Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Dr. A. Filler

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik, Teil 4

4 Kreativität und Problemlösen

Empfohlene Literatur zu diesem Kapitel

Neben den Standardwerken zur Ma-Didaktik, die für diese Vorlesung allgemein angegeben wurden, sei vor allem das folgende – über 60 Jahre alte – Buch empfohlen, das nach wie vor als „der Klassiker" zum Problemlösen im Mathematikunterricht anzusehen ist:

- POLYA, G.: *Schule des Denkens*. Tübingen, Basel: Francke, 1949 (4. Aufl.: 1995).

Weitere besonders empfehlenswerte Bücher zum Problemlösen im Mathematikunterricht:

- GRASSMANN, M.; HEINZE, A.: *Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder*. Braunschweig: Westermann, 2009.
  Dieses Buch zielt vor allem auf Problemlösen und Begabtenförderung in der Grundschule.
- POSAMENTIER, A., SCHULZ, W. (HRSG.): *The Art of Problem Solving. A Resource for the Mathematics Teacher*. Tousands Oaks, Cal.: Corvin Press, 1996.
  Ein Buch mit (u. a.) vielen interessanten Beispielen zu den heuristischen Prinzipien/ Strategien.
- SCHOENFELD, A.: *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press, 1985.
  Eines der bekanntesten Standardwerke zu der Thematik.
- SCHWARZ, H.: *Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik.* Münster: WTM, 2006.
  Dieses Buch enthält eine interessante Systematisierung der heuristischen Strategien mit vielen Beispielen.

4.1 Kreativität als Prozess – Phasen in Entdeckungsprozessen[1]

JACQUES HADAMARD (frz. Mathematiker, 1866-1963) gab Stadien von Findungs- und Entdeckungsprozessen auf mathematischem Gebiet an, anknüpfend an Ideen von HENRI POINCARE (1945):

(1) Präparation (Vorbereitung)
(2) Inkubation (Ausbrütung)
(3) Illumination (Erleuchtung, Inspiration)
(4) Verifikation (Überprüfung, Einordnung)

Andere Autoren kamen unabhängig von Hadamard zu ähnlichen Stadienmodellen. JOHN DEWEY (1859-1952, Philosoph und Pädagoge, USA) unterschied 1910 („How we think") 5 Stadien:

(1) Man begegnet einer Schwierigkeit,
(2) sie wird lokalisiert und präzisiert,
(3) Ansatz einer möglichen Lösung,
(4) logische Entwicklung der Konsequenzen des Ansatzes,
(5) weitere Beobachtung und experimentelles Vorgehen führen zur Annahme oder Ablehnung.

Präparation (Vorbereitung)

Phase 1: Bewusste Auseinandersetzung mit einem Problem

[1]Siehe hierzu auch: WINTER, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*, Braunschweig: Vieweg, 1991, S. 170ff.

Seit vierzehn Tagen mühte ich mich ab, zu beweisen, dass es keine derartigen Funktionen gibt, ... , die ich später Fuchssche Funktionen genannt habe; ich war damals sehr unwissend, täglich setzte ich mich an meinen Schreibtisch, verbrachte dort ein oder zwei Stunden und versuchte eine große Anzahl von Kombinationen, ohne zu einem Resultat zu kommen. HENRI POINCARE

- Ende der Phase 1: *Eingeständnis der Unwissenheit*; Erkenntnis, keine Möglichkeit zu sehen, die Barriere des Problems zu überwinden.
- Vorwissen ist reaktiviert worden, *Problem konnte nicht als Routinefall identifiziert werden*.
- Ansätze zur Lösung wurden versucht, aber sie brachten nichts.

Inkubation (Ausbrütung)

- Woher letzten Endes der „erhellende Einfall", der „Klick", die „Erleuchtung" in Phase 3 kommt, ist unbekannt. Die wichtigsten Prozesse dabei vollziehen sich im *Unbewussten*.
- Das Unbewusste beginnt jedoch nicht von selbst seine Arbeit.

  Die Hauptarbeit des bewussten Denkens findet vor dem Einfall statt. Der Einfall soll vorbereitet, soll provoziert werden. VAN DER WAERDEN
- In der Inkubationsphase beschäftigt sich der Problemlöser mit etwas völlig anderem, er hat vielleicht sogar schon aufgegeben.
- Aber „es" arbeitet (nach der Hypothese von POINCARE und HADAMARD) im Unbewussten weiter.
- Es werden nicht nur unwillentlich irgendwelche Ideenkombinationen ausgeführt (stochastisches Spielen), vielmehr werden diese Neukombinationen auch schon im Unterbewusstsein bewertet: Nur die verheißungsvollen werden weiter verwandt und tauchen auf, die unbrauchbaren werden (schon im Unterbewusstsein) verworfen.
- Das Kriterium für Brauchbarkeit, nach dem das Unbewusste bewertet, ist das in ihm liegende Gefühl für Schönheit.

Illumination (Erleuchtung, Inspiration)

Wie aus heiterem Himmel (ohne Anstrengung des bewussten Ichs) kommt der Einfall.

On being very abruptly awakened by an external noise, a solution long searched for appeared to me at once without the slightest instant of reflection on my part – the fact was remarkable enough to have struck me unforgottably – and in a quite different direction from any of those which I had previously tried to follow. HADAMARD

Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen – aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes, möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht imstande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte – und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen.

GAUSS über das Finden des Beweises eines zahlentheoretischen Satzes

- Die Illumination zeichnet sich durch das *starke Gefühl* aus, *dass der Einfall richtig ist*.
- Der Einfall ist bildhafter, anschaulicher Natur, und dass es ein richtiger Einfall sein muss, erscheint als unmittelbar aus ihm herausleuchtend.
- Die Leistung des Unbewussten, unmittelbar einsichtige Lösungsideen zu produzieren, wird oft „Intuition" genannt.

Verifikation (Überprüfung, Einordnung)

Die intuitive Lösungsidee der Phase 3 bedarf der bewussten, systematischen, kritisch prüfenden Ausarbeitung, das geschieht in der 4. Phase, der Verifikation. Sie ist unbedingt notwendig, denn die intuitive Lösungsidee kann wieder verlöschen.

4.2 Problemlösen im Mathematikunterricht: Grundsätzliche Positionen, Begriffsbestimmung

Schülerinnen und Schülern bereitet das Lösen von Aufgaben, für die sie kein Routineverfahren kennen, Schwierigkeiten.

→ Einige (u. U. viele) Schüler finden keinen Ansatz, fühlen sich überfordert.
→ Aufgrund fehlender Strategien wissen diese Schüler dann nicht, was sie tun sollen/können.
→ Dadurch bedingter „Leerlauf" führt häufig zu Disziplinproblemen.

Nahe liegende Problemvermeidungsstrategie für Lehrer:
Ausweichen auf Standardaufgaben, bei denen die Schüler bekannte Lösungswege anwenden.

