Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Elementargeometrie

6 Didaktische Aspekte der Trigonometrie

Die Behandlung der Trigonometrie kann in mancherlei Hinsicht als „Krönung" des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I angesehen werden. Es bestehen Berührungspunkte besonders vieler Leitideen („Raum und Form", „Messen", „funktionaler Zusammenhang" sowie auch „Zahl") und es ergeben sich vielfältige Möglichkeiten des Anwendens, Modellierens und Vernetzens.

6.1 Stellung der Trigonometrie im Mathematikunterricht der S I

Die zumeist recht weit am Ende der Sekundarstufe I behandelte Trigonometrie weist eine Vielzahl von Bezügen zu vorherigen Inhalten des Mathematikunterrichts auf:

- Leitidee Raum und Form
  - Kongruenzgeometrie (speziell Kongruenzsätze), Dreieckskonstruktionen
  - Ähnlichkeit (einschließlich Strahlensätze)
  - Kreise und Kreisteile

  Durch die Trigonometrie werden Dreieckskonstruktionen durch Berechnungen fehlender Größen in Dreiecken ergänzt. So wie sich anhand der Kongruenzsätze Aussagen über die Konstruierbarkeit von Dreiecken machen lassen, geben sie auch Anhaltspunkte für die „Berechenbarkeit" fehlender Größen in Abhängigkeit von gegebenen Größen.

  Die Übereinstimmung von Winkeln und Seitenverhältnissen ähnlicher Dreiecke ist die entscheidende Grundlage dafür, Zusammenhänge von Winkeln und Streckenverhältnissen – und somit trigonometrische Beziehungen – zu betrachten.

  Bogenlängen von Kreissektoren bilden die Grundlage für das Bogenmaß; der Einheitskreis ist von zentraler Bedeutung für die Zuordnung von Funktionswerten zu Winkelgrößen außerhalb des Intervalls $[0;90°]$. Schließlich erweitert die Trigonometrie die Möglichkeiten, Berechnungen an Kreisen durchzuführen.

- Leitidee Messen
  - Satz bzw. Satzgruppe des Pythagoras
  - Flächenberechnungen
  - Körpergeometrie; Oberflächen- und Volumenberechnungen

  Die mit der Behandlung der Ähnlichkeit und dem Satz bzw. der Satzgruppe des Pythagoras eingeführten Möglichkeiten, Geometrie auch rechnerisch zu betreiben, werden durch die Trigonometrie bedeutend erweitert. Dabei bleiben (vor allem rechtwinklige) Dreiecke die „Elementarbestandteile" mithilfe derer Berechnungen an Figuren und Körpern vorgenommen werden. Die Möglichkeiten, Flächen- und Rauminhalte zu berechnen, erweitern sich durch die trigonometrischen Beziehungen hinsichtlich der benötigten Größen erheblich.

- Leitidee Funktionaler Zusammenhang

  Die Schüler lernen eine neue Klasse von Funktionen kennen, dabei rücken auch neue Eigenschaften von Funktionen (wie die Periodizität) in den Blickpunkt. Mit dem Zusammenhang zwischen Anstieg und Steigungswinkel linearer Funktionen erfolgt zudem eine erweiterte Betrachtung hinsichtlich bereits bekannter Funktionen.

Die Leitidee Zahl wurde in dieser Auflistung nicht explizit erwähnt. Verbindungen dazu sind jedoch gegeben, da in der Trigonometrie vielfältige Berechnungen durchgeführt werden. Hierbei sind u. a. Überlegungen zu sinnvollen Genauigkeiten anzustellen und Rechenergebnisse kritisch unter Rückbezug auf geometrische Sachverhalte sowie Anwendungskontexte zu überprüfen.

6.1.1 Algebraisierung der Geometrie – von Konstruktionen zu Berechnungen

Beginnend in der Grundschule und im gesamten Verlauf der S I treten geometrische Figuren immer wieder auf, wobei Begriffsklärungen und Klassifikationen, Untersuchungen von Eigenschaften und Beziehungen sowie Konstruktionen zunehmend durch Berechnungen ergänzt werden:

- Bereits in der Primarstufe werden *Flächeninhalte* von Rechtecken berechnet. Meist zu Beginn der S I erfolgt eine Erweiterung auf Parallelogramme und Dreiecke, später auf weitere Figuren bis hin zu Kreisen.
- Durch die Betrachtung der *Innenwinkelsumme* (vor allem von Drei-, aber auch von Vier- und Vielecken) können Schüler fehlende *Winkelgrößen* aus anderen Winkelgrößen von Figuren berechnen und auf dieser Grundlage vielfältige Problemaufgaben bearbeiten.
- Nach der Behandlung der *Strahlensätze* und der *Ähnlichkeit* geometrischer Figuren lassen sich Längen unbekannter Strecken durch die Einbettung in Strahlensatzfiguren oder das Aufsuchen geeigneter ähnlicher Dreiecke berechnen.
- Nach der Behandlung des *Satzes des Pythagoras* (und evtl. des Katheten- und Höhensatzes) ergeben sich weitere Möglichkeiten zur Berechnung von Streckenlängen und vielfältige Anwendungen, die vielfach darauf beruhen, Figuren in rechtwinklige Teildreiecke zu zerlegen.
- Mithilfe der *trigonometrischen Beziehungen* ist es schließlich möglich, *alle* unbekannten Größen in einem Dreieck zu berechnen, wenn dieses durch die bekannten Größen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

Diese Schritte zeigen in groben Zügen die zunehmende „Arithmetisierung“ bzw. „Algebraisierung“ des Geometrieunterrichts im Laufe der Schulzeit auf. Dabei verlieren jedoch „rein“ geometrische Herangehensweisen wie Konstruktionen sowie Überlegungen zu Kongruenz und Ähnlichkeit keinesfalls ihre Bedeutung.

E. Ch. Wittmann hob den Aspekt der *„Trigonometrie als Algebraisierung der Kongruenzsätze“* hervor und führte als Ziel der Trigonometrie an:
„Es sollen Formeln entwickelt werden, die es erlauben, aus Seitenlängen und Winkelmaßen, die ein Dreieck bis auf Kongruenz festlegen, die Maße der restlichen Stücke zu berechnen.“ (Wittmann 1987, S. 356f.)

Hieran wird die Bedeutung von Kongruenzüberlegungen als Bindeglied zwischen geometrischen Konstruktionen und Berechnungen deutlich: Die Kongruenzsätze geben an, anhand welcher Größen Dreiecke eindeutig *konstruierbar* sind und gleichzeitig, welche Größen bekannt sein müssen, um die fehlenden Stücke zu *berechnen*. Dieser Zusammenhang zwischen Konstruktionen und Berechnungen wird auch bei Betrachtung von Aufgaben deutlich, die in unterschiedlichen Schuljahren fast identisch gestellt, aber sehr unterschiedlich gelöst werden.

