_1 - a_2)^2 h$

$V = h[a_2^2 + (a_1 - a_2)a_2 + \frac{1}{3}(a_1 - a_2)^2]$

$V = h(a_2^2 + a_1a_2 - a_2^2 + \frac{1}{3}a_1^2 - \frac{2}{3}a_1a_2 + \frac{1}{3}a_2^2)$

$V = h(\frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{1}{3}a_2^2)$

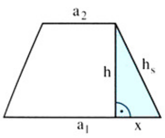
$V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$

Jeder Pyramidenstumpf mit einer anderen Grundfläche lässt sich entsprechend zerlegen, so dass die Formel verallgemeinert werden kann. Der Summand $a_1 \cdot a_2$ wird dabei zu $\sqrt{A_1 \cdot A_2}$, da $a_1 \cdot a_2 = \sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2}$.

Für das **Volumen** des Pyramidenstumpfs gilt allgemein:	$V = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$
Für den quadratischen Pyramidenstumpf gilt:	$V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$

Beispiele

a) Aus der Grundkante $a_1 = 14{,}5$ cm, der Deckkante $a_2 = 6{,}5$ cm und der Seitenhöhe $h_s = 9{,}2$ cm lässt sich zunächst die Körperhöhe h und dann das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfs berechnen.



In dem rechtwinkligen Teildreieck des Parallelschnitts gilt:

$h^2 = h_s^2 - x^2$, wobei $x = \frac{a_1 - a_2}{2}$

$h = \sqrt{9{,}2^2 - 4{,}0^2}$ cm $\qquad x = \frac{14{,}5 - 6{,}5}{2}$ cm

$h = 8{,}28$ cm $\qquad x = 4{,}0$ cm.

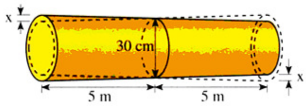
Dann gilt für das Volumen:

$V = \frac{h}{3}(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$

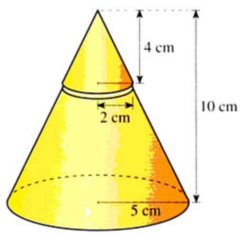
$V = \frac{8{,}28}{3}(14{,}5^2 + 14{,}5 \cdot 6{,}5 + 6{,}5^2)$ cm³

$V = 957{,}0$ cm³.

5 Volumen des Kegelstumpfs

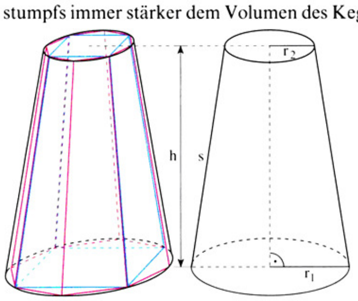


1
Die Zeichnung gibt einen Hinweis, wie man das Volumen des kegelstumpfförmigen Baumstammes näherungsweise berechnen kann. Ist das so berechnete Volumen größer oder kleiner als das wirkliche Volumen des Baumstamms? Schätze.



2
Berechne das Volumen des gesamten Kegels und des Ergänzungskegels. Mit diesen Werten kannst du auch das Volumen des Kegelstumpfs berechnen.

Um das Volumen des Kegelstumpfs zu bestimmen, wird ein Pyramidenstumpf mit gleicher Höhe einbeschrieben. Da sich mit zunehmender Eckenzahl das Volumen des Pyramidenstumpfs immer stärker dem Volumen des Kegelstumpfs annähert, kann man das Kegelstumpfvolumen aus der Volumenformel des Pyramidenstumpfs herleiten:



$V = \frac{1}{3}h(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$

Mit den beiden Grundkreisflächen $A_1 = \pi r_1^2$ und $A_2 = \pi r_2^2$ ergibt sich:

$V = \frac{1}{3}h(\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2)$

$V = \frac{1}{3}h(\pi r_1^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2)$

$V = \frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

5.5.7 Das Volumen der Kugel

Für die Herleitung der Formel des Kugelvolumens ist es von Bedeutung, ob bereits Volumina von Zylindern und Kegeln behandelt wurden. In den meisten Curricula trifft dies zu, aber mitunter wird die Kugel auch vor dem Kegel behandelt. Die populäre (unten beschriebene) Einführung des Kugelvolumens mithilfe des Prinzips von Cavalieri ist auf dieser Grundlage nicht möglich. Im Folgenden werden daher Auszüge aus einem Unterrichtsentwurf für die Einführung des Kugelvolumens (Klasse 9, Realschule) wiedergegeben, bei dem die „Herleitung“ der Volumenformel mithilfe von Analogieüberlegungen, Schätzungen und Experimenten vorgenommen wurde.

