Martin Eichler – Leben und Werk[1]

Jürg Kramer

1 Leben

Martin Eichler wurde am 29. März 1912 als Sohn des Pastors Max Eichler und seiner Frau Katharina, geb. Pirwitz, in Pinnow (Krs. Greifswald, Pommern) geboren. Seinen ersten Schulunterricht erhielt er von seinen Eltern; in Ermangelung einer geeigneten Schule in der näheren Umgebung seines Heimatortes schickten ihn seine Eltern danach in ein Internat in Westfalen. Durch die strenge Internatserziehung wurde seine bis ins hohe Alter anhaltende Arbeitsdisziplin geprägt. Nach dem Abitur studierte er während dreier Semester Mathematik und Physik in Königsberg. Es war damals sein Ziel, Physiker zu werden; dazu hatten ihn wohl die bahnbrechenden Entdeckungen in der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik bewogen. Während des darauffolgenden einjährigen Aufenthalts in Zürich begann er sich zunehmend für die reine Mathematik zu interessieren. Entscheidend dafür war die Bekanntschaft mit Andreas Speiser, der seit 1917 als ordentlicher Professor an der Universität Zürich wirkte. Dem Rate Speisers folgend, setzte Eichler nach seiner Rückkehr nach Deutschland im Jahr 1932 seine Studien in Mathematik unter der Leitung von Heinrich Brandt in Halle fort. Durch seinen Lehrer wurde er mit der Zahlentheorie der Quaternionenalgebren bekannt. Auf diesem Gebiet promovierte Martin Eichler im Jahr 1935 mit der Arbeit [1]. Sein Verhältnis zu seinem Lehrer war ambivalent: Zum einen verpflichtete er sich wie dieser konsequent dem Prinzip, einen mathematischen Gedanken solange reifen zu lassen, bis dieser vollständig durchdrungen ist. Andererseits erkannte er Brandts ablehnende Haltung gegenüber modernen Begriffsbildungen (siehe dazu [36]), eine Eigenschaft, die ihm zeitlebens fremd blieb.

Wegen ernsthafter Schwierigkeiten mit den lokalen Nazi-Behörden verlor Eichler seine Anstellung in Halle. Dennoch gelang es ihm, bei Helmut Hasse in Göttingen Assistent zu werden; dort habilitierte er sich im Jahr 1938 mit der Arbeit [7]. In den nun folgenden Kriegsjahren blieb Eichler zwar vom Einsatz mit der Waffe verschont; stattdessen wurde er an die Heeresversuchsanstalt in

[1] Der vorliegende Beitrag ist eine überarbeitete und erweiterte Fassung der Veröffentlichung „Leben und Werk von Martin Eichler “, die in Elem. Math. 49 (1994), 45–60, erschien.

Peenemünde verpflichtet, wo er an der Entwicklung der V-2-Raketen mitzuwirken hatte. Aus diesem Grunde beschäftigte er sich in dieser Zeit mit der Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typ.

Nach einer Verlegung auf die Insel Usedom lernte Martin Eichler seine zukünftige Frau, Erika Paffen, kennen, die dort ebenfalls einen Kriegsdienst versah. Nachdem sich die beiden kriegsbedingt aber schon bald aus den Augen verloren hatten, fanden sie sich nach Kriegsende auf abenteuerliche Weise wieder und heirateten im Januar 1947. Aus Angst vor russischen Deportationen deutscher Wissenschaftler musste Eichler seine in Göttingen wiederaufgenommene Dozententätigkeit aufgeben und mit seiner Frau nach England fliehen. Dort beschäftigte er sich mit Problemen der Aerodynamik.

Im Jahre 1949, nach einem zweijährigen England-Aufenthalt, kehrte die Familie mit ihrem inzwischen geborenen Sohn Ralph – ihm folgte ein Jahr später der zweite Sohn Norbert – nach Deutschland zurück. Zunächst wirkte Martin Eichler als Dozent am Mathematischen Institut der Universität Münster, wo er endlich die Gelegenheit fand, seine grundlegenden Beiträge zur arithmetischen Theorie der *quadratischen Formen* systematisch zusammenzutragen und in dem Buch „Quadratische Formen und orthogonale Gruppen“, welches im Jahr 1952 erschien und 1974 ein zweites Mal aufgelegt wurde, festzuhalten. Ab 1954 wandte sich sein Interesse zunehmend der Theorie der elliptischen *Modulformen* zu. In dieser Periode fand er einen Beweis der Ramanujan-Petersson-Vermutung für das Gewicht $k = 2$. Die erfolgreiche Tätigkeit dieser Jahre führte 1956 zur Berufung an die Universität Marburg.

Im Jahr 1958 folgte er einem Ruf an die Universität Basel. Dort setzte er seine Untersuchungen zur Theorie der Modulformen fort und verfasste sein zweites Buch „Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen“, welches im Jahr 1963 erschien. Im weiteren Verlauf der sechziger Jahre begann er sich zunehmend für den *Riemann-Rochschen Satz* zu interessieren. Die nach seinem eigenen Urteil letztlich nicht befriedigenden Ergebnisse zu diesem Thema finden sich im Springer Lecture Notes Band „Projective varieties and modular forms“ zusammengefasst. In den siebziger Jahren wandte sich Eichler wieder der Theorie der elliptischen und Siegelschen Modulformen zu. Ein Teil dieser Arbeiten bereitete ihn auf das erst nach seiner Emeritierung im Jahr 1980 gemeinsam mit D. Zagier durchgeführte systematische Studium der *Jacobiformen* vor, welches seinen Niederschlag in der 1985 veröffentlichten Monographie „The theory of Jacobi forms“ fand. In den folgenden Jahren musste er wegen gesundheitlicher Probleme seine mathematische Forschungstätigkeit zunehmend einschränken. Dennoch gelangen ihm neue Entdeckungen, wie z.B. in seiner letzten, gemeinsam mit J. Brzezinski publizierten Arbeit [89], in der ein auf C.F. Gauß zurückgehendes Resultat verallgemeinert wurde. Ab 1990 begann sich sein Gesundheitszustand leider noch stärker zu verschlechtern. Nach langem Leiden verstarb Martin Eichler am 7. Oktober 1992 in seinem nun zur Heimat gewordenen Arlesheim bei Basel.

Martin Eichlers Leben war geprägt durch einen hohen Selbstanspruch und ein hohes Arbeitsethos. Er genoss deshalb grosse Anerkennung in Fachkreisen. Dies zeigte sich in der Ernennung zum Beiratsmitglied der Zeitschrift „Acta Arithmetica“ und zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Göttingen sowie der Verleihung der Ehrendoktorwürde durch die Universität Münster. Als Lehrer begeisterte Martin Eichler seine Schüler im Gespräch mit Anmerkungen, welche seinen mathematischen Weitblick immer wieder erkennen liessen. Dazu kam seine verantwortungsbewusste Betreuung seiner Doktoranden, in der sich neben seiner fachlichen Kompetenz auch seine menschliche Grösse zeigte.

2 Mathematisches Werk

2.1 Arithmetik der Algebren

In seiner Dissertation [1] gelang es Eichler, die Brandtsche Kompositionstheorie quaternärer quadratischer Formen (s. [Br25]) auf nicht-maximale Ideale in rationalen Quaternionenalgebren zu übertragen, indem er diejenigen nicht-maximalen Ideale charakterisierte, welche invertierbar sind. Als zweites konnte er die maximalen Ordnungen aufzählen, welche eine gegebene nicht-maximale Ordnung umfassen.