TIMSS-Videostudie:

- **89%** der Schülerarbeitszeit im deutschen MU wird mit dem Lösen von Routineaufgaben verbracht,
- **5%** mit Problemlöse- und Denkaufgaben.
- Die restlichen **6%** entfallen auf die Anwendung von mathematischen Konzepten und Sachverhalten.[2]

PISA: *„Die deutschen Schülerinnen und Schüler schneiden im internationalen Vergleich bei technischen Aufgaben relativ gut ab; ihre Schwäche liegt in der Modellierung anspruchsvoller innermathematischer Kontexte. ... hängt sicherlich mit der in früheren Studien aufgezeigten Kalkülorientierung des deutschen MU zusammen."*[3]

Begriffsbestimmung, Kategorien von Aufgaben

Probleme (bzw. allgemeiner Aufgaben) sind geistige Anforderungen an Individuen, bei denen ein

Anfangszustand	**A**	mittels einer
Transformation	**T**	in einen
Zielzustand	**Z**	zu überführen ist.

Standardaufgabe:

- **A** und **Z** klar festgelegt, **T** aus dem Gedächtnis abrufbare Routine. $(A;T;Z) \rightarrow (k;k;k)$

Problem:

- **A** und **Z** klar festgelegt, für **T** ist keine Routine abrufbar ⇒ es ist eine ***Barriere*** zu überwinden. $(A;T;Z) \rightarrow (k;u;k)$

Offenes Problem:

- **A** oder **Z** (zumeist **Z**) sind unklar formuliert oder
- für **T** bestehen mehrere Möglichkeiten.

Die Grenzen zwischen den Kategorien verlaufen *fließend*; die Einordnung *hängt vom bearbeitenden Individuum ab*.

Barrieren beim Problemlösen

- *Objektive Barrieren:* Die zum Lösen notwendigen mathematischen Inhalte sind nicht bekannt.
- *Subjektive Barrieren:* Der Bearbeiter weiß nicht, welche seiner Kenntnisse er auf welche Weise zur Lösung einsetzen soll.

Beseitigung aller Barrieren ⇒ Verwandeln des Problems in eine Routineaufgabe.

Zu hohe Barrieren ⇒ Viele Schüler finden keine Möglichkeit, die Barrieren zu überwinden.

- Barrieren nicht beseitigen aber „niedriger legen"; für (fast) alle Schüler überwindbare Barrieren an den Anfang stellen.

⇒ Das Überwinden von Barrieren lernen.

- Differenzierte Ziele mit unterschiedlich hohen Barrieren setzen.
- Unterschiedliche Wege zur Problemlösung ermöglichen.

---

[2] vgl. BAUMERT, J.; LEHMANN, R. u. a.: *TIMSS - Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich*, Leske + Budrich, Opladen 1997, S. 230.

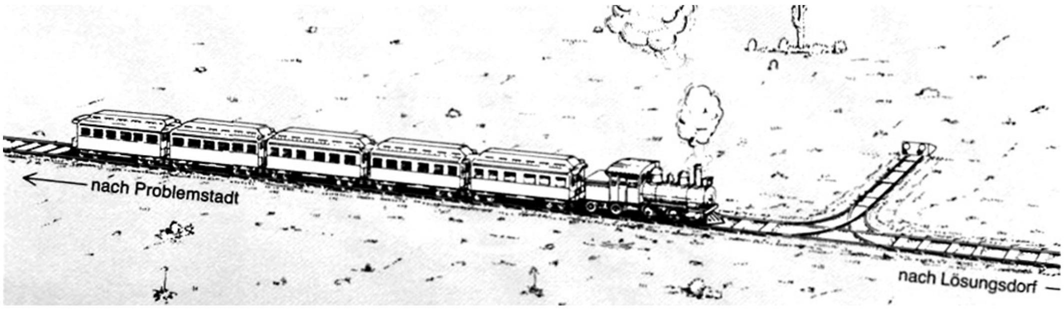
[3] vgl. Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): *PISA 2000*, Leske + Budrich, Opladen 2001, S. 178.

4.3 Einige Beispiele für Problemaufgaben[4]

Für das Fördern des Problemlösens (inbesondere, aber nicht nur in der Sekundarstufe I) gut geeignete Aufgaben haben häufig Bezüge zu den Gebieten Geometrie, Zahlentheorie, Kombinatorik und elementare Logik. Viele geeignete Aufgaben benötigen recht wenig Grundwissen und sollen vor allem die Bereitschaft zum „Knobeln" und „gedanklichen Rangieren" fördern. Die folgenden Aufgaben (die Siebtklässlern genauso gut gestellt werden können wie Erwachsenen) verdeutlichen dies gewissermaßen sinnbildlich.

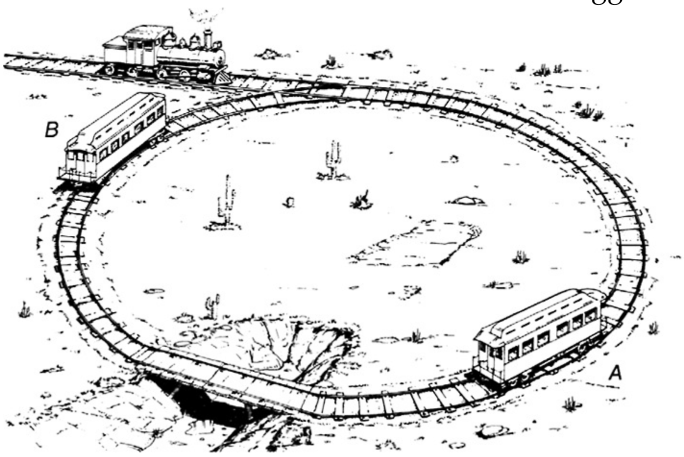
Rangieren und Sortieren

1. Ein Zug soll auf einer eingleisigen Strecke wenden. Es gibt nur ein sehr kurzes Abstellgleis, welches höchstens die Lok oder einen Wagen aufnehmen kann. Gib ein Verfahren an, mit dessen Hilfe der gesamte Zug umgedreht werden kann.



2. Auf einem Rangierbahnhof nähert sich eine Lokomotive einem kreisförmigen Gleisstück, auf dem zwei leere Waggons stehen. Zwischen ihnen befindet sich eine Brücke, die stark genug ist, einen Wagen zu tragen, nicht aber die Lok. Der Lokführer soll die beiden Waggons vertauschen.

   Gib eine Folge von Rangierschritten an, die diese Aufgabe löst. Dabei kann jeder Wagen und jede Lok an beiden Seiten an- und abgekuppelt werden; allerdings werden alle Kupplungsmanöver nur bei stehendem Zug vorgenommen, „fliegende" Rangiervorgänge sind nicht erlaubt. Die Brücke ist gerade so lang wie ein Waggon, und die Lok muss das kreisförmige Gleisstück am Schluss wieder verlassen.



Denk- und Knobelaufgaben, Logik

1. Drei rote und drei grüne Bonbons sind auf drei Schachteln verteilt, wobei jede Schachtel Bonbons enthält. Die Schachteln sind mit den Aufschriften „GG", „GR" und „RR" gekennzeichnet. Die Aufschrift stimmt jedoch in keinem Fall mit dem Inhalt der Schachtel überein.