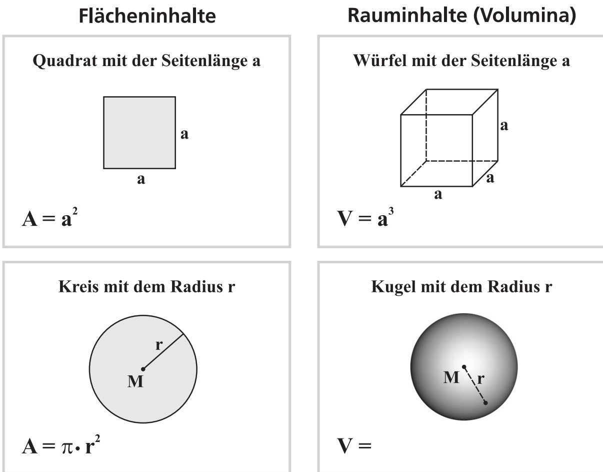
Die Gleichung $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ für das Volumen der Kugel enthält zwei Aussagen:

- Das Volumen der Kugel ist proportional zur dritten Potenz des Radius.
- Der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{4}{3}\pi$.

Während die erste dieser Aussagen durch grundsätzliche Überlegungen und Analogiebetrachtungen gewonnen werden kann (und sollte), sind für die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors Experimente und anschauliche Vergleiche notwendig.

Für die Erkenntnis der Proportionalität zwischen r^3 und V erscheint es sinnvoll, Analogiebetrachtungen zu anderen Körpern des Raumes anzustellen. (Die dritte Potenz einer bestimmenden Länge tritt u. a. auch beim Volumen des Würfels auf.[a])

[a] Um die Voraussetzungen für die Durchführung dieser Analogiebetrachtungen zu sichern, erfolgt am Anfang der Stunde eine kurze Wiederholung der Berechnung von Flächeninhalten bzw. Volumina von Quadraten, Kreisen und Würfeln. Dabei kommt es auf die verwendeten Gleichungen sowie die Auswirkung von Längenänderungen auf die Änderung des Flächeninhalts bzw. Volumens an.



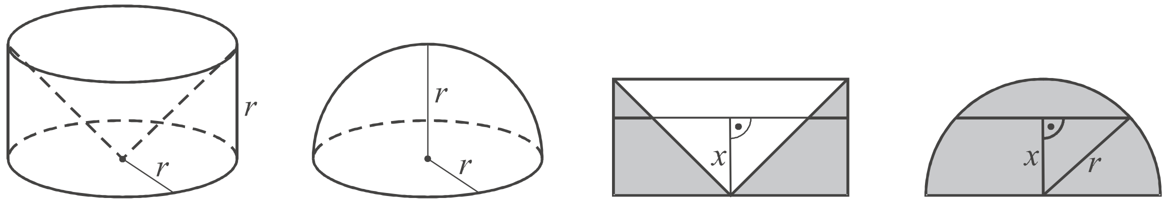
Es erscheint aussichtsreich, dass die Schüler aufgrund dieser Betrachtungen selbst zu der Vermutung $V \sim r^3$ gelangen. Zudem dürfte dann für viele von ihnen recht nahe liegen, dass das Kugelvolumen „etwas mit π zu tun hat“. An dieser Stelle kann durchaus damit gerechnet werden, dass einige Schüler für das Kugelvolumen den Vorschlag $V = \pi \cdot r^3$ unterbreiten. Dieser Vorschlag sollte dann zunächst im Raum stehen bleiben – mit der Ankündigung, ihn zu überprüfen.

Ist die Proportionalität zwischen V und r^3 herausgearbeitet, gilt die nächste Untersuchung der Frage nach dem Proportionalitätsfaktor. Diese Frage lässt sich bei dem hier beschriebenen Vorgehen nur experimentell beantworten. Dazu werden Radien und Volumina von Kugeln ermittelt (bei Hohlkugeln durch Messung des Volumens des ursprünglich enthaltenen Wassers sowie bei Vollkugeln nach der Überlaufmethode). Aus den Messwerten berechnen die Schüler Faktoren zwischen r^3 und V. Bei hinreichend gutem Material und sorgfältiger Versuchsdurchführung sollten sich Werte zwischen 4,0 und 4,4 ergeben (anstelle von $\frac{4}{3}\pi \approx 4.189$). Der exakte Proportionalitätsfaktor muss letztendlich durch den Lehrer mitgeteilt werden.

