

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung Einführung in die Mathematikdidaktik, Teil 1

Die Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik“ behandelt einige grundlegende Fragen des Mathematikunterrichts, wobei exemplarisch Beispiele herangezogen werden, die sich vor allem auf den Unterricht in der Sekundarstufe I, in einigen Fällen auch auf die Primarstufe und die S II beziehen. Da es nicht möglich ist, alle wesentlichen Aspekte der Mathematikdidaktik in einer Vorlesung zu behandeln, muss mitunter auf spätere Lehrveranstaltungen verwiesen werden. Vor allem in der Vorlesung „Didaktik der Elementargeometrie“ werden neben stoffdidaktischen Inhalten auch ergänzende inhaltsübergreifende Themengebiete der Mathematikdidaktik behandelt.

Vorlesung

„Einführung in die Mathematikdidaktik“:

- Ziele des Mathematikunterrichts (einschließlich Kompetenzen, Leitideen)
- Lerntheoretische Grundlagen und daraus resultierende Prinzipien für den Mathematikunterricht
- Anwendungen und Modellbildung im MU
- Mathematik als „Welt eigener Art“ erfahren
- Problemlösen im Mathematikunterricht (Teil 1)
- Prozessbezogene Aspekte; Unterrichtsmethoden

Vorlesung

„Didaktik der Elementargeometrie“:

- Beweisen und Argumentieren
- Konstruieren
- Problemlösen (Teil 2)
- Begriffslernen und Begriffslehren

Literaturempfehlungen

FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bände 1 und 2. Klett: Stuttgart, 1973.

FÜHRER, L.: *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1997.

VOLLRATH, H.-J.; ROTH, J.: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Spektrum: Heidelberg, 2011 (2. Aufl.).

REISS, K.; HAMMER, CH.: *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Birkhäuser: Basel, 2013.

WINTER, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden, 1981 (6. Aufl., Nachdruck 2009).

Relevante staatliche Vorgaben:

KMK 2003: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*.

<http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/dokumente.html>

KMK 2004: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* (siehe die o. a. Internetseite).

KMK 2012: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Rahmenlehrpläne des Landes Berlin für das Fach Mathematik: (Sekundarstufe I von 2006, Sekundarstufe II von 2006, Grundschule von 2004):

<http://www.berlin.de/sen/bildung/schulorganisation/lehrplaene/>

Zu den einzelnen Themengebieten der Vorlesung werden außerdem noch spezielle Literaturhinweise gegeben.

1 Ziele und Leitideen des Mathematikunterrichts

1.1 Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts

Mathematikunterricht in allgemeinbildendem Sinne ist nach HEINRICH WINTER durch drei *Grunderfahrungen* gekennzeichnet:¹

- (G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

1.2 Allgemeine Lernziele nach Winter

Allgemeine Lernzielkataloge für den gesamten Mathematikunterricht wurden von einer Reihe von Autoren erstellt (die Ergebnisse ähneln und überschneiden sich naturgemäß). Besonderen Einfluss erlangten die Lernziele nach Winter.²

1. Kreativ sein / schöpferisches Tätigsein
2. Argumentieren (einschließlich Beweisen)
3. Mathematisieren
4. Formalisieren (bzw. Formulieren bzw. Darstellen)

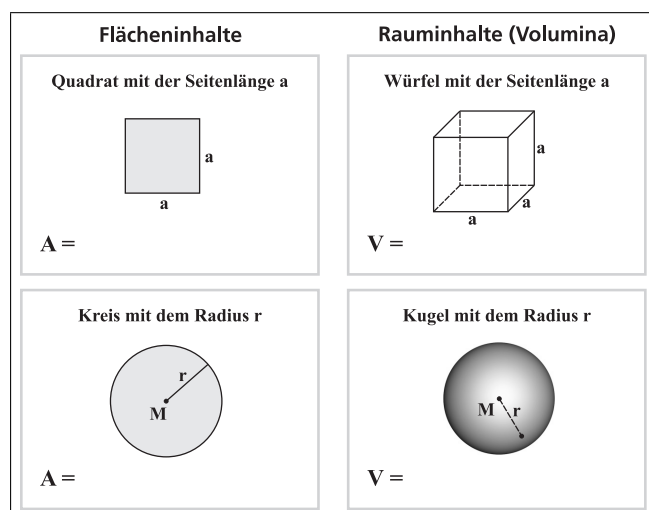
Schüleraktivitäten zum schöpferischen Tätigsein³