   Mit geschlossenen Augen darf einer Schachtel ein Bonbon entnommen werden, dessen Farbe erst nach dem Schließen der Schachtel festgestellt werden darf. Aus welcher Schachtel musst du ein Bonbon entnehmen, um danach den Inhalt aller übrigen Schachteln genau angeben zu können?

2. *Rätselhafte Familie*: Ein Ehepaar hatte weniger als 10 Kinder. Es sind Jungen und Mädchen. Jedes Mädchen hat ebenso viele Schwestern wie Brüder. Jeder der Jungen hat jedoch nur halb so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele sind es genau?

3. Klaus erzählt von seiner Familie. „Ich bin älter als 10 Jahre, aber noch nicht 20 Jahre alt. Meine Mutter ist ein Jahr älter als mein Vater und 12 mal so alt wie meine Schwester. Mein Vater ist 21 Jahre älter als ich." Wie alt sind die einzelnen Familienmitglieder?

[4] Alle in diesem Abschnitt aufgeführten Aufgaben wurden mit Schülern 7. bzw. 8. Klassen erprobt.

4. Vor einem dunklen Tunnel stehen vier Leute A, B, C und D, die den Tunnel durchqueren müssen. Sie sind unterschiedlich schnell:
   - A benötigt 5 Stunden, B 4 Stunden, C 2 Stunden und D 1 Stunde.
   - Der Tunnel ist so dunkel und gefährlich, dass man ihn nur mit (eingeschalteter) Taschenlampe durchqueren kann. Die Leute haben zusammen nur eine Taschenlampe. Die Batterien reichen nur für 12 Stunden.
   - Der Tunnel ist so eng, dass stets nur maximal 2 Leute gleichzeitig den Tunnel durchqueren können.

   Wie kommen die 4 Leute durch den Tunnel?
5. Mike, Thomas, Reiko und René haben auf dem Hof Fußball gespielt und eine Fensterscheibe eingeschlagen. Als der Vorfall untersucht wurde, machten die Jungen folgende Aussagen:
   - Mike: „Das Fenster hat Thomas oder Reiko eingeschlagen.“
   - René: „Reiko hat es getan.“
   - Thomas: „Ich habe das Fenster nicht eingeschlagen.“
   - Reiko: „Ich auch nicht.“

   Ihr Lehrer, der die Jungen gut kannte, sagte: „Drei von ihnen sprechen immer die Wahrheit.“

   Wer hat das Fenster eingeschlagen?

Aufgaben zur Kombinatorik

1. Anna, Barbara, Cecilie, Doris und Erika machen auf dem Sportplatz ein Wettrennen. Es stehen 5 Bahnen nebeneinander zur Verfügung.
   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 5 Mädchen auf die Laufbahnen zu verteilen?
   b) Barbara und Erika sind Freundinnen und wollen unbedingt nebeneinander laufen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn der Wunsch von den beiden berücksichtigt wird?
2. Aus der Buchstabenmenge `{p,r,o,d,u,k,t}` sollen nur Wörter (auch sinnlose) mit 4 Buchstaben gebildet werden. Wie hoch ist die Anzahl der möglichen Wortbildungen, wenn
   a) Kein Buchstabe wiederholt werden darf?
   b) Wiederholungen erlaubt sind?
   c) Ein Wort aus 2 Konsonanten und 2 Vokalen der gegebenen Buchstabenmenge bestehen soll und Wiederholungen nicht erlaubt sind?
3. Aus den 30 Schülerinnen und Schülern einer Klasse sollen 5 ausgewählt werden, die den nächsten Ausflug vorbereiten sollen. Wie viele Möglichkeiten für die Zusammensetzung der Vorbereitungsgruppe gibt es?

Aufgaben zur elementaren Zahlentheorie

1. Bei der vierstelligen Geheimnummer der Scheckkarte von Herrn Müller stimmen die erste und die vierte Ziffer überein. Ebenfalls sind die beiden mittleren Ziffern gleich. Die Zahl, die aus den beiden letzten Ziffern gebildet wird, ist um 2 größer als die Quersumme der Geheimzahl. Begründe, dass es nur eine Geheimnummer mit diesen Eigenschaften geben kann und bestimme sie.
2. Ein Spieler zählte eine Summe gewonnener Dukaten durch, die weniger als 400 beträgt. Zählt er sie zu Zweien, Dreien, Fünfen und Sieben, so bleibt allemal einer; zählt er sie aber zu Zwölfen, so bleiben sieben übrig. Wie viele Dukaten hat er gewonnen?
3. Ermittle alle Zahlen, mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Die Zahl ist dreistellig und enthält drei verschiedene Ziffern, die alle Primzahlen sind,
   (a) Die Zahl ist durch jede der von ihren Ziffern bezeichneten Zahlen teilbar.
4. Auf wie viele Nullen endet das Produkt $126! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 125 \cdot 126$?
5. Wird eine zweistellige Zahl durch ihre Einerziffer geteilt, ergibt sich 6 Rest 5, bei Division durch ihre Zehnerziffer 11 Rest 3.
   Finde eine Zahl mit diesen Eigenschaften. Warum gibt es wirklich nur eine solche Zahl?

6. Beweise folgenden Satz:
   Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch drei teilbar sind, ist stets durch drei teilbar.
7. Was kannst Du über das Produkt von vier natürlichen Zahlen herausfinden, wenn ihre Summe ungerade ist. Probiere mehrere Beispiele und finde eine Vermutung.

Zahlenrätsel

1. Welcher Buchstabe steht für welche Ziffer?

```
     SEND
+    MORE
  -------
    MONEY
```

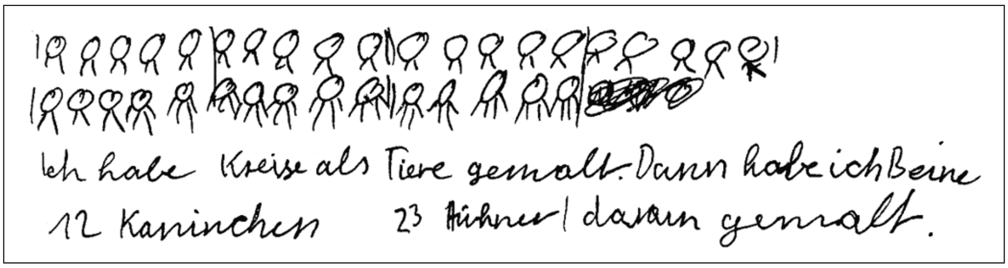
4.4 Lösen mathematischer Probleme durch Grundschüler: Beispiele

Die folgenden Beispiele wurden von Prof. M. GRASSMANN auf der Grundlage ihrer Arbeit im Projekt „Mathetreff“[5] an der WWU Münster mit Schülern 4. Klassen veröffentlicht.

Lineare Gleichungssysteme – Hühner und Kaninchen

In einem Stall sind Kaninchen und Hühner. Die Tiere haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner sind es?