Aufgaben zur konstruktiven bzw. rechnerischen Bestimmung fehlender Stücke in Dreiecken

Aufgabe aus einem Schulbuch für die 8. Klasse (Brandt u. a. 2006, S. 15)

- Welcher Kongruenzsatz garantiert die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks ABC? Konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion. Entnimm der Zeichnung die restlichen Seiten und Winkel.
  $b = 3{,}8$ cm; $\alpha = 35°$; $\gamma = 125°$

Aufgabe aus einem Schulbuch für die 10. Klasse (Koullen 2008, S. 56)

- Berechne die fehlenden Winkel und Seiten des Dreiecks ABC.
  $c = 5{,}4$ cm; $\alpha = 42°$; $\beta = 65°$

Auch verschiedene Anwendungsaufgaben, die zuvor (meist unter Nutzung eines geeigneten Maßstabs) durch Konstruktionen und Messungen gelöst wurden, lassen sich nach Einführung der trigonometrischen Beziehungen rechnerisch bearbeiten. Dies betrifft u. a. einige Gegenstände des Physikunterrichts der S I, z. B. die Bestimmung resultierender Kräfte.

6.1.2 Fundamentale Idee: Mit Dreiecken Konstruktions- und Vermessungsprobleme lösen

Das Wort „Trigonometrie“ kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Dreiecksmessung“, womit jedoch weniger unmittelbare Messungen, sondern Berechnungen unbekannter aus bekannten Größen in Dreiecken gemeint sind.

Dreiecke als Grundbestandteile geometrischer Figuren und Körperoberflächen haben eine hohe Bedeutung für geometrische Konstruktionen sowie Berechnungsaufgaben. Da sich alle geradlinig begrenzten Figuren aus Dreiecken zusammensetzen, sind Berechnungen von Seitenlängen, Winkelgrößen und Flächeninhalten von Dreiecken sehr breit anwendbar. Das Auffinden und Nutzen geeigneter Teildreiecke durch Zerlegung komplexerer Figuren oder auch die Ergänzung von Figuren durch Dreiecke zu einfacher handhabbaren Figuren ist also eine zentrale Strategie des gesamten Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe I und kommt sowohl bei Konstruktionen als auch bei Berechnungen zum Tragen. In vielen Fällen – u. a. bei einer Reihe von Anwendungen des Satzes des Pythagoras und insbesondere in der Trigonometrie – sind darüber hinaus Dreiecke in rechtwinklige Teildreiecke zu zerlegen oder zu solchen zu ergänzen.

Den auf Bruner (1970) zurückgehenden Begriff der *fundamentalen Idee* fasste Schreiber (1983) durch die Eigenschaften *Weite* (Allgemeinheit), *Fülle* (vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz) sowie *Sinn* (Verankerung im Alltagsdenken). Schwill (1995) präzisierte diesen Begriff in folgender Weise:

„Eine fundamentale Idee bezüglich eines Gegenstandsbereichs ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das

- *in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (Horizontalkriterium),*
- *auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (Vertikalkriterium),*
- *in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (Zeitkriterium),*
- *einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (Sinnkriterium).“*

Das Zurückführen von Konstruktions-, Vermessungs- und Berechnungsproblemen auf Dreiecke entspricht diesen Kriterien – bezogen auf den Bereich der Schulgeometrie – und ist somit als eine fundamentale Idee des Geometrieunterrichts anzusehen. Diese wird auch in den folgenden Abschnitten zur Einführung und Anwendung der Trigonometrie immer wieder von Bedeutung sein.

6.2 Einstiege in die Trigonometrie

Zur Einführung in die Trigonometrie bieten sich im Unterricht vor allem zwei Herangehensweisen an:

- Definition von Sinus und Kosinus für spitze Winkel am rechtwinkligen Dreieck, spätere Erweiterung für beliebige Winkel z. B. am Einheitskreis;
- Definition von Sinus und Kosinus für beliebige Winkelgrößen am Einheitskreis, Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke.

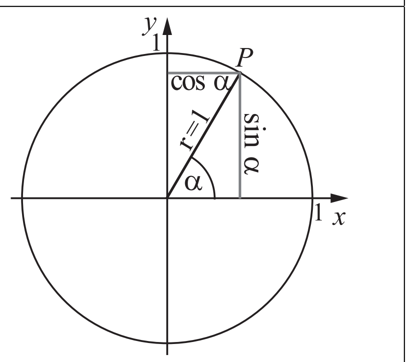
Einführung von Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Zu jedem Winkel α in einem Kreis mit dem Radius 1 (Einheitskreis), dessen Scheitelpunkt der Nullpunkt ist und der den positiven Strahl der x-Achse als einen Schenkel hat, gehört ein zweiter Schenkel, der den Kreis in einem Punkt P schneidet.

Der *Sinus des Winkels* α ist die y-Koordinate des Punktes P. Der *Kosinus des Winkels* α ist die x-Koordinate des Punktes P (sein Betrag somit der Abstand des Punktes P von der y-Achse).

$$\sin \alpha = y \qquad \cos \alpha = x$$

(nach Warmuth 2000, S. 156)



Beide oben genannte Zugänge sind in Schulbüchern und im Unterricht anzutreffen. Während bei der Einführung am Einheitskreis vor allem die Leitidee „funktionaler Zusammenhang“ betont wird, stehen bei der Einführung am rechtwinkligen Dreieck Berechnungen an geometrischen Figuren schon zu Anfang im Mittelpunkt. Beide Varianten weisen Vor- und Nachteile auf:

- Bei der Einführung am Einheitskreis können Sinus und Kosinus sofort für beliebige Winkel definiert werden. Dieses Vorgehen ist daher zeitsparend und hat den Vorteil, dass die Funktionswerte von Sinus und Kosinus direkt als Streckenlängen abgelesen werden können. Zudem liegt der Übergang zu den Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion sehr nahe, siehe Abschnitt 6.4.
- Bei der Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck werden zunächst nur Spezialfälle (spitze Winkel) betrachtet. Für eine Verallgemeinerung auf beliebige Winkelgrößen sind umfangreiche zusätzliche Überlegungen notwendig. Zudem lassen sich die Werte für Sinus und Kosinus im Allgemeinen nicht unmittelbar als Streckenlängen ablesen, sondern werden als Längen*verhältnisse* ausgedrückt (siehe Abschnitt 6.2.1). Jedoch sollten die Schüler mit der Untersuchung von Streckenverhältnissen durch die Behandlung der Ähnlichkeit vertraut sein. Zudem haben sie die Betrachtung von Dreiecken seit Jahren als „fundamentale Idee“ im Geometrieunterricht kennengelernt.

Unter den Gesichtspunkten der Effizienz und der „Nähe“ zu den Graphen und Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen wäre also eine Einführung in die Trigonometrie anhand des Einheitskreises zu bevorzugen. Jedoch bestehen dabei recht wenige Anknüpfungspunkte an frühere Unterrichtsinhalte. Hingegen ergeben sich bei einer Einführung in die Trigonometrie im Sinne von „Dreiecksberechnung“ vielfältige Anknüpfungen an frühere Unterrichtsinhalte und die Möglichkeit, die Trigonometrie genetisch[1] in den Mathematikunterricht der S I einzubetten.