Als nächstes beschäftigte sich Eichler mit der Idealklassenzahl zentral einfacher Algebren A vom Grad n über einem Zahlkörper k. Bezeichnet $\mathfrak{m}$ das Produkt der unendlichen Primstellen von k, an welchen A verzweigt ist, so findet sich in [3] der Satz: Ist $n > 2$ oder ist A nicht an allen unendlichen Stellen von k verzweigt, so ist die Idealklassenzahl von A gleich der Strahlklassenzahl mod $\mathfrak{m}$ von k. Dies verallgemeinert das Resultat [Me91] von A. Meyer, dass indefinite ternäre quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ unter gewissen Voraussetzungen Klassenzahl Eins besitzen. Ein neuer Beweis dieses fundamentalen Satzes wird in [5] gegeben. Eine weitere Verallgemeinerung dieser Ergebnisse findet sich in [7]. Damit blieb einzig die Idealklassenzahl total-definiter Quaternionenalgebren über total-reellen Zahlkörpern k offen. Diese bestimmte Eichler in [4]. Für $k = \mathbb{Q}$ und eine über der Primzahl q und im Unendlichen verzweigten Quaternionenalgebra $D_q/\mathbb{Q}$ ergibt sich die Klassenzahl h_q zu

$$h_q = \frac{q-1}{12} + \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{q}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-3}{q}\right)\right). \tag{1}$$

Danach versuchte Eichler Dirichlets Einheitentheorie auf Hauptordnungen in normalen einfachen Divisionsalgebren zu übertragen. Hier war ihm nur ein Teilerfolg beschieden. Ein schönes Resultat in diesem Zusammenhang ist die Beschreibung der Einheitengruppe einer nullteilerfreien, indefiniten Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ durch Erzeugende und Relationen. Dazu beachte man die Arbeiten [2], [9].

Einen ausgezeichneten Überblick über Eichlers Beiträge zur Zahlentheorie der Algebren vor dem Zweiten Weltkrieg erhält man durch seinen Vortrag [6] anlässlich der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

2.2 Quadratische Formen

Mit den beiden Noten [15] und [18] begann Eichler seine systematischen Studien zur Theorie der quadratischen Formen. Es war sein Anliegen, die bekannte Arithmetik der Quaternionenalgebren zu einer arithmetischen Theorie quadratischer Formen beliebiger Reihenzahl zu erweitern. Dies vollbrachte er in den Arbeiten [21], [26], [27], [30], welche er in seinem Buch [31] über quadratische Formen und orthogonale Gruppen zusammenfasste; in diesen Zusammenhang gehören auch die Arbeiten [28], [29]. Entscheidend für den Erfolg der Brandtschen Untersuchungen im Bereich der quaternären quadratischen Formen ist die Tatsache, dass einer Quaternionenalgebra sowohl eine *additive* als auch eine *multiplikative* Struktur zugrunde liegen. Bei der Untersuchung beliebiger quadratischer Formen hingegen hat man zwischen einem *linearen metrischen Raum* V über einem Zahlkörper k (versehen mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$) einerseits, und der Gruppe $\mathrm{GSO}(V)$ der *eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen* von V andererseits, zu unterscheiden.

Zunächst untersucht Eichler nun das Gruppenpaar $\big(V, \mathrm{GSO}(V)\big)$ näher: Es stellt sich heraus, dass der metrische Raum V durch den sogenannten *Raumtyp* charakterisiert wird. Die Raumtypen ihrerseits lassen sich eindeutig kennzeichnen durch die Parität ihrer Dimension, die Diskriminante, die Signatur an allen archimedischen Stellen und die sogenannten Charaktere an allen endlichen Primstellen von k. Die Gesamtheit der Raumtypen bildet die Wittsche Gruppe. Für die Gruppe $\mathrm{GSO}(V)$, genauer für die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ von V, besteht andererseits die folgende Charakterisierung: Stellen wir $g \in \mathrm{SO}(V)$ als ein Produkt von $2m$ Spiegelungen an den zu den Vektoren $v_1, \ldots, v_{2m} \in V$ senkrechten Hyperebenen dar, so erhält man durch die Zuordnung

$$g \mapsto \langle v_1, v_1\rangle \cdot \ldots \cdot \langle v_{2m}, v_{2m}\rangle \bmod k^{\times 2}$$

einen Homomorphismus

$$\nu : \mathrm{SO}(V) \longrightarrow k^{\times}/k^{\times 2},$$

welchen Eichler als *Spinor-Norm* bezeichnet; diese Norm wurde bereits von R. Lipschitz eingeführt (s. [Li86], S. 76). Ist V isotrop, $\dim_k V \geq 5$ und $-1 \notin \ker(\nu)$, so zeigt sich beispielsweise, dass der Kern $\ker(\nu)$ von ν eine *einfache* Gruppe ist.

Wir kommen nun zur Darstellung von Eichlers Beiträgen zur Zahlentheorie der quadratischen Formen. Dazu betrachten wir projektive $\mathfrak{o}$-Moduln $\mathfrak{I} \subset V$ von maximalem Rang, auch Gitter genannt; hierbei ist $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung von k. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, so bezeichnet im Folgenden $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{o}$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ mit dem Quotientenkörper $k_\mathfrak{p}$; weiter setzen wir $V_\mathfrak{p} := V \otimes_k k_\mathfrak{p}, \mathfrak{I}_\mathfrak{p} := \mathfrak{I} \otimes_\mathfrak{o} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Zwei Gitter $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}$ heissen *ähnlich*, falls $g \in \mathrm{GSO}(V)$ mit

$$\mathfrak{K} = g\,\mathfrak{I}$$

existiert. Für das Folgende halten wir das Gitter $\mathfrak{J}$ fest und setzen

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{p}} &:= \{g \in \mathrm{GSO}(V_{\mathfrak{p}}) \mid g\,\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}\}, \\ K_{\mathfrak{J}} &:= \prod_{\mathfrak{p}\text{ endl.}} K_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Der *Idealkomplex* von $\mathfrak{J}$ ist nun gegeben durch den Nebenklassenraum

$$\prod_{\mathfrak{p}\text{ endl.}}{}' \,\mathrm{GSO}(V_{\mathfrak{p}}) \Big/ K_{\mathfrak{J}}\,,$$

wobei der Strich andeutet, dass das Produkt im restringierten Sinne zu verstehen ist. Dieser zerfällt in *Ähnlichkeitsklassen*, gegeben durch den Doppelnebenklassenraum

$$\mathfrak{G} := \mathrm{GSO}(V) \Big\backslash \prod_{\mathfrak{p}\text{ endl.}}{}' \,\mathrm{GSO}(V_{\mathfrak{p}}) \Big/ K_{\mathfrak{J}}\,,$$

und es zeigt sich, dass $\mathfrak{G}$ die Struktur eines Gruppoids trägt. Gröber als die Einteilung des Idealkomplexes in Ähnlichkeitsklassen ist die Einteilung in *Geschlechter* und *Spinor-Geschlechter*.