Rene:

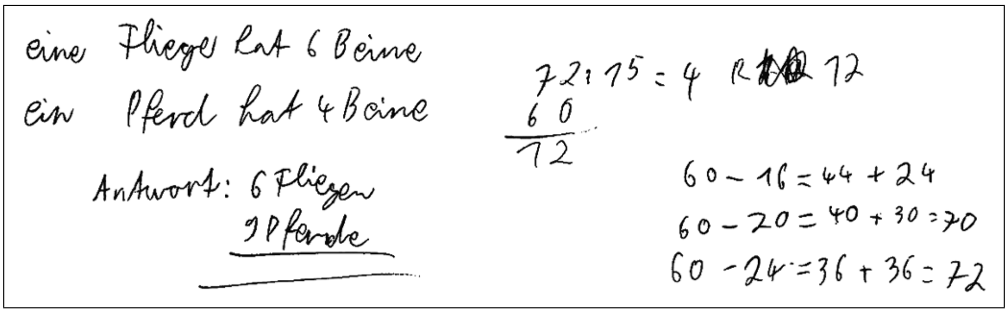


- Rene hat den Zusammenhang zwischen den gegebenen Zahlen gut erkannt, die 35 Tiere dargestellt, jedem Tier zunächst 2 Beine gegeben (mindestens so viele muss jedes Tier haben) und dann die restlichen Beine in Zweiergruppen verteilt und die Lösung erhalten.

Pferde und Fliegen

An einem Wintertag werden in einem Stall 15 Tiere gezählt. Es sind Pferde und Fliegen. Zusammen haben sie 72 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?

Tim:



- Tim hat zunächst ausgerechnet, wie viele Beine jedes der 15 Tiere im Durchschnitt hat, es sind 4 und es bleibt ein Rest von 12 Beinen.
- Wenn es nur Pferde wären, hätte er 60 Beine.
- Nun verkleinert er die Anzahl der Pferdebeine und betrachtet systematisch, wie viele Fliegenbeine hinzukommen müssen, damit es 15 Tiere sind. Zunächst 4 Pferde weniger, dann müssten es 4 Fliegen sein, das ergibt 24 Fliegenbeine, insgesamt zu wenig, in zwei weiteren Schritten hat er dann die richtige Lösung gefunden.

[5] Den „Mathetreff“ (eine Einrichtung zur Förderung mathematisch talentierter Dritt- und Viertklässler) führt Frau Prof. GRASSMANN mittlerweile an der Humboldt-Universität zu Berlin weiter. Zur Förderung mathematisch talentierter Grundschulkinder siehe auch das eingangs empfohlene Buch von M. GRASSMANN und A. HEINZE.

Jon:

40 P 36 P 9 P
30 F 36 F 6 F
70 72 B 15 B

Ich habe erst 40 P.B. und 3F.B. das ergibt 70 Bei ~~deswegen~~ deswegen habe ich gedacht es müssen mehr F.B. sein. Dann bin ich auf ~~15 Beine~~ 9 P. und 6 F gekom dass war dann richtig.

- Variablen für Fliegen- und Pferdebeine sowie für Fliegen und Pferde
- nahe liegende Zerlegung der 70 als Ausgangspunkt (40 ist durch 4 und 30 durch 6 teilbar)
- es wären, wie die Aufgabenstellung verlangt, 15 Tiere
- Jon erkennt sehr schnell Beziehungen zwischen den gegebenen Zahlen und nutzt diese, um einen Ausgangspunkt für die Lösungsfindung zu haben.
- Da er bei seiner Lösung zu wenige Beine hat, schlussfolgert er, dass es mehr (als 5) Fliegen sein müssen und erhält im nächsten Schritt die korrekte Lösung.

Lineare diophantische Gleichungen – Katzen und Enten

Auf einem Bauernhof leben Katzen und Enten. Max hat 36 Beine gezählt. Wie viele Katzen und wie viele Enten können es sein?

Hier müssen die Kinder erkennen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt und überlegen, wie man alle Lösungen finden kann.

Phil:

~~10K~~ 0E
9K 0E
8K 2E
7K 4E
6K 6E
5K 8E
4K 10E
3K 12E
2K 14E
1K 16E
0K 18E

Wie hast du dem Bauern geholfen?

36 : 4 = 9 wenn nur Katzen da sind und dann habe ich runter gerechnet.

Leo:

„Eine Katze kann immer durch zwei Enten ersetzt werden."

Die Enten müssen immer gerade Zahlen bilden, weil 2 Enten 1 Katze sind. Wenn die Entenzahl ungerade ist, ergibt es keine volle Katze.

Pferde und Fliegen (II)

Der Bauer hat in seinem Pferdestall Pferde und Fliegen. Er hat 48 Beine gezählt. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen können es sein?

- Ausgangspunkt: nur Fliegen (48:6)
- Verringerung der Fliegenzahl
- erkannt: nur gerade Anzahlen von Fliegen kommen in Frage, denn nun konnte man immer nur 2 Fliegen durch 3 Pferde ersetzen

8 F 0 P
~~7 F 2½ P~~
6 F 3 P
~~5 F 6 P~~
4 F 8 P
~~3 F 10 P~~
2 F 9 P
~~1 F 14~~

nur gerade anzahl von Fliegen möglich.

4.5 Voraussetzungen und Fragen zum Problemlösen (nach Polya)

- Die Schüler sollen *maximal aktiviert* sein, also so viel wie möglich selbst tun.
- Die Schüler sollen *maximal motiviert* sein.
- Beachtung der *Phasenfolge* beim Lösen von Nichtroutine-Aufgaben.

Fragen zum Problemlösen (POLYA: *Schule des Denkens*, innerer Buchumschlag)

1. Verstehen der Aufgabe

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

2. Ausdenken eines Planes

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
- *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
- *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdet Du irgend ein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
- Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
- Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine spezielle Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingungen bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
- Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

3. Ausführen des Planes

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist?

4. Rückschau

- Kannst du das *Resultat kontrollieren*? Kannst du den Beweis kontrollieren?
- Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weisen ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
- Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

POLYA beschreibt die Anwendung dieser Fragen in seinem (sehr empfehlenswerten) Buch *Schule des Denkens* ausführlich anhand des Problems, die Länge der Raumdiagonalen in einem Quader zu bestimmen.

Die Phasen des Problemlösens sind kein starres Schema, jedoch geben sie Ansatzpunkte dafür, aus welchen Teilkompetenzen sich Problemlösekompetenzen zusammensetzen und wie man diese im Unterricht vermitteln und fördern kann.

4.6 Kognitive Strukturen als Voraussetzung für das Problemlösen

Kognitive Strukturen sind eine Voraussetzung für das Problemlösen. Sie bestehen aus zwei Teilen, der *epistemischen* und der *heuristischen Struktur.*

Epistemische Struktur (episteme=Wissen)

Eine Epistemische Struktur kann man sich vorstellen als ein unregelmäßiges dreidimensionales Netz, dessen Knotenpunkte *Begriffe* und dessen Verbindungen *Relationen* zwischen diesen sind (z. B. Teil-Ganzes-Relation (umgangssprachlich: „besteht aus", „hat").