Um eine Entscheidung hinsichtlich des didaktisch sinnvollsten Einstiegs in die Trigonometrie zu treffen, lassen sich die folgenden, von Malle aufgestellten, *Forderungen an einen genetischen Mathematikunterricht* heranziehen:

- *Begriffe und Theoreme sollen den Lernenden nicht an den Kopf geknallt werden, sondern aus Problemstellungen oder passenden Situationen heraus entwickelt werden.*
- *Begriffe und Theoreme sollen erst dann eingeführt werden, wenn man sie braucht.*
(*Kein Lernen auf Vorrat!*)
- *Mit eingeführten Begriffen und Theoremen soll wirklich gearbeitet werden.*
(*Kein totes Wissen! Keine Sackgassen!*)
- *Aus erfolgten Problemlösungen sollen nach Möglichkeit weitere Probleme entwickelt werden.*
- *Verallgemeinerungen sollen schrittweise erfolgen. Man sollte nicht gleich die allgemeinste Version anbieten.*
- *Es soll am Vorwissen der Lernenden angeknüpft werden.*
- *Die Darstellung soll keine Lücken bzw. Sprünge aufweisen, die das Verständnis erschweren oder unmöglich machen.*

Hinsichtlich dieser Forderungen erweist sich die Herangehensweise an die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck als geeigneter, wenngleich diese zunächst auf spitze Winkel eingeschränkt ist und deshalb ein zweischrittiges Vorgehen erfordert. Mit den oben aufgezählten Forderungen zusammenhängende Überlegungen dürften dazu beigetragen haben, dass sich das Vorgehen am rechtwinkligen Dreieck in den vergangenen beiden Jahrzehnten in den meisten Schulbüchern (aller Schularten) weitgehend durchgesetzt hat. Dabei sind natürlich in Details sehr unterschiedliche Vorgehensweisen möglich, auf die im Folgenden noch eingegangen wird.

[1] Den Begriff „genetisch“ beschrieb E. Ch. Wittmann folgendermaßen: „Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.“ (Wittmann 1981, S. 130)

6.2.1 Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck

Zum Einstieg in die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck sollten Schüler

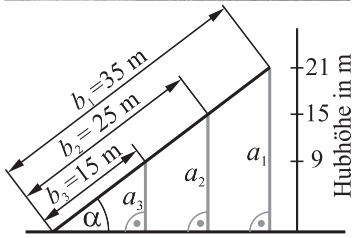
- anhand von Beispielen erkennen, dass es in Anwendungssituationen oft sinnvoll ist, Seitenlängen bzw. Seitenverhältnisse mithilfe von Winkeln zu berechnen (oder umgekehrt) sowie
- zu der Erkenntnis gelangen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt.

Die unten angegebenen Beispiele (die aus Schulbüchern für die Hauptschule bzw. für das Gymnasium entnommen sind) zeigen Anwendungssituationen auf, welche die Einführung des Sinus (und in dem zweiten Beispiel zusätzlich des Tangens) motivieren können.

Autokran (aus Lernstufen Mathematik 10: Leppig 1995, S. 116)

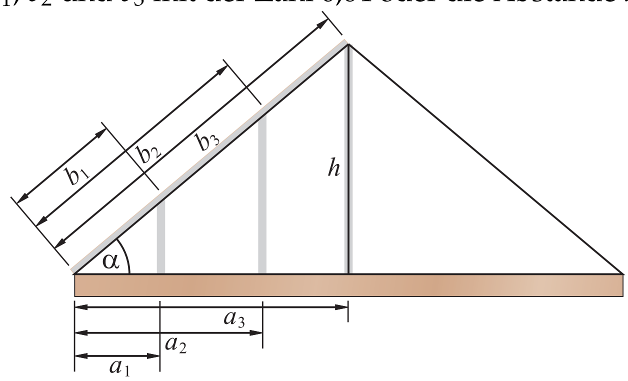
Der Ausleger eines Autokrans ist 9,5 m lang und kann bis auf eine Länge von 35 m ausgefahren werden. Man kann ihn bis zu einem Winkel von höchstens 80° gegen die Waagrechte aufrichten. Vom Winkel und von der Länge des Auslegers hängen seine Tragkraft und die Hubhöhe ab, um die er die Last heben kann. Die Abhängigkeit der Hubhöhe von der Länge des Auslegers bei einem festen Winkel können wir in einem Schaubild (Maßstab 1:1000) aufzeichnen.

Für die drei im Schaubild gezeichneten Fälle berechnen wir den Quotienten aus der Hubhöhe und der Länge des Auslegers.



Der Dachboden (aus Fokus 5: Lütticken u. Uhl 2008, S. 46)

Auf einem Dach soll eine Solaranlage montiert werden. Damit die Sparren des Dachstuhls das schwere Gewicht aushalten, müssen sie durch senkrechte Balken gestützt werden. Das Dach hat einen Neigungswinkel von $\alpha = 40°$ und das Dachgeschoss eine maximale Höhe von h = 6,32 m. Um die Länge der Stützbalken zu bestimmen, multipliziert der Handwerker entweder die gewünschten Abstände b_1, b_2 und b_3 mit der Zahl 0,64 oder die Abstände a_1, a_2 und a_3 mit 0,84.



Wie kommt er an diese Zahlen? Experimentiere mit anderen Dachneigungswinkeln. Wie groß wären die Zahlen des Handwerkers dann?

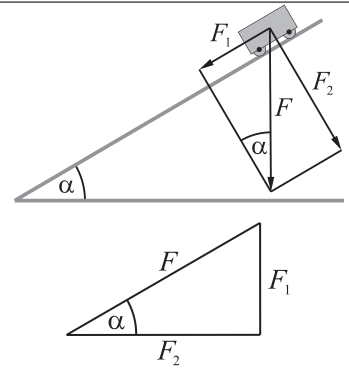
Für einen genetischen Einstieg in die Trigonometrie schlug Malle die Bestimmung von Kräften an der geneigten Ebene vor (siehe Malle 2001). Ein derartiger Einstieg setzt natürlich eine Abstimmung mit dem Fach Physik voraus. Wenn dort Kräfte an der geneigten Ebene bereits konstruktiv ermittelt wurden, so bietet diese Thematik einen sinnvollen Ansatzpunkt, nach rechnerischen Wegen zu suchen.

Bestimmung von Kräften an der geneigten Ebene (Malle 2001)

Ein Schrägaufzug steigt unter dem Winkel $\alpha = 30°$ an und hat das Gewicht $F = 5000$ N (Newton). Mit welcher Kraft F_1 wird er längs des Gleises hinuntergezogen? Mit welcher Kraft F_2 wird er auf das Gleis gedrückt?

Es lässt sich herausarbeiten (vgl. Malle 2001, S. 40), dass diese Fragen auch folgendermaßen gestellt werden können:

Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man den Winkel α und die Hypotenusenlänge F. Man ermittle die Gegenkathetenlänge F_1 und die Ankathetenlänge F_2.



In den Schulbüchern Real 10 (Koullen 1998) und Konkret 6 (Koullen 2008) wird an den Beginn der Kapitel zur Trigonometrie ein Beispiel gestellt, das sich auf den Tangens bezieht. Dies ist zwar ungewöhnlich – meist wird zunächst der Sinus thematisiert – erscheint aber durchaus sinnvoll, da die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Anstieg (Steigung) und Steigungswinkel bereits seit der Behandlung der linearen Funktionen offen ist.