Zur Beschreibung des Hauptresultats, bei welchem sich die multiplikative Struktur von $\mathrm{GSO}(V)$ in der additiven Struktur von V widerspiegelt, legen wir ein vollständiges Repräsentantensystem der Ähnlichkeitsklassen $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_h$ des vorgegebenen Idealkomplexes zugrunde und definieren die *Anzahlmatrix* $P(\mathfrak{n})$ zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{n}$ von k durch

$$P(\mathfrak{n}) := \big(p_{j,k}(\mathfrak{n})\big)_{1 \le j,k \le h}\,,$$

wobei $p_{j,k}(\mathfrak{n})$ gleich der Anzahl der Untergitter $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{J}_k$ der Norm $n(\mathfrak{K}) = \mathfrak{n}\, n(\mathfrak{J}_k)$ mit vorgeschriebenem Elementarteilersystem ist, welche zum Gitter $\mathfrak{J}_j$ ähnlich sind. Für teilerfremde ganze Ideale $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ notieren wir die Vertauschungsregel

$$P(\mathfrak{m}) \cdot P(\mathfrak{n}) = P(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) = P(\mathfrak{n}) \cdot P(\mathfrak{m}).$$

Schliesslich teilen wir die Vektoren $v \in \mathfrak{J}_j$ $(j = 1, \ldots, h)$ in endlich viele Klassen $\mathfrak{C}_l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ ein, deren Elemente jeweils in *gleichvielen* Untergittern (von fester Norm und festem Elementarteilersystem) liegen, und setzen noch

$$\begin{aligned} e_j &:= |G_j|, \text{ wobei } G_j = \{g \in \mathrm{GSO}(V) \mid g\,\mathfrak{J}_j = \mathfrak{J}_j\}, \\ e_j(v) &:= |G_j(v)|, \text{ wobei } G_j(v) = \{g \in G_j \mid gv = v\}. \end{aligned}$$

Mit den sogenannten *Darstellungsmassen*

$$m_j(\mathfrak{t}) := \sum_{(v)} \frac{e_j}{e_j(v)}\,, \text{ resp. } m_j(\mathfrak{t}, \mathfrak{C}_l) := \sum_{(v)\,\in\,\mathfrak{C}_l} \frac{e_j}{e_j(v)}\,,$$

wobei die Summe über ein Repräsentantensystem aller Klassen assoziierter Vektoren aus $\mathfrak{J}_j$ der Norm $\mathfrak{t}\, n(\mathfrak{J}_j)$, resp. der entsprechenden Klassen in $\mathfrak{C}_l$ zu nehmen ist, erhält man die wichtige Formel

$$\big(m_j(\mathfrak{t})\big) \cdot P(\mathfrak{n}) = \sum_{\mathfrak{C}_l} \rho(\mathfrak{C}_l) \cdot \big(m_j(\mathfrak{n}\mathfrak{t}, \mathfrak{C}_l)\big) \tag{2}$$

mit gewissen Anzahlen $\rho(\mathfrak{C}_l)$.

Viele der von M. Eichler initiierten Gedanken zum Themenkreis der quadratischen Formen regten M. Kneser zu weiteren Untersuchungen an, so zum Beispiel zu seinen Beiträgen zur starken Approximation in algebraischen Gruppen (s. [Kn66]).

2.3 Modulformen

Eichlers Beiträge zur Theorie der Modulformen einer Variablen sind vielfältig und originell. Er selbst ging sogar soweit zu sagen, dass „Modulformen neben der Addition, Subtraktion, Multiplikation und der Division die fünfte Grundrechenoperation bilden". Um seine Beiträge beschreiben zu können, müssen wir zuerst einige Begriffe zusammenstellen. Dazu fixieren wir eine natürliche Zahl N. Die *Kongruenzuntergruppe der Stufe* N

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

operiert stark diskontinuierlich auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$. Der Bahnenraum $\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$ lässt sich durch Hinzunahme der sogenannten „Spitzen" zu einer kompakten Riemannschen Fläche $\overline{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}}$ machen. Ist beispielsweise $N = q$ eine Primzahl, so berechnet sich das Geschlecht dieser Riemannschen Fläche zu

$$g_q = \frac{q+1}{12} - \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-1}{q}\right)\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{-3}{q}\right)\right) = h_q - 1 \tag{3}$$

mit der Klassenzahl h_q aus (1). Zu geradem k definiert man den Raum $M_k\big(\Gamma_0(N)\big)$ der *Modulformen* vom Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$ als die Menge der holomorphen Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, welche der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{-k} = f(\tau)$$

für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ genügen und eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{2\pi i n \tau}$$

besitzen. Gilt $a_0 = 0$, so heisst f *Spitzenform*; ist zudem $a_1 = 1$, so nennt man f *normiert*. Der Raum der Spitzenformen sei durch $S_k\big(\Gamma_0(N)\big)$ bezeichnet.

Modulformen entsprechen holomorphen Differentialformen $k/2$-ten Grades mit gewissen Polen in den Spitzen.

Der Einfachheit halber nehmen wir vorerst an, dass $N = q$ eine ungerade Primzahl ist; wir werden diese Annahme im zweiten Teil des Abschnitts 2.3 wieder fallen lassen. Es zeigt sich dann, dass die kompakte Riemannsche Fläche $\overline{\Gamma_0(q)\backslash\mathbb{H}}$ ein über $\mathbb{Q}$ definiertes Modell, die sogenannte Modulkurve $X_0(q)$, besitzt; $X_0(q)$ ist eine über $\mathbb{Q}$ definierte, glatte, projektiv algebraische Kurve mit der Eigenschaft, dass für deren komplexe Punkte die Isomorphie

$$X_0(q)(\mathbb{C}) \cong \overline{\Gamma_0(q)\backslash\mathbb{H}}$$

besteht. Nach [Ig59] hat $X_0(q)$ einzig an der Stelle q schlechte Reduktion; für alle Primzahlen $p \neq q$ sind somit die Reduktionen $\widetilde{X}_0(q)/\mathbb{F}_p$ von $X_0(q)$ mod p glatte Kurven vom Geschlecht g_q. Aufgrund der Tatsache, dass die Modulkurve $X_0(q)$ Isomorphieklassen elliptischer Kurven $[E]$ mit fixierter zyklischer Untergruppe der Ordnung q klassifiziert, erklärt man durch die Zuordnung

$$[E] \mapsto \sum_{\substack{C \subset E \\ |C|=p}} [E/C]\,,$$

wobei die (formale) Summe über alle Untergruppen $C \subset E$ der Ordnung p zu nehmen ist, die Hecke-Korrespondenzen t_p von $X_0(q)$. Die t_p's ($p \neq q$, Primzahl) erzeugen die *Hecke-Algebra* $\mathbb{T}$. Die Hecke-Korrespondenzen induzieren Endomorphismen $T(p)$ von $M_k\big(\Gamma_0(q)\big)$, welche durch die Formel

$$\big(f|T(p)\big)(\tau) = p^{k-1}f(p\tau) + p^{-1}\sum_{b \bmod p} f\left(\frac{\tau+b}{p}\right) \tag{4}$$

gegeben sind. Wir erhalten damit Darstellungen ρ_k der Hecke-Algebra $\mathbb{T}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $M_k\big(\Gamma_0(q)\big)$. Da $\mathbb{T}$ kommutativ ist und die $T(p)$'s bezüglich des Peterssonschen Skalarprodukts selbstadjungiert sind, gibt es eine Basis von $M_k\big(\Gamma_0(q)\big)$, welche aus simultanen Eigenfunktionen bezüglich $\mathbb{T}$, den *Eigenformen*, besteht.