- Beobachten; bewusstes Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, Symmetrien, Invarianten
- Herstellen von Figuren und Situationen
- Schematisieren einer komplexen Situation
- Klassifizieren
- Anordnen und Umstrukturieren
- Aufsuchen von Entsprechungen (Analogisieren)
- Verallgemeinern und spezialisieren
- Entwerfen und verwerfen; vermuten und prüfen
- Formulieren und umformulieren
- Variieren
- Bedenken von Alternativen
- Zerlegen und Zusammensetzen – Analyse und Synthese

Beispiel zum Analogisieren: Kugelvolumen

Aufstellen einer Vermutungen aufgrund bekannter Sachverhalte,

Überprüfen der Vermutung



¹ WINTER, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 61 (1995), S. 37-46.

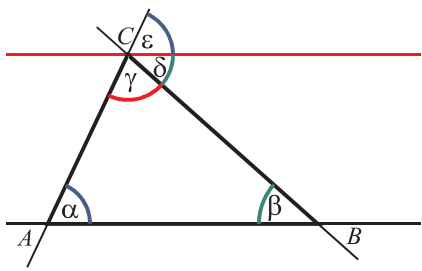
² WINTER, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1975, 3, S. 106-116

³ Stampe, E.: Repetitorium Fachdidaktik Mathematik. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn/Obb., 1984

Schüleraktivitäten zum rationalen Argumentieren

- Begriffe abgrenzen (definieren)
- Begriffe miteinander vergleichen
- Lösungswege analysieren
- Lösungen testen und kontrollieren
- Behauptungen anzweifeln
- Sätze analysieren
- Logische Abhängigkeiten prüfen – lokales Ordnen
- Sätze beweisen und Scheinbeweise entlarven
- Beweise zergliedern und auf Vollständigkeit prüfen
- Systematisieren

Beispiel für Beweisen / Lokales Ordnen: Innenwinkelsumme im Dreieck



Voraussetzung: α , β und γ sind Innenwinkel des Dreiecks ABC

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

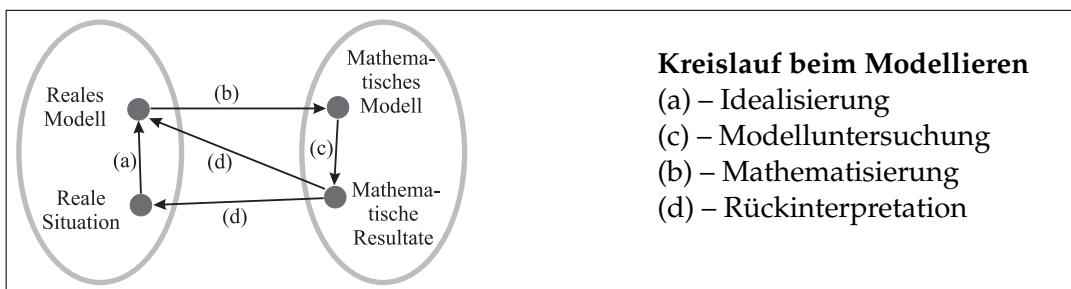
Beweis: - Wir zeichnen / betrachten die Parallele zu AB durch den Punkt C .

- Sind δ und ε die Winkel, welche diese Parallele mit BC bzw. AC bildet, so gilt:
 - $\varepsilon + \delta + \gamma = 180^\circ$ (Nebenwinkelsatz),
 - $\delta = \beta$ (Wechselwinkelsatz) und
 - $\varepsilon = \alpha$ (Stufenwinkelsatz).
- Also gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, was zu beweisen war.