Einstieg in die Trigonometrie über den Zusammenhang zwischen Anstieg und Steigungswinkel

Ein großer Automobilkonzern hat für einen Werbespot sein neues Pkw-Top-Modell eine Skischanze hinauffahren lassen. Auf dem letzten Abschnitt der Schanze wurde eine Steigung von fast 80% bewältigt.

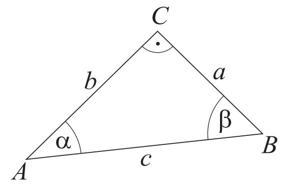
Erläutere mithilfe der Abbildung den Begriff Steigung. Erkläre, wie die Angabe 80% Steigung entstehen kann.

Allen aufgeführten Beispielen ist gemeinsam, dass Anwendungsprobleme an den Anfang gestellt werden, die bereits in früheren Schuljahren durch maßstäbliche Darstellungen konstruktiv bearbeitet werden konnten. Derartige Anwendungen können nun die exakte rechnerische Bestimmung fehlender Größen in rechtwinkligen Dreiecken motivieren.

Im Anschluss an die Diskussion von Einführungsbeispielen sollten die Schüler zu der Erkenntnis gelangen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt.

Aufgabe zu Streckenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck (aus Lütticken/Uhl 2008)

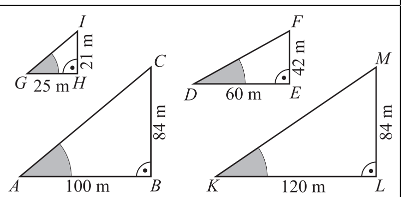
Zeichne verschiedene rechtwinklige Dreiecke, die im Winkel α übereinstimmen. Miss in jedem Dreieck die Seitenlängen, berechne daraus die verschiedenen Längenverhältnisse innerhalb des Dreiecks und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Was fällt dir auf?



Schüler können den Zusammenhang zwischen Streckenverhältnissen und Winkelgrößen auch durch beispielbezogene Aufgaben erarbeiten.

Aufgabe zu Streckenverhältnissen am rechtwinkligen Dreieck

In einer Maßstabszeichnung wurden Steigungsdreiecke von Geländeabschnitten gezeichnet. Begründe damit die Aussage: Jeder Steigung m ist genau ein Steigungswinkel α zugeordnet.



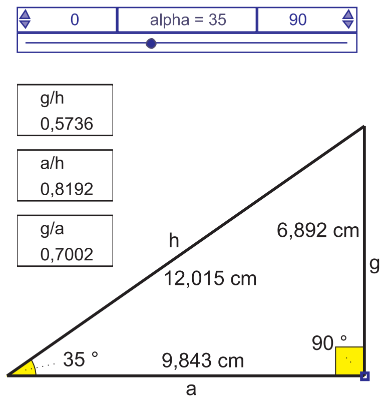
Die Erkenntnis, dass in rechtwinkligen Dreiecken eineindeutige Zuordnungen zwischen Streckenverhältnissen und Winkeln bestehen, lässt sich auch durch Experimente in einer dynamischen Geometriesoftware unterstützen.

Streckenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck mithilfe einer Geometriesoftware

Es wird ein Dreieck konstruiert, in dem ein Winkel (beispielsweise durch einen Schieberegler) sowie die Länge einer Kathete verändert werden können. Wird nur diese Länge verändert (was eine Streckung des Dreiecks bewirkt), so stellt sich heraus, dass die Streckenverhältnisse $\frac{g}{h}$, $\frac{a}{h}$ und $\frac{g}{a}$ unverändert bleiben.

Durch Veränderung des Winkels können die Schüler zudem die davon abhängige Änderung dieser Streckenverhältnisse erkunden sowie später – nach der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens – Funktionswerte näherungsweise ermitteln.

Eine Beispieldatei für Euklid Dynageo steht auf der Internetseite `www.didaktik-der-geometrie.de` zur Verfügung (Kap. X).

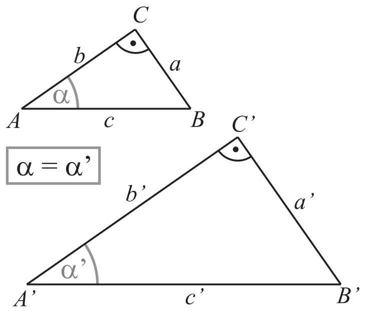


Nachdem die Schüler festgestellt haben, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt, sollte diese – für die Trigonometrie zentrale – Erkenntnis gesichert werden. Dies ist durch Überlegungen zur Ähnlichkeit möglich.

Begründung durch Ähnlichkeitsüberlegungen (aus Maroska 1996, S. 50)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel übereinstimmen, sind die Dreiecke ähnlich. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind also schon dann ähnlich, wenn sie in einem ihrer spitzen Winkel übereinstimmen. Die Verhältnisse entsprechender Seiten sind dann gleich.

Es gilt also $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$.

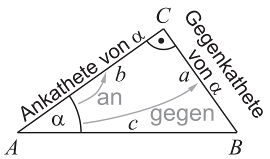


Nachdem die Erkenntnis gewonnen und gesichert wurde, dass sich in rechtwinkligen Dreiecken Winkelgrößen eindeutig[2] Seitenverhältnisse zuordnen lassen, einigen diesbezüglichen Aufgaben und zusätzlichen Beispielen sowie einer Wiederholung der Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse, können nun die Begriffe Sinus, Kosinus und Tangens eingeführt werden. Dabei ist es möglich, zunächst Beispiele zu betrachten, die zur Definition eines dieser Begriffe führen und die anderen Begriffe anschließend anhand dafür geeigneter Beispiele zu erarbeiten. Es können aber auch Sinus, Kosinus und Tangens gemeinsam definiert werden, wenn zuvor bereits unterschiedliche Seitenverhältnisse untersucht wurden.

Definition von Sinus, Kosinus und Tangens in einem Schulbuch (Maroska 1996, S. 52)

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$



Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α werden bezeichnet durch:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Man liest: Sinus von α, Kosinus von α, Tangens von α.

[2] Diese Zuordnung ist sogar eineindeutig. Jedoch ist an dieser Stelle zunächst vor allem eine Richtung (Winkelgröße $\rightarrow$ Seitenverhältnis) interessant.

6.3 Eigenschaften und Anwendungen von Sinus, Kosinus, Tangens

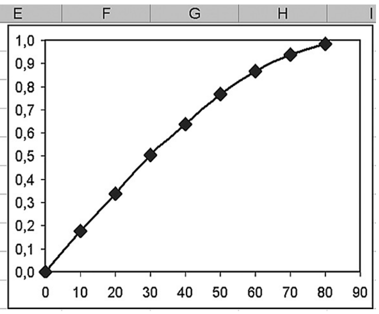
Nach der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens sollten Schüler einige Werte näherungsweise und spezielle Werte exakt bestimmen, Übungs- und Anwendungsaufgaben bearbeiten sowie Eigenschaften und Zusammenhänge untersuchen. Es empfiehlt sich nicht, diese Aspekte isoliert zu behandeln, sondern sie zu „verzahnen“. Die Reihenfolge der folgenden Abschnitte soll somit keine zeitliche Abfolge für die Behandlung im Unterricht vorgeben.