Wir erläutern nun die uns am wichtigsten erscheinenden Beiträge Eichlers zum Themenkreis der Modulformen. Der Artikel [43] bietet hierzu eine ausgezeichnete Übersicht.

A. *Kongruenzrelation.* Für die nach Reduktion mod p ($p \neq q$, Primzahl) induzierte Korrespondenz $\widetilde{t}_p$ von $\widetilde{X}_0(q)/\mathbb{F}_p$ beweist Eichler in [32] die Zerlegung

$$\widetilde{t}_p = F_p + V_p\,, \tag{5}$$

wobei F_p, resp. V_p, die Frobenius-Korrespondenz, resp. die Verschiebung, auf der Reduktion $\widetilde{X}_0(q)/\mathbb{F}_p$ bedeuten[2]. Wegen $F_p \circ V_p = p^{k-1}\mathrm{id}$ genügt F_p damit

[2]Eichler beweist die Zerlegung (5) sogar für beliebige Stufe N, allerdings nur für Primzahlen p, welche nicht einer endlichen (nicht explizit angegebenen) Ausnahmemenge angehören.

einer quadratischen Gleichung über der Hecke-Algebra $\mathbb{T}$. Dieses Resultat wurde von G. Shimura auf Siegelsche Modulformen vom Geschlecht 2 und später von P. Deligne (unveröffentlicht) bzw. G. Faltings (s. [FC90]) auf Siegelsche Modulformen beliebigen Grades verallgemeinert. Indem Eichler die Kongruenzrelation (5) zusammen mit der nach H. Hasse und A. Weil bekannten Abschätzung der Eigenwerte von F_p kombinierte, gelang ihm die Abschätzung

$$|a_p| \leq 2\sqrt{p}$$

für den p-ten ($p \neq q$, Primzahl) Fourierkoeffizienten einer normierten Eigenform $f \in S_2\big(\Gamma_0(q)\big)$. Dies lieferte den Beweis der Petersson-Vermutung für das Gewicht $k = 2$; man findet ihn ebenfalls in der Arbeit [32] (s. auch [33]). Weitere Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse folgten kurz darauf von G. Shimura (beginnend mit [Sh58]). Der Beweis der Ramanujan-Petersson-Vermutung für beliebige Gewichte k gelang schliesslich P. Deligne in [De71].

B. *Spurformel.* Mit der Formel (3) erhält man

$$\dim_{\mathbb{C}} M_2\big(\Gamma_0(q)\big) = g_q + 1 = h_q.$$

Dies veranlasste E. Hecke bereits im Jahr 1940 zur Vermutung, dass die Thetareihen zu den quaternären quadratischen Formen der Diskriminante q^2 den Raum $M_2\big(\Gamma_0(q)\big)$ erzeugen. Den Beweis dieser Vermutung, d.h. die Lösung des sogenannten *Basisproblems*, erbrachte Eichler in den beiden Arbeiten [34], [35] auf die folgende Weise: Es seien $D_q/\mathbb{Q}$ die in Abschnitt 2.1 eingeführte definite Quaternionenalgebra, $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}$ eine Maximalordnung und $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{h_q}$ ein Repräsentantensystem aller Idealklassen mit Linksordnung $\mathfrak{O}_1$; die Rechtsordnung von $\mathfrak{m}_j$ sei $\mathfrak{O}_j$. Nach Brandt repräsentieren damit $\mathfrak{m}_j^{-1}\mathfrak{m}_k$ $(j, k = 1, \ldots, h_q)$ sämtliche Idealklassen mit Linksordnung $\mathfrak{O}_j$ und Rechtsordnung $\mathfrak{O}_k$ in D_q. Mit den Brandtschen Anzahlmatrizen

$$B(n) := \big(b_{j,k}(n)\big)_{1 \leq j,k \leq h_q},$$

wobei $b_{j,k}(n)$ die Anzahl der ganzen Ideale der Norm n mit Linksordnung $\mathfrak{O}_j$ bedeutet, welche rechtsäquivalent zu $\mathfrak{m}_j^{-1}\mathfrak{m}_k$ sind, erhält man in der Form

$$\vartheta(\tau) := \big(\vartheta_{j,k}(\tau)\big)_{1 \leq j,k \leq h_q}, \qquad \vartheta_{j,k}(\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} b_{j,k}(n)\, \mathrm{e}^{2\pi i n \tau},$$

sämtliche Thetareihen zu quaternären quadratischen Formen der Diskriminante q^2; es sind Elemente von $M_2\big(\Gamma_0(q)\big)$. Eine Anwendung der Formel (2) in diesem speziellen Fall zeigt, dass die Wirkung des Hecke-Operators $T(p)$ auf $\vartheta(\tau)$ gegeben ist durch

$$\big(\vartheta|T(p)\big)(\tau) = B(p) \cdot \vartheta(\tau).$$

Bezeichnet Θ den durch die Thetareihen $\vartheta_{j,k}(\tau)$ erzeugten Unterraum in $M_2\big(\Gamma_0(q)\big)$, so erhält man neben der durch (4) gegebenen Darstellung ρ_2 von $\mathbb{T}$ in $M_2\big(\Gamma_0(q)\big)$ die weitere Darstellung ρ_Θ von $\mathbb{T}$ in Θ, welche durch die Brandtschen Anzahlmatrizen gegeben ist. Die Spuren von ρ_2 lassen sich mit Hilfe einer auf A. Hurwitz zurückgehenden Formel (s. [Hu87], Formel (29)), einer frühen Form des Lefschetzschen Fixpunktsatzes, ermitteln. Für die Spuren von ρ_Θ erhält Eichler die Formel

$$\operatorname{tr}\rho_\Theta\big(T(p)\big) = \operatorname{tr} B(p) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,f}\left(1-\left\{\frac{(\sigma^2-4p)f^{-2}}{q}\right\}\right)\frac{h\big((\sigma^2-4p)f^{-2}\big)}{w\big((\sigma^2-4p)f^{-2}\big)}$$
$$\big(-2\sqrt{p}<\sigma<2\sqrt{p}\,,\ 0<f\,,\ (\sigma^2-4p)f^{-2}\equiv 0 \text{ oder } 1 \bmod 4\big),$$

wobei $h(-d)$, resp. $w(-d)$ die Klassenzahl, resp. die Anzahl der Einheiten von $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ bedeuten und $\left\{\frac{\cdot}{\cdot}\right\}$ ein verallgemeinertes Legendresymbol ist. Aufgrund der resultierenden Gleichheit der Spuren

$$\operatorname{tr}\rho_2\big(T(p)\big) = \operatorname{tr}\rho_\Theta\big(T(p)\big)$$

ergibt sich schliesslich ein Beweis der Heckeschen Vermutung.
Eichlers Spurformel stellt einen Spezialfall der allgemeinen Selbergschen Spurformel (s. [Se56]) dar. Im Rahmen des durch R.P. Langlands initiierten Programms, angefangen mit der Arbeit [JL70], wurden die Ideen von Selberg und Eichler weitgehend verallgemeinert. Die aktuellsten Beiträge zu den mannigfachen Ausprägungen der Spurformel finden sich in den Arbeiten von J. Arthur (für einen ausgezeichneten Überblick hierzu s. [Ar05]).