Beispiel für „Scheinbeweise entlarven“:

$$\begin{aligned}
 16 - 36 &= 25 - 45 \\
 \Rightarrow 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4} \\
 \Rightarrow \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
 \Rightarrow 4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2} \\
 \Rightarrow 4 &= 5 \qquad \text{q.e.d}
 \end{aligned}$$

Mathematisieren / Modellieren



Schüleraktivitäten zum Modellieren

- Beobachten, Beschreiben und Typisieren von Wirklichkeitsausschnitten
- Schematisieren; Idealisieren
- Sammeln und Ordnen mathematisch relevanter Daten
- Beschreiben des Zusammenhangs zwischen Daten
- Interpretieren mathematischer Aussagen
- Auffinden mathematisch sinnvoller Fragen
- Formulierung der Frage in der mathematischen Sprache,
- Lösen der Frage innerhalb mathematischer Begriffssysteme
- Ausdeuten der Lösung

Schüleraktivitäten zum Erwerb formaler Fertigkeiten

- Unterscheiden von Zeichen und Bezeichnungen
- Artikulation der Beziehungen zwischen Gegenstands- und Sprachbereich
- Übertragen von Sachverhalten des Gegenstandsbereichs in den Zeichenbereich (Codieren)
- Ausdeuten von sprachlichen Gebilden bzw. Symbolen (Decodieren)
- Handhaben von Variablen, Termen, Gleichungen
- Aufbau von Algorithmen
- Ausführen algorithmischer Prozesse und Interpretation der Lösungen
- Formales Ableiten
- Erfahrungen zur Grenze algorithmischer Vorgehensweisen

Anmerkung:

Vor dem „Hantieren“ mit Symbolen und Formeln muss das Verständnis ihrer inhaltlichen Bedeutung stehen – auf allen Stufen:

$$7 \quad a \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \text{(bzw.: „gdw.“)}$$

Anmerkung:

Formales Abarbeiten von Algorithmen dominiert immer noch viel zu stark den deutschen Mathematikunterricht (siehe TIMMS; PISA)

Anmerkungen zum algorithmischen Arbeiten

Algorithmus:

Folge von Anweisungen (Rechenschritten), die einen Prozess definieren, der mit gewissen Dateneingaben beginnt und nach endlicher Zeit ein durch die Eingabedaten eindeutig bestimmtes Resultat liefert.

Merkmale von Algorithmen:

1. Algorithmen bestehen aus endlich vielen Schritten. Dabei enthält jeder Schritt eine unmissverständliche Anweisung.
2. Es gibt einen eindeutig bestimmten Schritt, der als erster auszuführen ist. Nach jedem Schritt steht fest, ob ein Algorithmus beendet ist, bzw. welcher Schritt als nächster auszuführen ist.
3. Algorithmen sind für alle Werte eines Grundbereiches ausführbar.

- Beispiele:**
- Schriftliche Rechenverfahren
 - Euklidischer Algorithmus
 - Geometrische Konstruktionen
 - Gauss-Algorithmus

Das Abarbeiten von Rechenvorschriften, Einsetzen in vorgegebene Formeln und Ausrechnen wird als algorithmisches bzw. kalkülmäßiges Arbeiten bezeichnet.

- Gegensatzpaare:**
- | | | |
|---|-------------------|--------------------------------------|
| Inhaltliches Lösen von Gleichungen | \Leftrightarrow | Kalkülmäßiges Lösen |
| Finden von Werten durch funktionale Überlegungen (Proportionalität) | \Leftrightarrow | Einsetzen von Werten in den Dreisatz |

- Schüler erleben (hoffentlich) u. a. beim Lösen von Gleichungen, dass man immer wiederkehrende formale Aufgaben auf algorithmische Weise sicher und schnell lösen kann.
- Das Aufstellen von Algorithmen ist natürlich mathematisch interessanter als das Abarbeiten.

Beispiel: Nimm eine natürliche Zahl $n > 0$, starte erst einmal mit einer Zahl kleiner als 20.

Collatz-Zahlen Unterwirf deine Zahl folgendem Algorithmus (Verfahren):

- Wenn n ungerade, dann ersetze n durch $3n + 1$.
- Wenn n gerade, dann ersetze n durch $\frac{n}{2}$.

Unterwirf den neuen Wert von n demselben Verfahren. Mache immer weiter, bis du merkst, dass nichts Neues mehr passiert.

Was stellst du fest? Nimm eine neue Zahl und prüfe, ob dasselbe Ergebnis eintritt.