Herleitung der Gleichung für das Kugelvolumen mithilfe des Prinzips von Cavalieri

Es werden eine Halbkugel, ein Zylinder und ein Kreiskegel mit gleichem Radius r betrachtet, die Höhen des Zylinders und des Kegels haben ebenfalls die Länge r. Mit dem Prinzip von Cavalieri lässt sich zeigen, dass das Volumen der Halbkugel gleich dem Volumen des Differenzkörpers aus dem Zylinder und dem Kegel ist. Auf jeder Höhe x ist nämlich der Flächeninhalt des Kreisringes, der als Durchschnitt des Differenzkörpers und einer zur Grundfläche parallelen Ebene entsteht, gleich dem Flächeninhalt des Durchschnitts (Kreises) der Halbkugel mit dieser Ebene.[5]

[5] Aus dem Differenzkörper schneidet die Ebene einen Kreisring aus, der den Aussendruchmesser r und den Innendurchmesser x, also den Flächeninhalt $\pi r^2 - \pi x^2$ hat. Der Schnitt mit der Halbkugel ist ein Kreis, der den Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$ und somit den Flächeninhalt $\pi(r^2 - x^2)$ hat.

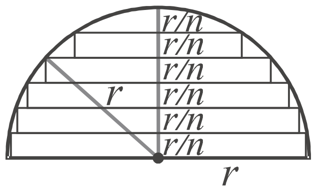


Bei bekannten Volumina von Zylinder und Kegel ergibt sich daraus $V_H = \pi \cdot r^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$ für das Volumen der Halbkugel, also $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ für das Kugelvolumen. Dieser Weg kann nur beschritten werden, wenn Schülern die Volumina von Kegel und Zylinder bereits bekannt sind.

Kugelvolumen und Treppenkörper

Ein ebenfalls recht häufig vorgeschlagener Weg zur Gewinnung der Gleichung für das Kugelvolumen besteht in der Annäherung einer Kugel (bzw. einer Halbkugel) durch einen „Treppenkörper“, der aus Zylindern gleicher Höhe besteht.

Das Volumen jedes dieser Zylinder kann in Abhängigkeit von der Höhe (die vom Radius der Kugel und der Anzahl n der einbeschriebenen Zylinder abhängt) und dem Radius des entsprechenden Zylinders (der sich mithilfe des Satzes des Pythagoras aus der Tatsache ergibt, dass alle Punkte der Kugel denselben Abstand vom Mittelpunkt haben) ausgedrückt werden.

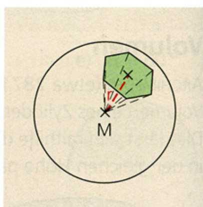


Durch Betrachtung sehr vieler Zylinder (mit entsprechend geringer Höhe) und Vollzug des Grenzübergangs ist die Herleitung der Gleichung $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ möglich. Allerdings kommen Grenzwertbetrachtungen in Klasse 9 bzw. 10 nicht in Frage. Die Reduktion der Herleitung auf die Betrachtung einer recht kleinen Zahl von Zylindern und die Berechnung von deren Volumina führt lediglich zu einer Schätzung für das Kugelvolumen (bzw. zur Gewinnung einer unteren Schranke). Der Aufwand hierfür erscheint kaum gerechtfertigt, da sich Schätzungen auch auf unmittelbare Weise durch Messungen von Flüssigkeitsvolumina durchführen lassen.

5.5.8 Der Oberflächeninhalt der Kugel – Teil 2

Mithilfe des Kugel- und des Pyramidenvolumens ist nun auch eine exakte Herleitung der Formel für die Kugeloberfläche möglich.

Die **Oberfläche** des Balls ist aus regelmäßigen Fünfecken oder Sechsecken zusammengesetzt. Verbindet man alle Ecken dieser Flächen mit dem Kugelmittelpunkt des Balls, so wird dieser näherungsweise in Pyramiden aufgeteilt, die alle als Höhe den Kugelradius haben. Diese Zerlegung ist für jede Kugel denkbar. Die Annäherung wird mit zunehmender Anzahl der Teilflächen immer besser.



Es gilt für die Pyramiden: $V_1 = \frac{1}{3} A_{G1} \cdot r$ $\quad V_2 = \frac{1}{3} A_{G2} \cdot r$ $\quad V_3 = \frac{1}{3} A_{G3} \cdot r$ usw.

Für das Volumen der Kugel gilt dann:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$$
$$V = \frac{1}{3} A_{G1} \cdot r + \frac{1}{3} A_{G2} \cdot r + \frac{1}{3} A_{G3} \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} A_{Gn} \cdot r$$
$$V = \frac{1}{3} r(A_{G1} + A_{G2} + A_{G3} + \ldots A_{Gn})$$

Da alle Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel bilden, gilt: $V = \frac{1}{3} r \cdot A_O$

Man setzt für V die Formel zur Berechnung des Kugelvolumens ein: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot A_O$

Die Formel wird nach A_O aufgelöst:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot A_O \quad | \cdot 3$$
$$4\pi r^3 = r \cdot A_O \quad | : r$$
$$4\pi r^2 = A_O$$

S Für den **Oberflächeninhalt einer Kugel** gilt: $A_O = 4\pi r^2$

Aus: *Mathematik 9* (Brandenburg, Real- und Gesamtschule), Berlin: Paetec, 2004.