Heuristische Struktur (Heurismen = „Findeverfahren")

Die Heuristische Struktur besteht aus der Gesamtheit aller Heurismen. Ein *Heurismus* ist eine Struktur, die innerhalb eines Problemlöseprozesses die einzelnen Operatoren organisiert und kontrolliert. Ist die epistemische Struktur (wie oben beschrieben) ein Netz, kann man sich einen Heurismus vorstellen, als einen Kraken, der die einzelnen Knoten neu ordnet (z. B. können Verbindungen getrennt und andere gebildet werden).

Beispiel: Automechaniker

Die *epistemische Struktur* eines Automechanikers umfasst sein gesammeltes Wissen über Autoreparaturen. Die epistemische Struktur ermöglicht es ihm, „reproduktiv" Aufgaben zu lösen, d. h. er kennt schon die Arbeitsschritte zur Erledigung der Aufgabe und muss sie nur noch ausführen. Oft reicht dem Automechaniker die epistemische Struktur, um seine Arbeit zu erledigen.

Steht der Automechaniker aber vor einem Problem, d. h. er kennt die nötigen Arbeitsschritte (den Handlungsplan) nicht, so benötigt er die *heuristische Struktur*.

Die heuristische Struktur ist also gewissermaßen ein System von Metaoperationen, um einen Handlungsplan, der wiederum aus Operationen besteht, zu konstruieren.

4.7 Heuristische Strategien

heurískein (griech.): finden, entdecken

Heuristik:

- Lehre oder Wissenschaft von den Verfahren, Probleme zu lösen (Duden);
- Lehre von den Methoden und Regeln der Entdeckung und Erfindung. (Polya);
- Lehre von den Verfahren, wahre Aussagen zu finden (Schulbuch Fokus 8).

Teilweise werden heuristische Strategien in der Literatur auch als „heuristische Prinzipien" oder einfach nur als „Heurismen" bezeichnet. Es findet sich eine Reihe von „Katalogen" heuristischer Strategien. Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über eine Vielzahl heuristischer Strategien gegeben und danach erfolgt eine nähere Betrachtung einiger Klassen von Heurismen anhand von Beispielen. Beispiele aus der Geometrie werden dabei weitgehend ausgeklammert, da diese – sowie bereichsspezifische Strategien zum Lösen geometrischer Probleme – in der Vorlesung „Didaktik der Elementargeometrie" behandelt werden.

Überblick über heuristische Strategien[6]

1. Rückwärtsarbeiten
2. Finde ein Muster
3. Nimm einen anderen Standpunkt ein
4. Löse ein einfacheres analoges Problem
5. Betrachte Extremfälle
6. Versuche eine Visualisierung
7. Intelligentes Vermuten und Überprüfen
8. Finde notwendige und hinreichende Bedingungen
9. Versuche eine Folge aufzustellen
10. Spezialisiere ohne Verlust an Allgemeinheit
11. Systematische und vollständige Fallunterscheidung
12. Nutze einen Computer
13. Versuche eine Folgerung
14. Organisiere die Daten
15. Suche eine Näherungslösung
16. Bestimme charakteristische Eigenschaften der Objekte
17. Spezialisiere
18. Verallgemeinere

[6]nach Posamentier, A.; Schulz, W. (Hrsg.): *The Art of Problem Solving*. Thousand Oaks (California): Corwin Press, 1996, S. VIII.

4.7.1 Heurismen der Variation der Darstellung[7]

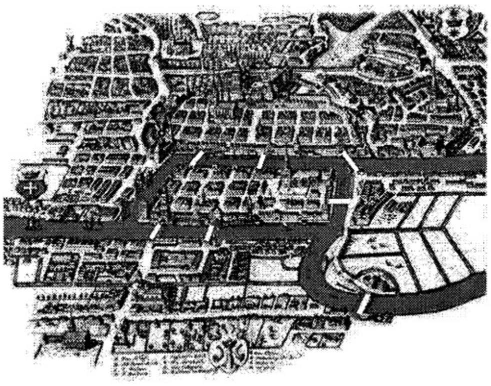
Systemwechsel zwischen Umgangssprache und formaler Sprache mit ikonischen Elementen

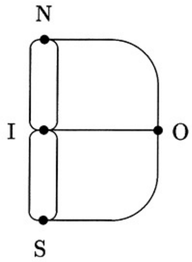
Sowohl zwischen Repräsentationsformen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) als auch zwischen sprachlichen Formulierungen können beim Lösen von Problemen Wechsel hilfreich sein.

Beispiel: Königsberger-Brücken-Problem (Euler, 1736)

Unten ist ein Stadtplan von Königsberg zu Beginn des 18. Jahrhunderts abgebildet. Die beiden Arme des Flusses Pregel, über den insgesamt sieben Brücken[8] führen, umfließen eine Insel (den „Kneiphof“). Ist es möglich, einen Rundgang durch das damalige Königsberg zu machen und dabei jede Brücke genau einmal zu benutzen?

Die Reduzierung des Stadtplans auf das für die gestellte Frage Wesentliche enthält in der Sprache der Graphentheorie nur noch Ecken (die Stadtgebiete Süden (S), Insel (I), Norden (N) und Osten (O) von Königsberg) und Kanten (jede der sieben Brücken zwischen je zwei Stadtgebieten wird als Kante eingezeichnet, welche die betreffenden Ecken verbindet) eines Graphen.





In der Sprache der Graphentheorie besteht das Problem darin, zu entscheiden, ob der zusammenhängende Graph in der Abbildung unikursal ist. Für denjenigen, der über entsprechendes deklaratives Wissen aus dem Bereich der Graphentheorie verfügt, ist das Problem allein durch die Übersetzung in einen anderen Gegenstandsbereich jetzt gelöst: Der Graph ist nicht unikursal, weil die Anzahl seiner Ecken ungerader Ordnung weder 0 noch 2 ist. Also gibt es keinen Rundgang der gesuchten Art durch Königsberg.[9]

Ohne hinreichendes Wissen über die Existenz von Euler-Wegen durch zusammenhängende Graphen ist das Problem noch nicht gelöst, aber die erste Phase des POLYAschen Problemlöseprozesses (Vertrautwerden mit der Aufgabe und Erarbeiten eines besseren Verständnisses) ist abgeschlossen.

Beispiel: Who-is-who der Haustiere

Eine Familie lebt mit ihren Haustieren Strolch, Tiger, Carlo und Maxi unter einem Dach, in friedlicher Gemeinschaft von Mensch, Hund, Katze, Hamster und Papagei. Maxi ist kleiner als Tiger, der seinerseits größer ist als der Hund. Carlo ist älter als der Hamster, der sich mit dem Papagei besser versteht als mit Maxi. Erstaunlicherweise haben der Hamster und der Papagei keine Angst vor Tiger. Man finde die Namen der einzelnen Tiere heraus.

Gesucht ist hier die Abbildung f von der Menge A = {Hund, Katze, Hamster, Papagei} der Haustiere in die Menge B = {Strolch, Tiger, Carlo, Maxi} ihrer Namen. Diese Abbildung ist eine Teilmenge von $A \times B$.