6.3.1 Näherungswerte bestimmen und auswerten

Bevor Funktionswerte trigonometrischer Funktionen – mehr oder weniger gedankenlos – mit dem Taschenrechner bestimmt werden, ist die Frage aufzuwerfen, *wie* sich Funktionswerte ermitteln lassen. Dafür bietet sich zunächst die Bestimmung zu einigen Winkelgrößen gehörender Streckenverhältnisse durch Messungen an.[3] Die so gewonnenen Näherungswerte können in einer Tabelle zusammengefasst und in einem Koordinatensystem dargestellt werden (manuell oder mithilfe des Computers). Ohne bereits näher auf Eigenschaften trigonometrischer Funktionen einzugehen, ist dies u. a. deshalb sinnvoll, da die Schüler daran deutlich erkennen können, dass keine linearen Zusammenhänge zwischen Winkelgrößen und ihren Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten bestehen.

Bestimmung und Darstellung einiger Näherungswerte der Sinusfunktion mithilfe der Tabellenkalkulations-Software Excel

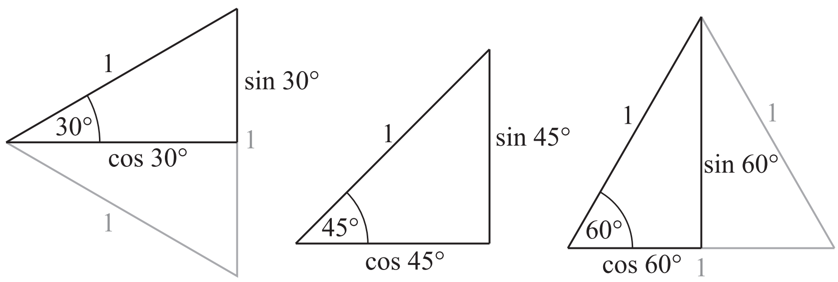
	A	B	C	D
1	α (in °)	a (in cm)	c (in cm)	sin α
2	0	0	9,5	0,00
3	10	1,7	9,6	0,18
4	20	3,4	10,1	0,34
5	30	5,5	10,9	0,50
6	40	7,9	12,4	0,64
7	50	11,3	14,7	0,77
8	60	16,4	18,9	0,87
9	70	26	27,7	0,94
10	80	53,7	54,5	0,99



6.3.2 Exakte Bestimmung einiger Funktionswerte

Unter Nutzung des Satzes des Pythagoras können die Schüler einige Funktionswerte exakt bestimmen. Dazu sollte herausgearbeitet werden, dass es in vielen Fällen vereinfachend sein kann, Dreiecke mit der Hypotenusenlänge 1 zu betrachten. Der Kosinus eines Winkels entspricht dann der Länge der Ankathete in einem solchen rechtwinkligen Dreieck, der Sinus der Länge der Gegenkathete. Damit lassen sich, teilweise mit Hilfsdreiecken, Sinus- und Kosinuswerte für 30°, 45° und 60° ermitteln.

Bestimmung einiger spezieller Werte für Sinus und Kosinus



$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad$ $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad$ $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In den meisten Fällen wird nach den hier skizzierten Überlegungen für die Bestimmung von Funktionswerten der Taschenrechner genutzt werden.

[3] Dies kann manuell oder mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware erfolgen.

6.3.3 Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens für spitze Winkel

Aus geometrischen Überlegungen heraus lassen sich die Zusammenhänge

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

erarbeiten. Ein leicht zu erkundender Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens ist $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. In diesem Zusammenhang kann (vor allem wenn es sich im Unterrichtsgespräch ergibt) der Kotangens eingeführt werden.

Bei der Bestimmung spezieller Funktionswerte mithilfe des Satzes des Pythagoras fällt auf, dass in rechtwinkligen Dreiecken mit der Hypotenusenlänge 1 gilt: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Daran kann sich die Frage anschließen, ob dieser Zusammenhang allgemein, also für beliebige rechtwinklige Dreiecke, gilt. Durch Rückbezug auf die Definitionen von Sinus und Kosinus ergibt sich aus dieser Frage der *trigonometrische Satz des Pythagoras*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

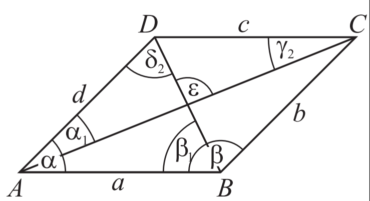
mit der verkürzten Schreibweise $\sin^2\alpha$ für $(\sin\alpha)^2$.

Aus didaktischer Sicht sind die exakte Bestimmung spezieller Funktionswerte sowie die Erarbeitung von Zusammenhängen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens u. a. deshalb sinnvoll, da die Schüler hierbei mehrfach die Definitionen anwenden und dadurch eine Festigung erfolgt. Außerdem werden Unterrichtsinhalte früherer Jahre (z. B. Innenwinkelsatz, Satz des Pythagoras) wiederholt. Vor allem aber erfolgt eine Vernetzung geometrischer Überlegungen mit algebraischen Herleitungen. Der Schulung diesbezüglicher Fähigkeiten kommt – wie sich im Folgenden noch zeigt – eine wichtige Bedeutung für das Lösen inner- und außermathematischer Probleme zu.

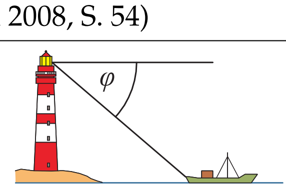
6.3.4 Lösen von Übungs- und Anwendungsaufgaben

Nach der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens sollten die Schüler vielfältige Übungen durchführen. Dazu gehören die Bestimmung fehlender Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke und Berechnungen von Winkeln.

Zu den *Prinzipien operativen Übens* gehören die *Zerlegung von Aufgaben in Teilschritte* und die *Zusammensetzung von Teilschritten zu größeren Komplexen*. Neben einfachen Übungsaufgaben sind Aufgaben bedeutsam, in denen mehrere rechtwinklige Dreiecke auftreten, zumal die Zerlegung komplexerer Figuren in Teildreiecke als „fundamentale Idee“ der Schulgeometrie anzusehen ist.