C. *Kohomologie.* Nach der erfolgreichen Lösung des Basisproblems für das Gewicht $k=2$ und Primzahlstufe q ging Eichler nun daran, den Fall geraden Gewichts $k>2$ und quadratfreier Stufe N zu untersuchen. Dazu wurden Thetareihen zu quaternären quadratischen Formen der Diskriminante N^2 und Kugelfunktionen vom Grad $k-2$ herangezogen; sie sind Elemente von $S_k\big(\Gamma_0(N)\big)$. Dies führte zu den verallgemeinerten Brandtschen Matrizen, deren Spuren in [39] (s. auch [64]) bestimmt wurden; als Vorbereitung dazu diente die Arbeit [37]. Thetareihen zu definiten quadratischen Formen in $2k$ Variablen konnten nicht verwendet werden, da die Spuren der entsprechenden Anzahlmatrizen (s. Abschnitt 2.2) nicht berechnet werden konnten. Die Spuren der Darstellung ρ_k andererseits konnten im wesentlichen unter Verwendung der Arbeit [Se56] von A. Selberg bestimmt werden. Eine neue, algebraische Berechnungsart dieser Spuren gab Eichler in der Arbeit [41] (s. auch [42]) durch Heranziehen kohomologischer Methoden: Einer nicht notwendigerweise holomorphen Modulform f vom Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$ wird das unbestimmte Integral

$$F(\tau) := \frac{1}{(k-2)!}\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(\zeta)(\tau-\zeta)^{k-2}\,d\zeta$$

zugeordnet. Unterwirft man F einer gebrochen linearen Substitution

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N),$$

so erhält man die Gleichung

$$F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{k-2}=F(\tau)+\Omega_\gamma(f)$$

mit einem von f abhängigen Polynom $(k-2)$-ten Grades $\Omega_\gamma(f)$ in τ. Die Zuordnung $\gamma\mapsto\Omega_\gamma(f)$ definiert einen 1-Kozyklus der Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit Werten im $\mathbb{C}$-Vektorraum $V_{\mathbb{C}}^{(k-2)}$ der Polynome vom Grad $k-2$. Eichler beweist, dass die Abbildung $f\mapsto\Omega_\gamma(f)$ einen Isomorphismus

$$S_k\big(\Gamma_0(N)\big)\oplus\overline{S_k\big(\Gamma_0(N)\big)}\cong H^1_P\big(\Gamma_0(N),V_{\mathbb{C}}^{(k-2)}\big)$$

zwischen holomorphen und antiholomorphen Spitzenformen und der ersten parabolischen Kohomologie von $\Gamma_0(N)$ mit Werten in $V_{\mathbb{C}}^{(k-2)}$ (Definition s. [Sh71]) liefert. Diese kohomologische Interpretation der Spitzenformen erlaubte nun einen algebraischen Zugang zu den Spuren der Darstellung ρ_k. Wiederum verallgemeinerte G. Shimura diesen Gedanken in kurz darauffolgenden Arbeiten (beginnend mit [Sh59]). Grundlegende weitere Verallgemeinerungen zu diesem Themenkreis finden sich im Rahmen der Arbeiten von A. Borel und G. Harder zur Kohomologie arithmetischer Gruppen.

Weitere Beiträge zum besprochenen Themenkreis der Modulformen finden sich in den Arbeiten [54], [63], [65] und [68]–[77]; auf sie soll nicht näher eingegangen werden. Bemerkenswert ist die Note [53], in der die Periodenlänge des Kettenbruchs einer quadratischen Irrationalität abgeschätzt wird.

D. *Taniyama-Shimura-Vermutung.* Eichlers Beitrag in diesem Zusammenhang ist eng mit seiner Entdeckung der Kongruenzrelation (5) verknüpft. Um die in Frage stehende Vermutung genauer beschreiben zu können, erinnern wir zunächst an einige Begriffsbildungen zu elliptischen Kurven. Unter einer über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definierten *elliptischen Kurve* E verstehen wir eine glatte, projektive Kurve, die affin durch die Gleichung

$$E:\ Y^2=X^3+aX+b\qquad(a,b\in\mathbb{Z})\tag{6}$$

gegeben ist, wobei das kubische Polynom rechter Hand in (6) drei verschiedene Nullstellen besitzt. Die letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Diskriminante

$$\Delta_E=-4a^3-27b^2$$

des kubischen Polynoms von Null verschieden ist.
Ist p eine ungerade Primzahl mit $p\nmid\Delta_E$, so erhalten wir nach Reduktion mod p die über $\mathbb{F}_p$ definierte elliptische Kurve $\widetilde{E}$, welche affin durch die Gleichung

$$\widetilde{E}:\ Y^2=X^3+\overline{a}X+\overline{b}$$

gegeben ist; hierbei sind $\overline{a} = a \bmod p \in \mathbb{F}_p$ und $\overline{b} = b \bmod p \in \mathbb{F}_p$. Die Anzahl der $\mathbb{F}_p$-rationalen Punkte von $\widetilde{E}$ ist gegeben durch

$$\left|\widetilde{E}\big(\mathbb{F}_p\big)\right| = \left|\big\{\big(\overline{x},\overline{y}\big) \in \mathbb{F}_p^2 \;\big|\; \overline{y}^2 = \overline{x}^3 + \overline{a}\,\overline{x} + \overline{b}\big\}\right| + 1.$$

Die elliptische Kurve E heisst nun *modular*, falls eine natürliche Zahl N und eine normierte Eigenform

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n\tau} \in S_2\big(\Gamma_0(N)\big)$$

derart existiert, dass für alle ungeraden Primzahlen p mit $p \nmid N$ die Gleichung

$$a_p = p + 1 - \left|\widetilde{E}\big(\mathbb{F}_p\big)\right|$$

erfüllt ist. Dies lässt sich geometrisch so interpretieren, dass ein über $\mathbb{Q}$ definierter, nicht-konstanter Morphismus $\varphi : X_0(N) \to E$ existiert; die fragliche Eigenform f ist dann durch die Gleichung $f(\tau)\,d\tau = \varphi^*(\omega)$ bestimmt, wobei ω das (bis auf Skalierung eindeutig bestimmte) reguläre Differential erster Ordnung auf E bedeutet.

Die Vermutung von Taniyama-Shimura besagt nun, dass jede über $\mathbb{Q}$ definierte elliptische Kurve E modular ist. Sie wurde von Y. Taniyama im Jahr 1955 im Rahmen eines internationalen Symposiums über algebraische Zahlentheorie in Tokio-Nikko in einer ersten Form aufgestellt und in den nachfolgenden Jahren von G. Shimura (s. [Sh61]) und A. Weil (s. [We67]) präziser formuliert. Der Beweis dieser tiefliegenden Vermutung wurde im Jahr 1995 durch A. Wiles zusammen mit R. Taylor in den beiden bahnbrechenden Arbeiten [Wi95], [TW95] gegeben. Die Bedeutung dieses Resultats liegt insbesondere auch darin, dass sich damit die berühmte Vermutung von Fermat aus dem Jahr 1637 nachweisen lässt.