Repräsentiert man die Elemente von $A \times B$ durch die Felder einer Tabelle, in der die Elemente von A als Zeilenkoordinaten und die Elemente von B als Spaltenkoordinaten fungieren, dann kann man die im Aufgabentext enthaltenen Informationen übersichtlich dadurch darstellen, dass man in ein textlich erfasstes Feld der Tabelle ein „–“ einträgt, wenn das zugehörige Element von $A \times B$ nicht zu f gehört, und ansonsten ein „+“ notiert.

	Strolch	Tiger	Maxi	Carlo
Katze				
Hund		–		
Papagei		–	–	
Hamster		–	–	–

[7]Die Klassifikation der Heurismen wurde entnommen aus: SCHWARZ, H.: *Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik.* Münster: WTM, 2006.

[8]Im Gegenuhrzeigersinn sind dies von links unten die Grüne Drücke, die Köttel-Brücke, die Hohe Brücke, die Honig-Brücke, die Holz-Brücke, die Schmiede-Brücke und die Krämer-Brücke.

[9]vgl. SCHEID, H.: Elemente der Geometrie. Heidelberg: Spektrum, 2007 (4. Aufl.), S. 228.

Heurismen der Variation der Darstellung können auch die Zurückführung algebraischer auf geometrische Probleme (oder umgekehrt) sowie in vielen Fällen die Formulierung mathematischer Probleme in der Sprache der linearen Algebra sein. Es sind also in dieser Kategorie noch folgende Strategien hervorzuheben:

- Systemwechsel zwischen Geometrie und Algebra,
- Systemwechsel zwischen diversen mathematischen Disziplinen und Linearer Algebra.

4.7.2 Heurismen der Variation der Problemstellung

Umformulierung und Analogiebildung

Variationen der Problemstellung und die Betrachtung analoger Probleme haben eine herausragende Bedeutung beim Problemlösen. Viele der „POLYA-Fragen" (vgl. Abschnitt 4.5) zielen darauf ab:

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
- Kennst Du eine verwandte Aufgabe?
- Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken?

Als Beispiel für die Bedeutung des Heranziehens analoger Probleme sei ein in der Vorlesung schon erwähntes Beispiel genannt:

- *Aufzüge*: Ein Aufzug fährt vom Erdgeschoss aus die Etagen 1-20 an. In ihm befinden sich 20 voneinander unabhängige Personen, die den Aufzug mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auf einer der Etagen verlassen. (Neue Personen steigen während der Fahrt nicht zu.) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Etagen, auf denen der Aufzug hält?
- *Entenjagd*: Zehn Jäger, lauter perfekte Schützen (d. h. jedes anvisierte Ziel wird auch getroffen), lauern vor einem Fels auf Enten. Bald landen auf dem Fels 10 Enten. Die Jäger können nur einmal schießen und sie können nicht ausmachen, wer auf welche Ente schießt. Daher schießen sie gleichzeitig, aber jeder wählt sein Opfer zufällig aus. Wie viele Enten überleben im Durchschnitt, wenn dieses Experiment oft wiederholt wird?

Weitere Heurismen der Variation der Problemstellung sind u. a.:

- Variation der Wahrnehmung durch Reorganisation
- Invarianzprinzip und Symmetrieprinzip
- Generalisierung, Spezialisierung, Extremalprinzip (Betrachtung extremer Fälle).

Beispiel (zum Invarianzprinzip): *Wir betrachten ein gewöhnliches Schachbrett. Eine Änderung nennen wir gültig, falls alle Felder einer Zeile (oder auch Spalte) ihre Farbe wechseln. Kann man in einer beliebigen Folge von gültigen Änderungen erreichen, dass ein einziges schwarzes Feld übrig bleibt?*

Lösung: Wir betrachten, wie sich eine Zeile oder Spalte bei einer gültigen Änderung verhält. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei es eine Zeile.) In einer Zeile gibt es genau s schwarze Felder und dementsprechend $8-s$ weiße Felder. Falls eine gültige Änderung durchgeführt wird, ändert sich die Summe S aller schwarzen Felder um $+8-s-s = +8-2s$, also um eine gerade Anzahl. Am Anfang ist $S = 32$. Durch eine beliebige Folge von Schritten wird sich also nie der Zustand $s = 1$ ergeben. Man betrachtet also, welcher Wert bei einer Änderung gleich, d. h. *invariant* bleibt. In unserem Beispiel wäre dies die Summe $S(\text{mod}2)$. Da die Schlusssituation einen anderen Wert aufweist, kann sie nicht erreicht werden.

4.7.3 Heurismen der Induktion

Schlüsse vom Speziellen (bzw. von einer Reihe von Einzelfällen) zum Allgemeinen zählen zu den wichtigsten Methoden der Erkenntnisgewinnung. Dabei wird es nicht immer gelingen, die so gewonnenen Erkenntnisse auch zu sichern, es wird daher von **Heurismen der unvollendeten Induktion**[10] gesprochen (im Gegensatz zur vollendeten Induktion bzw. vollständigen Induktion).

[10] inductio (lat.): das Hineinführen

„Die Mathematik wird als demonstrative Wissenschaft angesehen. Doch ist das nur einer ihrer Aspekte. Die fertige Mathematik, in fertiger Form dargestellt, erscheint als rein demonstrativ. Sie besteht nur aus Beweisen. Aber die im Entstehen begriffene Mathematik gleicht jeder anderen Art menschlichen Wissens, das im Entstehen ist. Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist; man muß die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Details ausführt. Man muß Beobachtungen kombinieren und Analogien verfolgen; man muß immer und immer wieder probieren. Das Resultat der schöpferischen Tätigkeit des Mathematikers ist demonstratives Schließen, ist ein Beweis; aber entdeckt wird der Beweis durch plausibles Schließen, durch Erraten. Wenn das Erlernen der Mathematik einigermaßen ihre Erfindung widerspiegeln soll, so muß es einen Platz für Erraten, für plausibles Schließen haben.“ POLYA, 1962[11]

Beim induktiven Schließen wird von Einzelfällen auf das Allgemeine, auf Gesetzmäßigkeiten, geschlossen. Zu Heurismen der unvollendeten Induktion gehören

- Systematisches Probieren und Suche nach Mustern,
- Vorwärtsarbeiten,
- Lokale und globale Approximation.

Vor allem (systematisches) Probieren und die Suche nach Mustern und Gesetzmäßigkeiten bzw. das Aufstellen von Folgen gehören zu den Vorgehensweisen, die bei der Lösung sehr vieler Probleme eine Rolle spielen. Diese Strategien sind oft auch eng verwandt mit Variationen der Problemstellung (Generalisierung, Spezialisierung). Man denke in diesem Zusammenhang zum Beispiel an die Aufgabe: *Man bestimme die Summe der Zahlen Eins bis eine Million*.