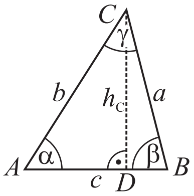
<table>
<tr><td colspan="2">Übungsaufgabe zu trigonometrischen Beziehungen (aus Koullen 2008, S. 45)</td></tr>
<tr><td>Gegeben ist das Parallelogramm ABCD.
a) Berechne a und b aus $\overline{BD} = 7{,}2$ cm, $\beta_1 = 35^\circ$ und $\delta_2 = 71^\circ$.
b) Berechne a und b aus $\overline{AC} = 13$ cm, $\alpha_1 = 14^\circ$ und $\gamma_2 = 10^\circ$.
c) Berechne $\overline{BD}$ und β_1 aus $b = 16{,}1$ cm, $c = 44{,}2$ cm und $\gamma = 99^\circ$.
d) Berechne $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ und ε aus $a = 23{,}2$ cm, $b = 15{,}1$ cm, $\alpha = 71^\circ$.</td>
<td>
</td></tr>
</table>

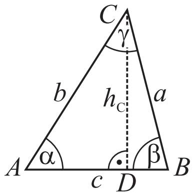
Neben rein innermathematischen Aufgaben sollten die Schüler auch Anwendungsaufgaben lösen (siehe eine Reihe der hier angegebenen Beispiele). Ein wichtiges Ziel dabei ist, dass die Schüler zunehmend lernen, in Anwendungssituationen selbst geeignete rechtwinklige Dreiecke zu finden. In Aufgabenstellungen können diese deshalb auch unvollständig dargestellt sein.

<table>
<tr><td colspan="2">Anwendungsaufgabe zu trigonometrischen Beziehungen (aus Lütticken/Uhl 2008, S. 54)</td></tr>
<tr><td>Von einem Leuchtturm (Höhe 90 m über NN) erscheint ein Schiff unter einem Tiefenwinkel φ von 28°. Wie weit ist das Schiff vom Fuß des Leuchtturms entfernt?</td>
<td>
</td></tr>
</table>

6.3.5 Berechnungen in beliebigen Dreiecken

Durch Betrachtung rechtwinkliger Teildreiecke lassen sich die trigonometrischen Beziehungen auch für spitzwinklige und – nach der Erweiterung von Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkel – stumpfwinklige Dreiecke nutzen. Schüler können an konkreten Dreiecken fehlende Stücke durch die Zerlegung in Teildreiecke berechnen und durch Verallgemeinerung der dabei angewendeten Schritte den Sinus- und den Kosinussatz herleiten.

<table>
<tr><td colspan="2">Beispielbezogene und allgemeine Herleitung des Sinussatzes</td></tr>
<tr><td>In einem Dreieck ABC sind gegeben:
a = 8,2 cm, b = 6,2 cm, α = 57,5°
Gesucht: β


Die Höhe hc zerlegt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Teildreiecke ACD und BCD.
In ACD: $h_c = b \cdot \sin\alpha = 5,23\,\text{cm}$
In BCD: $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \approx 0,637$
$\beta \approx 39,6^\circ$</td>
<td>Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen zwei Seiten a und b eines Dreiecks und den gegenüberliegenden Winkeln α und β.


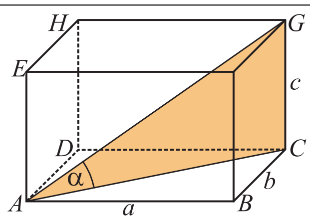
Die Höhe hc zerlegt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Teildreiecke ACD und BCD.
In ACD gilt: $h_c = b \cdot \sin\alpha$
In BCD gilt: $h_c = a \cdot \sin\beta$
Also gilt $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ bzw. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.</td></tr>
</table>

Bei Berechnungen mit dem Sinussatz ist zu beachten, dass Lösungen nur dann existieren und eindeutig sind, wenn zu zwei Seitenlängen die Größe des der längeren Seite gegenüberliegenden Winkels gegeben ist. Berechnungsfehler, die auftreten, wenn diese Bedingung verletzt ist, sind mit dem Kongruenzsatz „ssw" in Beziehung zu setzen. Allgemein sollten bei Dreiecksberechnungen Bezüge zu den Kongruenzsätzen hergestellt werden und die Schüler erkennen, dass *Berechnungen* genau dann (eindeutig) möglich sind, wenn Dreiecke mit den gegebenen Größen *konstruiert* werden können und entsprechende *Kongruenzsätze* existieren, siehe Abschnitt 6.1.1.

Durch Anwendung trigonometrischer Beziehungen können natürlich auch *Höhen* in Dreiecken bestimmt werden. Die Möglichkeiten, *Flächeninhalte* zu berechnen, erweitern sich damit enorm.

6.3.6 Anwendungen der Trigonometrie in der Raumgeometrie

Die trigonometrischen Beziehungen lassen sich für Körperberechnungen anwenden. Auch hierbei ist das Erkennen und Nutzen geeigneter Dreiecke eine entscheidende Lösungsstrategie. Durch sich verändernde Aufgabenstellungen mit abnehmenden Hilfen (z. B. bezüglich vorgegebener Hilfsdreiecke) sollten Schüler zunehmend befähigt werden, in Körpern selbst die benötigten Dreiecke zu finden, an denen sie sinnvolle trigonometrische Berechnungen durchführen können.

<table>
<tr><td colspan="2">Berechnung an einem Quader (aus Lütticken/Uhl 2008, S. 54)</td></tr>
<tr><td>Wie groß ist der Winkel α, den die Raumdiagonale des Quaders mit der der Flächendiagonale einschließt?
a) a = 4 cm; b = 3 cm; c = 8 cm
b) a = 4 cm; b = 8 cm; c = 3 cm</td>
<td>
</td></tr>
</table>

Berechnung an einer Pyramide

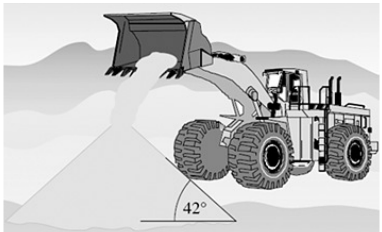
Bei einer Pyramide mit einer viereckigen Grundfläche sind alle Kanten gleich lang. Unter welchem Winkel ist eine der zur Spitze führenden Kanten gegenüber der Grundfläche geneigt?

Unter Anwendung trigonometrischer Berechnungen lassen sich Oberflächeninhalte und Volumina von Körpern auf der Grundlage von gegeben Stücken berechnen, anhand derer dies für die Schüler zuvor nicht möglich war. Hierbei besteht die Möglichkeit – und die Notwendigkeit – am Ende der Sekundarstufe I wichtige Inhalte des Unterrichts früherer Klassenstufen zu wiederholen.

Berechnungen an einem Kegel (aus Koullen 2008, S. 52)

Feuchter Sand lässt sich gerade noch ohne abzurutschen mit einem Schüttwinkel von etwa 42° aufschütten.

- Wie hoch ist ein kegelförmiger feuchter Sandhaufen mit 30 m Durchmesser am Boden?
- Es werden 20 m^3 feuchten Sandes aufgeschüttet. Dabei wird eine Höhe von 2,70 m erreicht. Reicht dafür eine Grundfläche mit 3 m Radius?



Aufgabe aus der Abschlussprüfung nach Kasse 10 an Hauptschulen in B/W (2008)

Aus einem Würfel aus Messing (Dichte: 8,3 g/cm^3) wurden zwei Kegelstümpfe ausgefräst, die zueinander symmetrisch sind (siehe Skizze).