Eichlers Beitrag zu diesem Problemkreis besteht darin, dass er die Vermutung von Taniyama-Shimura als erster in gewissen, bis dahin nicht zugänglichen Spezialfällen, die sich aus seiner Arbeit [32] ergaben, nachweisen konnte. Ein typisches Beispiel ist die elliptische Kurve

$$E_{11}:\; Y^2 + Y = X^3 - X^2\,.$$

Eichler zeigt, dass in diesem Fall für alle Primzahlen p, abgesehen von einer endlichen Ausnahmemenge, die Gleichheit

$$a_p = p + 1 - \left|\widetilde{E}_{11}\big(\mathbb{F}_p\big)\right|$$

besteht, wobei a_p die Fourierkoeffizienten der eindeutig bestimmten, normierten Eigenform $f \in S_2\big(\Gamma_0(11)\big)$ sind, die durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, t^n = t \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - t^n\big)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - t^{11n}\big)^2 \qquad \big(t = \mathrm{e}^{2\pi i\tau}\big)$$

gegeben ist (s. auch [Ta74], S. 200).

2.4 Der Satz von Riemann-Roch

In [45] (s. auch [44]) stellte Eichler dem klassischen Minkowskischen Linearformensatz folgendes funktionentheoretische Analogon an die Seite: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $k_\infty(x)$ der Körper der Laurentreihen in x^{-1} mit Koeffizienten in k. Ist $\big(m_{j,k}\big)_{1\le j,k\le n}$ eine n-reihige Matrix mit Koeffizienten in $k_\infty(x)$ und nicht-verschwindender Determinante und sind n_k $(k=1,\ldots,n)$ positive natürliche Zahlen, so ist die Anzahl linear unabhängiger Lösungen der Ungleichungen

$$\deg\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\cdot m_{j,k}\right)\le n_k-1 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

in Polynomen $p_j=p_j(x)$ mindestens gleich

$$\sum_{k=1}^{n} n_k-\deg\Big(\det\big(m_{j,k}\big)_{1\le j,k\le n}\Big).$$

Mit Hilfe dieses Linearformensatzes für Polynombereiche gelang Eichler ein neuer Beweis des klassischen Riemann-Rochschen Satzes für Divisoren in algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen oder – geometrisch gesprochen – für Geradenbündel über glatten, projektiv algebraischen Kurven über k. Dieses Ergebnis zeigt – in Analogie zu früheren Untersuchungen von E. Artin und A. Weil –, wie sich bei Gegenüberstellung der Theorien der Zahlkörper und Funktionenkörper die Sätze von Minkowski und Riemann-Roch entsprechen, ein Leitgedanke, der erst vor kurzem seinen Abschluss durch den Beweis eines *arithmetischen* Riemann-Rochschen Satzes gefunden hat (s. [Fa92], [GS92]).

In den Arbeiten [49]–[51], [55]–[57], im wesentlichen zusammengefasst im Lecture Notes Band [62], formulierte und bewies Eichler einen Riemann-Rochschen Satz für algebraische Funktionenkörper in mehreren Veränderlichen. Dabei fand er einen neuen Beweis des Serreschen Dualitätssatzes (s. [Se55]). Eichlers Ansatz war allerdings nicht intrinsisch, da seinem Beweis eine gewisse Koordinatenwahl zugrunde lag, die ein Induktionsargument bezüglich der Anzahl der Variablen ermöglichte. Deshalb gelang es auch nicht, Eichlers Satz dem von F. Hirzebruch in [Hi56] und von A. Grothendieck in [BS58] bewiesenen allgemeinen Riemann-Rochschen Satz für kohärente Garben über algebraischen Schemata gegenüberzustellen.

2.5 Jacobiformen

In der Arbeit [67] fand Eichler eine obere Schranke für die Dimension des Vektorraums Siegelscher Modulformen vom Grad g und genügend grossem Gewicht k zur vollen Siegelschen Modulgruppe. Dabei benutzte er wesentlich die bereits von I. Pyatetskii-Shapiro in [Py69] eingeführte Fourier-Jacobi-Entwicklung einer Siegelschen Modulform in Jacobische Modulformen, oder kurz, in Jacobiformen. Daraus entstand das Bedürfnis, diese Funktionen – zunächst im Fall

$g = 1$ – für sich allein systematisch zu studieren. Diese Untersuchungen fanden ihren Niederschlag in der zusammen mit D. Zagier verfassten Monographie [80]. Dort wird eine *Jacobiform* vom Gewicht k, Index m zur Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ definiert als eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche für alle $\left[\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), (\lambda, \mu)\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{-k} \mathrm{e}^{\left(2\pi i m\left(\lambda^2\tau + 2\lambda z - \frac{c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d}\right)\right)} = f(\tau, z)$$

genügt und eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z} \\ 4mn - r^2 \geq 0}} c_{n,r}\, \mathrm{e}^{2\pi i(n\tau + rz)}$$

besitzt. Die wesentlichen Resultate des Buchs [80] bestehen in der Entwicklung einer Hecke-Theorie für Jacobiformen und der Bestimmung der Dimension des Vektorraums $J_{k,m}\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\bigr)$ der Jacobiformen vom Gewicht k, Index m bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{k,m}\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\bigr) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\dim_{\mathbb{C}} M_{k+2\nu}\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\bigr) - \left\lceil \frac{\nu^2}{4m} \right\rceil\right),$$

wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl grösser oder gleich x bedeutet. Die in dieser Form entwickelte Theorie führte insbesondere zu einem Beweis der Vermutung von Saito-Kurokawa, welche in der Angabe eines Hecke-äquivarianten Isomorphismus zwischen der Maass'schen Spezialschar, einem arithmetisch definierten Unterraum des Vektorraums der Siegelschen Modulformen vom Grad $g = 2$, und dem Vektorraum der elliptischen Modulformen $M_{2k-2}\bigl(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\bigr)$ besteht.

In der Zwischenzeit hat sich das Studium der Jacobiformen zu einer eigenständigen Theorie entwickelt: Zagier und Skoruppa gelang in [SZ89] die Bestimmung der Spuren der Jacobischen Hecke-Operatoren; in diesen Zusammenhang gehört auch die Arbeit [79]. In [Kr95] wurde, basierend auf der in [FC90] gegebenen arithmetischen Kompaktifizierung des Modulraums prinzipal polarisierter abelscher Varietäten, eine arithmetisch geometrische Begründung der Theorie der Jacobiformen beliebigen Grades gegeben.

Als interessantes Nebenprodukt zu diesem Themenkreis sei noch die Arbeit [78] erwähnt, in der die Nullstellen $z_0(\tau)$ der Weierstrass'schen $\wp$-Funktion $\wp(\tau, z)$ modulo dem Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ angegeben werden zu

$$z_0(\tau) \equiv \frac{1}{2} \pm \left(\frac{\log\left(5 + 2\sqrt{6}\right)}{2\pi i} + 144\pi i\sqrt{6} \int_{\tau}^{i\infty} (t - \tau)\frac{\Delta(t)}{E_6(t)^{3/2}}\, dt\right),$$

wobei

$$\Delta(\tau) = t \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - t^n\right)^{24}, \text{ resp. } E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^5\right) t^n \quad \left(t = \mathrm{e}^{2\pi i\tau}\right)$$

die normierte Spitzenform vom Gewicht 12, resp. die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht 6 zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bedeuten.