Mitunter können nahe liegende unvollendete induktive Schlüsse allerdings auch zu Fehlvermutungen führen. So geht aus den rechts abgebildeten Überlegungen (die auch als „Beobachtungen“ bezeichnet werden können, welche übrigens ein chinesischer Gelehrter bereits vor ca. 2500 Jahren angestellt hat) hervor:

(1) Jede Primzahl p von 2 bis 11 hat die Eigenschaft $p \mid 2^p - 2$.

(2) Für jede zusammengesetzte Zahl z zwischen 2 und 11 gilt: $z \nmid 2^z - 2$.

2	$\mid$	2^2-2			
3	$\mid$	2^3-2			
			4	$\nmid$	2^4-2
5	$\mid$	2^5-2			
			6	$\nmid$	2^6-2
7	$\mid$	2^7-2			
			8	$\nmid$	2^8-2
			9	$\nmid$	2^9-2
			10	$\nmid$	$2^{10}-2$
11	$\mid$	$2^{11}-2$			

Weitere Versuche ergeben, dass diese Eigenschaften noch für weit mehr Zahlen zutreffen, was folgende Vermutungen nahe legt:[12]

(1) Jede Primzahl p hat die Eigenschaft $p \mid 2^p - 2$.

(2) Für jede zusammengesetzte Zahl z gilt: $z \nmid 2^z - 2$.

Der erste Teil dieser Vermutung ist tatsächlich wahr; nach dem „kleinen Satz von FERMAT“ gilt $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ für beliebige Primzahlen p und ganze Zahlen a (die keine Vielfachen von p sind), also speziell $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$ und somit $p \mid 2^{p-1} - 1$, woraus $p \mid 2^p - 2$ folgt.

Teil (2) der Vermutung ist allerdings falsch, obwohl es durch systematisches Probieren recht schwierig wäre, dies anhand eines Gegenbeispiels herauszufinden. Betrachtet man die zusammengesetzte Zahl $z = 341 = 11 \cdot 31$, so gilt $2^{10} \equiv 1 \mod 11$, $2^{10} \equiv 1 \mod 31 \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \mod 341$ und daher $2^{341} = 2 \cdot \left(2^{10}\right)^{34} \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \mod 341$. Somit gilt also: $341 \mid 2^{341} - 2$, was im Widerspruch zu der Vermutung (2) steht. Unterhalb von $n = 2000$ gibt es neben $n = 342$ nur sechs weitere zusammengesetzte Zahlen z mit der Eigenschaft $z \mid 2^z - 2$.

4.7.4 Heurismen der Reduktion

Einige der Heurismen der Reduktion beziehen sich auf das Lösen recht spezieller Probleme – so ist der Heurismus „**La Descente Infinie – der unendliche Abstieg**“ sehr gut für Inkommensurabilitätsbeweise geeignet (siehe z. B. SCHWARZ, H.: *Heuristische Strategien des Problemlösens*, S. 200ff.).

[11] POLYA, G.: *Mathematik und plausibles Schließen*. Bd. 1. Basel: Birkhäuser, 1962, S. 10.

[12] Auch GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ hielt diese Vermutungen um 1680 für plausibel.

Eine zentrale Strategie ist die der **Modularisierung**: Probleme werden in Teilprobleme zerlegt bzw. bereits vorhandene „Module“ werden genutzt, um komplexere Probleme zu lösen. Diese Strategie kommt z. B. in der Informatik, aber auch bei geometrischen Konstruktionen zur Anwendung; hier werden komplexe Konstruktionen aus Standardkonstruktionen zusammengesetzt (siehe hierzu die Vorlesung „Didaktik der Elementargeometrie“).

Rückwärtsarbeiten

„Wir wollen ausgehen von dem, was gefordert wird, und das, was gesucht ist, als bereits gefunden annehmen“(POLYA). Nachdem das zu erlangende Endergebnis ins Auge gefasst wurde, muss nun versucht werden, abzuleiten, von welchem Vorangehenden das gewünschte Ergebnis abgeleitet werden könnte. Daran schließt sich eine schrittweise Untersuchung an, was das Vorangehende von jenem Vorangehenden sein könnte, bis man letztendlich den bekannten Anfangszustand des Problems erreicht. Auf diese Art und Weise wurde die richtige Folge von Operationen, jedoch in „rückwärts schreitender“ Reihenfolge entdeckt.

Beispiel 1:
Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt die Hälfte seiner Äpfel und noch einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur noch ein Apfel. Wie viele Äpfel hatte er am Anfang?

Beispiel 2:
Wie kann man einem genügend großen Wasservorrat genau 6 Liter Wasser entnehmen, wenn dazu nur zwei Gefäße zur Verfügung stehen, und zwar eines mit einem Fassungsvermögen von 9 Litern und eines mit einem Fassungsvermögen von 4 Litern?[13]

Probleme bei denen sich die Anwendung der Strategie des Rückwärtsarbeitens als günstig erweisen kann, sind folgendermaßen charakterisiert:

- Der zu erreichende Zielzustand (das Endergebnis) ist eindeutig definiert.
- Es gibt eine Vielzahl an möglichen Anfangszuständen und es ist nicht eindeutig definiert, welcher der richtige ist.
- Die Regeln, um von der anfänglichen Bedingung zur Voraussetzung des Problems zu gelangen, sind bekannt.

4.8 Vermittlung heuristischer Vorgehensweisen

- Lehren *durch* Problemlösen: Heuristiken bleiben implizit.
- Lehren *über* Problemlösen: Reflexion über Heuristiken.

→ Schülern jeweils das Vorgehen *bewusst* machen, es handelt sich nicht nur um „Tricks“ – nach der Lösung das Vorgehen auf einer Metaebene rekapitulieren.

Der auf der folgenden Seite wiedergegebene Auszug aus dem Schulbuch Fokus 8 verdeutlicht einen Versuch, Schüler an den bewussten Gebrauch heuristischer Strategien heranzuführen.

Entwicklung von Problemlösekompetenzen:

- Ausgewählte Vorgehensweise vormachen (Gewöhnungseffekt).
- Zielgerichtete Einführung der Vorgehensweise anhand eines markanten Beispiels (Wiedererkennungseffekt).
- Einüben anhand weniger auffälliger Beispiele (Sicherheit).
- Freigestellte Anwendung an gemischten Aufgaben.
- LEUDERS: Sammlung von Strategiekärtchen in einem Strategiebaukasten.
- POLYA: Fragenkatalog (inhaltsunabhängig) entsprechend der Problemlösephasen, als Anregung für den Lehrer, dem Schüler Impulse zu geben (siehe Abschnitt 4.5).
- Auch das Scheitern üben.

[13] vgl. SCHWARZ, H.: *Heuristische Strategien des Problemlösens.* Münster: WTM, 2006, S. 211ff.

Mathematik und Methode (Heuristik)

Es wird dir schon häufiger bewusst geworden sein, dass es zweierlei Dinge sind, einen aufgeschriebene Argumentation und Begründung (einen Beweis) nachzuvollziehen oder einen Beweis selbstständig zu finden und zu formulieren. Um einen mathematischen Beweis formulieren zu können, muss du erst einmal eine Beweis*idee* haben. Deshalb ist das Beweisen in der Regel eine schwierigere Tätigkeit als das Rechnen nach einem bestimmten Verfahren bzw. einem Algorithmus.