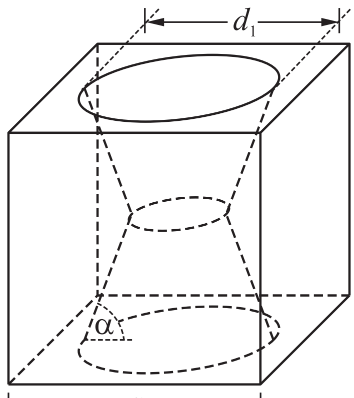
a) Berechnen Sie das Gewicht des Werkstücks.

b) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante eines Kegelstumpfs.

c) Das Werkstück wird in einem Tauchbad mit einer 0,1 mm dicken Silberschicht überzogen (Dichte: 10,5 g/cm^3). Berechnen Sie das Gewicht des aufgetragenen Silbers.

d) Zeichnen Sie einen Diagonalschnitt des Werkstücks in einem geeigneten Maßstab.

e) Bei welchem Durchmesser d_2 haben die beiden Kegelstümpfe zusammen das gleiche Volumen wie der Restkörper des Würfels (d_1 und h bleiben unverändert)?



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

$a = 8$ cm $\quad d_1 = 6$ cm $\quad \alpha = 73°$

6.4 Trigonometrische Funktionen

6.4.1 Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen – der Einheitskreis

Bislang wurden – auf Grundlage der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck, siehe Abschnitt 2.1 – lediglich Funktionswerte für spitze Winkel betrachtet. Für die Behandlung der trigonometrischen Funktionen sowie eine Reihe von Anwendungen ist es notwendig, verallgemeinerte Definitionen zu erarbeiten.

Um Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen einzuführen, wird meist der Einheitskreis verwendet (siehe S. 3). Dabei erfolgt gewissermaßen eine „Neudefinition", jedoch sollten Bezüge zu Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck erkennbar sein. Der folgende Schulbuchauszug zeigt die Hinführung zum Einheitskreis, wobei die Vorkenntnisse der Schüler hinsichtlich des Sinus aufgegriffen werden.

Ein „Riesenrad" wird mathematisch untersucht (aus Koullen 2008, S. 58)

Der Künstler Orozco stellte auf der Expo 2000 in Hannover sein Modell eines Riesenrades vor, bei dem sich die Gondeln oberhalb und unterhalb des Bodens bewegen. Er nannte es „Rueda de la Fortuna" (Rad des Lebens). Die Achse des Rades lag annähernd auf Höhe des Bodens. In gleichen Abständen waren am Außenring mit ca. 8 m Durchmesser acht Gondeln befestigt.

In dem Bild ist das Riesenrad gerade in der Position aufgenommen worden, wo sich jeweils zwei Gondeln auf gleicher Höhe befinden.

1. Welche Winkel erzeugen die sichtbaren Riesenradstreben mit dem Erdboden?
2. a) Berechne für die dargestellte Stellung des Riesenrades die Höhen der Gondelachsen über dem Boden.
   b) Betrachte die Höhen über und unter der Erde als positive und negative Höhen. Welche Höhenangaben bekommen die Gondelachsen der Gondeln unter der Erde?
   c) Angenommen, eine Gondelachse verläuft parallel zum Erdboden. Fülle für die anderen Positionen der Gondelachsen die Tabelle aus.

α in °	0		
Höhe in m	0		

   d) Stelle die Zuordnung Winkel → Höhe für die in a) bis c) ermittelten Werte in einem Diagramm dar. Beschreibe den Graphen und entscheide, ob die Zuordnung eine Funktion ist. Begründe deine Entscheidung.

Es ist erkennbar, dass jeder beliebigen Winkelgröße eindeutig eine Höhe zugeordnet werden kann. Die Höhe der Achse konnte stets aus dem Radius des Riesenrades und dem Sinus des spitzen Winkels berechnet werden, der im erzeugten rechtwinkligen Dreieck beim Drehpunkt liegt. Bei der Betrachtung der Drehwinkel am Riesenrad treten auch Winkelgrößen größer als 90° auf. Es gibt also eine Zuordnung, in der bei beliebigen Winkelgrößen ein Sinuswert angegeben werden kann.

Mit diesem Beispiel kann also Erweiterung des Sinus für beliebige Winkel plausibel gemacht werden, wobei mit der *eindeutigen Zuordnung einer Höhe zu jeder beliebigen Winkelgröße* bereits die Einführung der Sinus*funktion* vorbereitet wurde. Mit der Erklärung „negativer Höhen" unter 2 b) wurde auch eine plausible Erklärung für negative Funktionswerte gefunden.[4]

[4] Bei der vorher erfolgten Einführung des Sinus am rechtwinkligen Dreieck können negative Vorzeichen nicht auftreten. In der Geometrie haben die Schüler bislang sogar grundsätzlich nur nichtnegative Größen betrachtet.

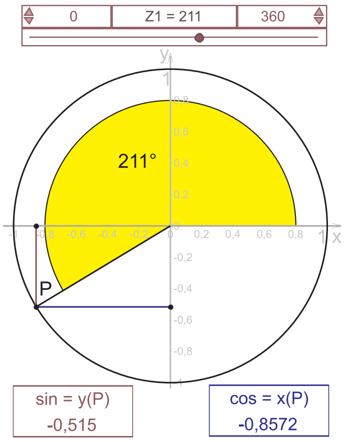
Bestimmung von Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware

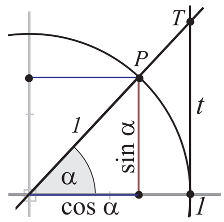
Es wird ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt (0;0) konstruiert. Um die Winkelgröße einzustellen, wird ein auf dem Einheitskreis gleitender Punkt, der mit dem Koordinatenursprung durch eine Strecke verbunden ist, oder ein Schieberegler verwendet.

Der durch den (neben dem positiven Strahl der x-Achse) zweite Schenkel des Winkels schneidet den Einheitskreis in einem Punkt P. Dessen Koordinaten sind der Kosinus- bzw. Sinuswert des betrachteten Winkels. Sie lassen sich in Euklid Dynageo mithilfe des Termobjekts anzeigen.

Um den Tangens des Winkels zu bestimmen, hilft eine Strahlensatzfigur. Man verlängert den konstruierten Schenkel, so dass er die in dem Punkt (1;0) errichtete Senkrechte zur x-Achse schneidet. Ist t der Abstand des Schnittpunktes von der x-Achse, so gilt $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{t}{\sin\alpha}$, also $t = \tan\alpha$.

Beispieldateien:
`www.didaktik-der-geometrie.de` (unter Kapitel X)





6.4.2 Die trigonometrischen Funktionen

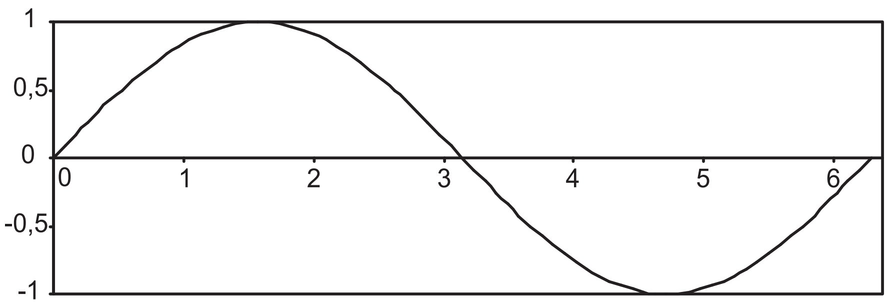
Nach Vorüberlegungen (wie oben beschrieben) und kurzen Zweckmäßigkeitsbetrachtungen zur Wahl des Radius 1 und des Koordinatenursprungs als Mittelpunkt lassen sich Sinus und Kosinus am Einheitskreis einführen (siehe S. 3). Dabei sollten die Schüler zunächst Wertetabellen anlegen und zugehörige Funktionsgraphen darstellen.