In [81] und [86] führte Eichler schliesslich eine weitere Verallgemeinerung des Begriffs der Modulformen ein. Damit verbunden war die Hoffnung, Eigenformen eines Gewichts k_1 auf Eigenformen eines höheren Gewichts k_2 abzubilden und damit, basierend auf der Kenntnis der Ramanujan-Petersson-Vermutung im Fall $k = 2$, einen analytischen Beweis dieser Vermutung für Gewichte $k > 2$ herzuleiten. Dies gelang leider nicht, allerdings zeigen aktuelle Untersuchungen, dass Eichlers Wunsch nach einem analytischen Beweis der Ramanujan-Petersson-Vermutung realisierbar zu sein scheint.

3 Literatur

3.1 Veröffentlichungen von M. Eichler[3]

[1] Untersuchungen in der Zahlentheorie der rationalen Quaternionenalgebren, J. Reine Angew. Math. 174 (1936), 129–159.

[2] Über die Einheiten der Divisionsalgebren, Math. Ann. 114 (1937), 635–654.

[3] Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, J. Reine Angew. Math. 176 (1937), 192–202.

[4] Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Z. 43 (1938), 102–109.

[5] Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Z. 43 (1938), 481–494.

[6] Neuere Ergebnisse in der Theorie der einfachen Algebren, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 47 (1938), 198–220.

[7] Allgemeine Kongruenzklasseneinteilung der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen, J. Reine Angew. Math. 179 (1938), 227–251.

[8] Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Ann. 116 (1939), 742–748.

[9] Zur Einheitentheorie der einfachen Algebren, Comment. Math. Helv. 11 (1939), 253–272.

[10] Allgemeine Integration einiger partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik durch Quaternionenfunktionen, Comment. Math. Helv. 12 (1940), 212–224.

[11] Zur numerischen Lösung von Gleichungen mit reellen Koeffizienten, J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 124–128.

[12] Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern, Math. Z. 48 (1942), 503–526.

[3] Die vermutlich erste Publikation von M. Eichler, „Reissverfestigung an Glasstäben“, findet sich in Z. f. Phys. 98 (1936), 280–282.

[13] Bemerkungen zu den vorstehenden Vermutungen von Teichmüller, J. Reine Angew. Math. 185 (1943), 12–13.

[14] Auflösung einer Integralgleichung von Possio für den harmonisch schwingenden Tragflügel im kompressiblen Medium durch Zurückführung auf ein lineares Gleichungssystem, Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung (1942), 1169–1172.

[15] Über gewisse Anzahlformeln in der Theorie der quadratischen Formen, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. (1943), 1–24.

[16] Über die Dämpfung von Schwingungen bei zeitlich veränderlichen Kräften, Z. Angew. Math. Mech. 24/1 (1944), 41–43.

[17] Eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes, Math. Z. 49 (1944), 565–575.

[18] Zur Theorie der quadratischen Formen gerader Variablenzahl, Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, 34–46, Orell Füssli Verlag, Zürich 1945.

[19] Allgemeine Integration linearer partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typ bei zwei Grundvariablen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 15 (1947), 179–210.

[20] Zahlentheorie der quadratischen Formen, Ber. Math. Tagung Tübingen (1947), 63–64.

[21] Grundzüge einer Zahlentheorie der quadratischen Formen I/II, Comment. Math. Helv. 20/21 (1947/48), 9–60/1–28.

[22] On the differential equation $u_{xx} + u_{yy} + N(x)u = 0$, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 259–278.

[23] On the analytic continuation of certain ζ-functions and a fundamental theorem on simple algebras, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 816–826.

[24] Analytic functions in three-dimensional Riemannian spaces, Duke Math. J. 16 (1949), 339–349.

[25] Eine Modifikation der Riemannschen Integrationsmethode bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ, Math. Z. 53 (1950), 1–10.

[26] Zur Algebra der orthogonalen Gruppen, Math. Z. 53 (1950), 11–20.

[27] Arithmetics of orthogonal groups, Proc. Internat. Congr. Math. II, Cambridge MA 1950, 65–70.

[28] Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter, Math. Z. 55 (1952), 216–252.

[29] Note zur Theorie der Kristallgitter, Math. Ann. 125 (1952), 51–55.

[30] Idealtheorie der quadratischen Formen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 18 (1952), 14–37.

[31] Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952, 2. Auflage 1974.

[32] Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. Math. (Basel) 5 (1954), 355–366.

[33] Modulfunktionen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Proc. Internat. Cong. Math. II, Amsterdam 1954, 16–18.

[34] Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren, J. Reine Angew. Math. 195 (1955), 127–151 (Berichtigung, J. Reine Angew. Math. 197 (1957), 220).

[35] Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, J. Reine Angew. Math. 195 (1955), 156–171 (Berichtigung, J. Reine Angew. Math. 196 (1956), 155).

[36] Heinrich Brandt, Math. Nachr. 13 (1955), 321–326.

[37] On the class number of imaginary quadratic fields and the sums of divisors of natural numbers, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 19 (1955), 153–180.

[38] Der Hilbertsche Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers, Math. Z. 64 (1956), 229–242 (Berichtigung, Math. Z. 65 (1956), 214).

[39] Modular correspondences and their representations, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 20 (1956), 163–206.

[40] Lectures on modular correspondences (notes by S.S. Rangachari), Tata Inst. Fund. Res., Bombay 1956, reissued 1965.

[41] Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, Math. Z. 67 (1957), 267–298.

[42] Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, 112–115, Akademie-Verlag, Berlin 1958.

[43] Quadratische Formen und Modulfunktionen, Acta Arith. 4 (1958), 217–239.

[44] Ein Satz über Linearformen in Polynombereichen, Arch. Math. (Basel) 10 (1959), 81–84.

[45] Differentiale und Riemann-Rochscher Satz in algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24 (1960), 5–11.

[46] Mathematik, in „Lehre und Forschung an der Universität Basel zur Zeit der Feier ihres 500jährigen Bestehens“, 275–285, Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart 1960.

[47] Die Bildungsfrage in der technisierten Welt, in „Forschung und Bildung“, Birkhäuser-Druckerei, Basel 1962.

[48] Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen, Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart 1963; Engl. Übersetzung, Academic Press, London-New York-Toronto 1966.

[49] Eine Theorie der linearen Räume über rationalen Funktionenkörpern und der Riemann-Rochsche Satz für algebraische Funktionenkörper I/II, Math. Ann. 156/157 (1964), 347–377/261–275.

[50] Eine Vorbereitung auf den Riemann-Rochschen Satz für algebraische Funktionenkörper, J. Reine Angew. Math. 214/215 (1964), 268–275.

[51] Zur Theorie der Divisoren in algebraischen Funktionenkörpern, Arch. Math. (Basel) 16 (1965), 428–438.

[52] Eine Bemerkung zur Fermatschen Vermutung, Acta Arith. 11 (1965), 129–131 (Berichtigung, Acta Arith. 11 (1965), 261).

[53] Grenzkreisgruppen und kettenbruchartige Algorithmen, Acta Arith. 11 (1965), 169–180.

[54] Einige Anwendungen der Spurformel im Bereich der Modularkorrespondenzen, Math. Ann. 168 (1967), 128–137.

[55] Dimension und Schnittpunktsanzahl von Divisoren in algebraischen Funktionenkörpern, Math. Z. 97 (1967), 331–375 (Berichtigung, Math. Z. 102 (1967), 118–119).

[56] Eine Spurformel für Korrespondenzen von algebraischen Funktionenkörpern mit sich selber, Invent. Math. 2 (1967), 274–300.