1.3 Ziele, Kompetenzen und Leitideen in den Bildungsstandards und den Rahmenlehrplänen

In den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) und in den Berliner Rahmenlehrplänen (RLP) werden anstelle von Unterrichtszielen mathematische Kompetenzen benannt. Es werden zwei Dimensionen mathematischer Kompetenzen unterschieden:

- allgemeine (bzw. prozessbezogene) mathematische Kompetenzen,
- inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (Leitideen).

1.3.1 Allgemeine mathematische Kompetenzen

Kompetenzen für den Primarbereich

(nach den KMK-Bildungsstandards von 2004)

- Problemlösen
- Argumentieren
- Modellieren
- Darstellen von Mathematik
- Kommunizieren

Kompetenzen für die Sekundarstufen I und II

(nach KMK-Bildungsstandards für den MSA von 2003 und für die Allgemeine Hochschulreife 2012)

- Probleme mathematisch lösen
- Mathematisch argumentieren
- Mathematisch modellieren
- Mathematische Darstellungen verwenden
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Kommunizieren

Einige Stichpunkte zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (KMK-Standards MSA)

Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten
- Geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien auswählen und anwenden
- Plausibilität der Ergebnisse überprüfen; Lösungsideen und Lösungswege reflektieren

Mathematisch argumentieren

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es ...?“, „Wie verändert sich ...?“, „Ist das immer so?“) und Vermutungen begründet äußern
- Mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise)
- Lösungswege beschreiben und begründen

Mathematisch modellieren → siehe die Schritte des Modellierungskreislaufes

Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen
- Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln

Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

- Mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten
- Symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen
- Mathematische Werkzeuge (Taschenrechner, Software, ...) sinnvoll und verständlich einsetzen

Kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien

- Die Fachsprache adressatengerecht verwenden
- Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen

1.3.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen (Leitideen)

„Leitideen“ sind immer wieder auftretende Themenbereiche/ Kategorien (oder eben „Ideen“), die im Laufe der Schulzeit mehrfach (jeweils auf höherer Stufe) aufgegriffen werden. Die Gliederung nach Leitideen entspricht somit einer längsschnittorientierten Betrachtung des Unterrichts.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen in der Grundschule

(nach den Bildungsstandards der KMK (2004) für den Primarbereich sowie dem Berliner Rahmenlehrplan für die Grundschule, 2004)

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form (B-RLP: Form und Veränderung)
- Muster und Strukturen (nur in den KMK-Standards)
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (B-RLP: Daten und Zufall)

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen in den Sekundarstufe I und II

(nach den Bildungsstandards der KMK (2004, 2012) und den Berliner RLP)

- Leitidee Zahl
- Leitidee Messen
- Leitidee Raum und Form
- Leitidee Funktionaler Zusammenhang
- Leitidee Daten und Zufall

1.4 Anmerkungen zu Leitideen im Mathematikunterricht

- Das Konzept der Leitideen (zentraler fundamentaler, universeller, ... Ideen) wurde 1929 von WHITEHEAD herausgearbeitet.

Ideen halten sich nicht. Es muss etwas mit ihnen getan werden. (A. N. WHITEHEAD)

„Die Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen noch zu alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen lassen. Diese Art von Schulung in der Richtung des Erwerbs von noch mehr Einzelheiten auszudehnen, ist das Letzte, was man im Interesse der Bildung wünschen sollte.“

„Diese Wissenschaft, wie sie jungen Schülern dargeboten ... muss sich offenkundig auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befassen.“

A. N. WHITEHEAD

- Die NCTM-Standards (National Council of Teachers of Mathematics, USA) hatten Einfluss auf die Diskussion in Deutschland.

NCTM-Standards 2000

Standards zu Inhalten	Standards zu Prozessen
<ul style="list-style-type: none"> • Zahl und Verknüpfung • Algebra (einschließlich Funktionen, Muster) • Geometrie • Messen (einschließlich Größen) • Datenanalyse und Wahrscheinlichkeit 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Begründen und Beweisen • Kommunizieren • Verbindungen (einschließlich Vernetzen, Anwenden, Begriffsbilden) • Repräsentieren (einschließlich Darstellen, Modellieren)