Bei der Darstellung von Funktionsgraphen ist die Frage nach der Skalierung der Achsen zu erwarten. Während die Funktionswerte als „normale“ Zahlen gegeben sind, wären auf der x-Achse Winkelmaße abzutragen. Dabei ist ein willkürlicher Maßstab anzusetzen – es bleibt die Frage, ob es einen „natürlichen“ Maßstab gibt und ob die Funktionsgraphen ein „natürliches“ Aussehen haben (wie etwa die Normalparabel). An dieser Stelle ist es nun sinnvoll, das *Bogenmaß* einzuführen.[5] Für die Verwendung von Schablonen zum Zeichnen von Funktionsgraphen ist dies sogar unabdingbar.

Darstellung des Graphen der Sinusfunktion mithilfe von Excel

Für die Berechnung des Bogenmaßes kann in Excel auch die Funktion BOGENMASS() verwendet werden. Für die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen stehen SIN(), COS() und TAN() zur Verfügung, die Argumente müssen im Bogenmaß angegeben werden.

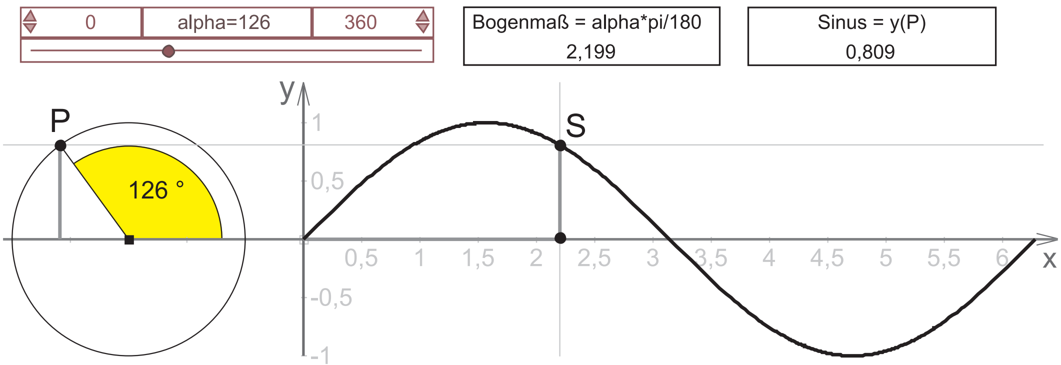
α in °	Bogenmaß	sin α
0	0,00	0,00
5	0,09	0,09
10	0,17	0,17
15	0,26	0,26
20	0,35	0,34
25	0,44	0,42
30	0,52	0,50
35	0,61	0,57
40	0,70	0,64
45	0,79	0,71
50	0,87	0,77
55	0,96	0,82



[5] Mitunter wird das Bogenmaß bereits vor der Behandlung der eigentlichen Trigonometrie gewissermaßen „auf Vorrat“ eingeführt, was in Anbetracht der Forderungen an einen genetischen Mathematikunterricht (siehe S. 8f.) nicht sinnvoll erscheint.

Besonders anschaulich ist die dynamische Konstruktion von Graphen trigonometrischer Funktionen als Ortskurven mithilfe von Software wie Euklid Dynageo oder Geogebra.

Konstruktion des Graphen der Sinusfunktion als Ortskurve in Euklid Dynageo
Es wird von der auf S. 13 beschriebenen Konstruktion ausgegangen, aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit allerdings der Einheitskreis nicht im Koordinatenursprung konstruiert. Auf der positiven x-Halbachse werden vom Koordinatenursprung aus die Bogenmaße der Winkel angetragen und in den entstehenden Punkten die Senkrechten errichtet. Die Schnittpunkte S dieser Senkrechten mit den Parallelen durch die zugehörigen Kreispunkte P beschreiben die Punkte des Graphen der Sinusfunktion. Wird in Euklid Dynageo das Werkzeug Kurven → Ortslinie verwendet, der Punkt S markiert und der Winkel mithilfe des Schiebereglers verändert, so entsteht punktweise die Sinuskurve.



Auf diese Weise lässt sich auch der Graph der *Tangensfunktion* konstruieren. Für die *Kosinuskurve* muss die Differenz zwischen den x-Koordinaten von P und dem Mittelpunkt des Kreises vertikal abgetragen werden.

Es würde den zeitlichen Rahmen der Vorlesung überschreiten, auf die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sowie auf Quadrantenbeziehungen und Zusammenhänge zwischen Funktionswerten näher einzugehen. Hierfür sei u. a. auf die speziell für Schüler verfasste Übersichtsdarstellung (Warmuth 2000, Kap. 11), Schulbücher für die 10. Klasse sowie auf (Wittmann 2007, Kap. 9) verwiesen.

In diesem Kapitel zitierte Literatur

- Brandt, D.; Greulich, D.; Jürgensen, Th.; Reimer, R.; Schmitt-Hartmann, R.; Zimmermann, P. (2006): Lambacher Schweizer 4 (Jahrgangsstufe 8, Baden-Württemberg). Ernst Klett Verlag: Stuttgart
- Koullen, R. (Hrsg., 1998): Mathematik Real, Ausgabe Baden-Württ., Klasse 10. Cornelsen: Berlin
- Koullen, R. (Hrsg., 2008): Mathematik Konkret, Band 6 (Realschule, Jahrgangsstufe 10, Baden-Württ.). Cornelsen: Berlin
- Leppig, M. (Hrsg., 1995): Lernstufen Mathematik 10 (Hauptschule, Baden-Württ.). Cornelsen: Berlin
- Lütticken, R.; Uhl, C. (Hrsg., 2008): Fokus Mathematik, Band 5 (Gymnasium, Jahrgangsstufe 9, Baden-Württemberg). Cornelsen: Berlin
- Malle, G. (2001): Genetisch in die Trigonometrie. In: Mathematik Lehren 109, S. 40-44
- Maroska, R.; Olpp, A.; Stöckle, C.; Wellstein, H. (1996): Schnittpunkt 10 (Mathematik für Realschulen, Baden-Württemberg). Ernst Klett Verlag: Stuttgart
- Schreiber, A. (1983): Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: Mathematica Didactica 6(2), S. 65-76
- Schwill, A. (1995): Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In: Hischer; Weiß (Hrsg.): Fundamentale Ideen. Franzbecker: Hildesheim, S. 18-25
- Warmuth, E. (Hrsg., 2008): Mathematik in Übersichten. Volk und Wissen: Berlin
- Wittmann, E. Ch. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg: Braunschweig
- Wittmann, E. Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Vieweg: Braunschweig
- Wittmann, G. (2007): Elementare Funktionen und ihre Anwendungen. Spektrum: Berlin, Heidelberg