[57] Berichtigung und Ergänzung zweier Arbeiten zur algebraischen Funktionentheorie, Invent. Math. 3 (1967), 245–256.

[58] A new proof of the Baker-Campbell-Hausdorff formula, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 23–25.

[59] Zur Begründung der Theorie der automorphen Formen in mehreren Variablen, Aequationes Math. 3 (1969), 93–111.

[60] Algebraic methods in the theory of modular forms, in „Several complex variables I", Lecture Notes in Math. 155, 88–96, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[61] Andreas Speiser, 1885–1970, Verh. Schweiz. Naturforsch. Ges., wiss. Teil 150 (1970), 325–327.

[62] Projective varieties and modular forms, Lecture Notes in Math. 210, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[63] On the graded rings of modular forms, Acta Arith. 18 (1971), 87–92.

[64] The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators, in „Modular functions of one variable I", Lecture Notes in Math. 320, 75–151, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973 (Berichtigung in „Modular functions of one variable IV", Lecture Notes in Math. 476, 145–147, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975).

[65] Über einige Spezialisierungen der Hilbertschen Modulformen in 2 Variablen, Invent. Math. 20 (1973), 73–86 (Berichtigung, Invent. Math. 20 (1973), 337–340).

[66] Zum 1. Fall der Fermatschen Vermutung. Eine Bemerkung zu zwei Arbeiten von L. Skula und H. Brückner, J. Reine Angew. Math. 260 (1973), 214.

[67] Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht, Math. Ann. 213 (1975), 281–291 (Berichtigung, Math. Ann. 215 (1975), 195).

[68] Les variétés modulaires de Hilbert et Siegel et les courbes automorphes de Poincaré et Shimura, Soc. Math. France, Astérisque 24–25 (1975), 99–107.

[69] Über ambige definite quaternäre quadratische Formen von Primzahldiskriminante, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 623–647.

[70] Représentation moyenne de nombres par des formes quadratiques quaternaires, Soc. Math. France, Astérisque 41–42 (1977), 199–202.

[71] On theta functions of real algebraic number fields, Acta Arith. 33 (1977), 269–292.

[72] Theta functions over $\mathbb{Q}$ and over $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, in „Modular functions of one variable VI", Lecture Notes in Math. 627, 197–225, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

[73] On the representation of modular forms by theta series, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 1 (1979), 71–74.

[74] Über die Wirkung von Hecke-Operatoren auf Thetareihen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II (1979), 29–39.

[75] Über die Darstellung von Modulformen durch Thetareihen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II (1980), 7–24.

[76] On symmetric and unsymmetric theta functions over real quadratic fields, Acta Arith. 37 (1980), 167–179.

[77] Theta series of inhomogeneous quadratic forms, Invent. Math. 66 (1982), 99–113.

[78] On the zeros of the Weierstrass $\wp$-function, gemeinsam mit D. Zagier, Math. Ann. 258 (1982), 399–407.

[79] Die Spur der Hecke-Operatoren in gewissen Räumen von Jacobischen Modulformen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 54 (1984), 35–48.

[80] The theory of Jacobi forms, gemeinsam mit D. Zagier, Progress in Math. 55, Birkhäuser-Verlag, Boston-Basel-Stuttgart 1985.

[81] Eine neue Klasse von Modulformen und Modulfunktionen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 55 (1985), 53–68.

[82] The quadratic reciprocity law and the elementary theta function, Glasgow Math. J. 27 (1985), 19–30.

[83] Das wissenschaftliche Werk von Max Deuring, Acta Arith. 47 (1986), 187–192.

[84] Heinrich Brandt, Werk und Wesen, Wiss. Beitr. der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg 33(M48) (1987), 11–18.

[85] New formulas for the class number of imaginary quadratic fields, Acta Arith. 49 (1987), 35–43.

[86] Eine neue Klasse von Modulformen und Modulfunktionen II (mit einem Anhang von R. Berndt), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57 (1987), 57–68.

[87] Alexander Ostrowski, Über sein Leben und Werk, Acta Arith. 51 (1988), 295–298.

[88] Besprechung von A. N. Andrianov, Quadratic forms and Hecke operators, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 18 (1988), 224–230.

[89] On the imbeddings of imaginary quadratic orders in definite quaternion orders, gemeinsam mit J. Brzezinski, J. reine angew. Math. 426 (1992), 91–105.

3.2 Weitere Literatur

[Ar05] J. Arthur: An introduction to the trace formula. Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[BS58] A. Borel, J-P. Serre: Le théorème de Riemann-Roch (d'après A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 97–136.

[Br25] H. Brandt: Über die Komponierbarkeit der quaternären quadratischen Formen, Math. Ann. 94 (1925), 179–197.

[De71] P. Deligne: Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, Séminaire Bourbaki, Lecture Notes in Math. 179, 139–172, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[FC90] G. Faltings, C.-L. Chai: Degeneration of abelian varieties, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokio-Hong Kong-Barcelona 1990.

[Fa92] G. Faltings: Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem, Ann. of Math. Stud. 127, Princeton University Press 1992.

[GS92] H. Gillet, C. Soulé: An arithmetic Riemann-Roch theorem, Invent. Math. 110 (1992), 473–543.

[Hi56] F. Hirzebruch: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[Hu87] A. Hurwitz: Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip, Math. Ann. 28 (1887), 561–585.

[Ig59] J.-I. Igusa: Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions, Amer. J. Math. 81 (1959), 561–577.

[JL70] H. Jacquet, R.P. Langlands: Automorphic Forms on GL(2), Lecture Notes in Math. 114, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[Kn66] M. Kneser: Strong approximation, algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Sympos. Pure Math. 9 (1966), 187–196.

[Kr95] J. Kramer: An arithmetic theory of Jacobi forms in higher dimensions, J. Reine Angew. Math. 458 (1995), 157–182.

[Li86] R. Lipschitz: Die Summen von Quadraten, Verlag von Max Cohen und Sohn, Bonn 1886.

[Me91] A. Meyer: Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen, J. Reine Angew. Math. 108 (1891), 125–139.

[Py69] I.I. Pyatetskii-Shapiro: Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon-Breach, New York-London-Paris 1969.

[Se56] A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47–87.

[Se55] J-P. Serre: Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. (2) 61 (1955), 197–278.

[Sh58] G. Shimura: Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques, J. Math. Soc. Japan 10 (1958), 1–28.

[Sh59] G. Shimura: Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan 11 (1959), 291–311.

[Sh61] G. Shimura: On the zeta-functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions, J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 275–331.

[Sh71] G. Shimura: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press 1971.

[Ta74] J. Tate: The arithmetic of elliptic curves, Invent. Math. 23 (1974), 179–206.

[TW95] R. Taylor, A. Wiles: Ring theoretic properties of certain Hecke algebras, Ann. Math. 141 (1995), 553-572.

[We67] A. Weil: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 168 (1967), 149–156.

[Wi95] A. Wiles: Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Ann. Math. 141 (1995), 443-551.

[SZ89] N.-P. Skoruppa, D. Zagier: A trace formula for Jacobi forms, J. Reine Angew. Math. 393 (1989), 168–198.

Jürg Kramer[4]
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D–10099 Berlin

[4]Der Autor promovierte als Schüler von M. Eichler im Jahr 1985.