Die wichtigere Frage, die du dir sicher schon häufiger gestellt hast, lautet daher: Wie findet man eigentlich einen Beweis bzw. wie kommt man auf die Beweisidee?

Die gute Nachricht lautet:
Auch für das Finden von Beweisideen bzw. für das Lösen von Problemen gibt es **Regeln**, so genannte **heuristische Regeln**.

Wenn man diese Regeln kennt und sie konsequent befolgt, kann man oft dem Ziel ein ganzes Stück näher kommen.

Die „Kieselstein"-Geschichte zeigt, dass auch in einer scheinbar aussichtslosen Problemsituation durch eine einfache Idee die Lösung geliefert wird.

Heuristische Regeln:

(1) Analysiere das Problem genau!

Worum geht es? Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Welche Beziehung besteht zwischen den unbekannten Größen und den gegebenen?

(2) Versuche, das Problem zu veranschaulichen!

Gibt es eine grafische bzw. bildliche Darstellung für das Problem? Kannst du Beispiele bilden?

(3) Suche nach Analogien zu anderen Problemen!

Ist dir ein ähnliches Problem bekannt?

Kannst du dessen Lösung auf das neue Problem übertragen?

(4) Suche nach Teillösungen!

Kannst du das Problem schrittweise verfeinern?

(5) Begründe jeden deiner Schlüsse genau!

Gib nicht gleich auf; lass deine Gedanken auch mal schweifen!

(6) Versuche einen ganz anderen Ansatz!

Gibt es Aspekte, die noch nicht berücksichtigt sind?

Gibt es andere "Blickwinkel"?

Kieselstein-Geschichte

Ein Kaufmann hat bei einem Geldverleiher hohe Schulden. Inzwischen ist die Schuldenlast so groß geworden, dass der Geldverleiher den Schuldner dafür ins Gefängnis bringen könnte. Da ihm die Tochter des Kaufmannes aber so sehr gefällt, dass er sie zur Frau nehmen möchte, will er die Schulden erlassen, wenn die Tochter in die Heirat einwilligt. Doch die Tochter mag ihn nicht und lehnt ab. Darauf bietet der Geldverleiher an, das Schicksal entscheiden zu lassen.

Da sie sich gerade alle auf dem Kiesweg vor der Kirche befinden, schlägt er vor, in jede Hand einen Kieselstein zu nehmen, jeweils einen weißen und einen schwarzen. Wenn die Tochter den weißen Stein zieht, sind sie und ihr Vater frei, zieht sie dagegen den schwarzen, muss sie den Geldverleiher heiraten.

Der Geldverleiher bückt sich und nimmt in jede Hand einen Kieselstein. Die Tochter beobachtet, dass er sich nicht fair verhält und zwei schwarze Kieselsteine nimmt.

Wie soll sich die Tochter verhalten? Überlege die Konsequenzen der folgenden Möglichkeiten.

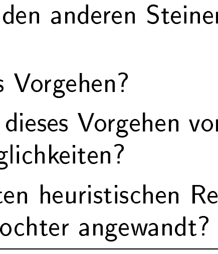
- Sie zieht einen der Kieselsteine aus der Hand des Geldverleihers.
- Sie weigert sich, einen Stein zu ziehen.
- Sie spricht aus, was sie beobachtet hat und stellt dadurch den Geldverleiher als Betrüger bloß.

Keine der bisher bedachten Verhaltensweisen stellt eine echte Lösung für die Kaufmannstochter dar.

Doch plötzlich hat sie eine Idee: Sie zieht einen der beiden Steine aus der Hand des Geldverleihers und lässt ihn „aus Versehen" auf den Kiesweg fallen, wo er sich unwiederbringlich unter den anderen Steinen verliert.

- Welche Folgen hat dieses Vorgehen?
- Worin unterscheidet sich dieses Vorgehen von den oben genannten Möglichkeiten?
- Welche der unten notierten heuristischen Regeln hat die Kaufmannstochter angewandt?

Du kennst wahrscheinlich bereits aus dem 5. Schuljahr die Geschichte vom jungen Carl Friedrich Gauß, der seinen Lehrer verblüffte, weil er die Zahlen von 1 bis 100 schnell im Kopf addiert hatte.
Zeige, wie aus seinem Ansatz heraus begründet werden kann, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ist. Welche heuristische Regel kommt hier zur Anwendung?



Begründe dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ist unter Verwendung der nebenstehenden Figur. Welche heuristische Regel kommt hier zur Anwendung?

Natürlich gibt es auch mit den heuristischen Regeln keine Garantie für das Erreichen der Problemlösung. So ist bis heute die sog. *Goldbachsche Vermutung* immer noch unbewiesen:

Jede gerade positive Zahl ab der 6 lässt sich in die Summe von zwei Primzahlen zerlegen.
– Beispiele: $12 = 5 + 7$, $32 = 13 + 19$
– Weise die Richtigkeit der Vermutung für weitere 10 Zahlen nach.

Auszug aus dem Schulbuch Schulbuch Fokus 8 (Gymnasium, Ausgabe für Nordrhein-Westfalen, Cornelsen 2008)

4.9 Weitere Ansatzpunkte zur Förderung der Kreativität im MU

4.9.1 Unterrichtsbedingungen zur Entwicklung der Denkfähigkeit

nach WITTMANN, E. CH.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg, 1981, S. 101f.

1. Erwerb des Wissens durch entdeckendes Lernen
2. Die Schüler zum divergenten Denken ermutigen
   - Entspannte Atmosphäre
   - Selbstvertrauen und Mut zum Risiko aufbauen
   - Interesse an nicht-konformen Ideen zeigen
   - Konstruktiver Umgang mit Schülerfehlern
3. Automatisierte Gedankenabläufe stören, scheinbare Paradoxien vorlegen

   Beispiel: Ein Würfel hat 6 Seiten, an jeder Seitenfläche 4 Kanten,
   also 6 mal 4 Kanten = 24 Kanten
4. Offene und herausfordernde Probleme stellen
   - Problem ist nicht explizit formuliert.
   - Gewisse Informationen müssen erst noch besorgt werden.
   - Es gibt mehrere Lösungswege.
   - Das Problem kann nicht sofort in einem Zug gelöst werden, müsste aber zu packen sein.
5. Die Schüler selbst Probleme stellen oder weiterführen lassen
6. Entwickeln einer Arbeitssprache
7. Intuitives Argumentieren und Vermuten anregen
8. Heuristische Strategien lehren
9. Ein konstruktives Verhältnis zu Fehlern aufbauen
10. Diskussion, Reflexion und Argumentation anregen

4.9.2 Vorschläge für das Trainieren von Kreativität

nach WINTER, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*, Braunschweig: Vieweg, 1991, S. 175.

1. Probleme nicht „geben", sondern aus Kontexten heraus entwickeln, die herausfordernd erscheinen, zum Fragen anreizen
2. Möglichkeiten zum freien Experimentieren, insbesondere auch sinnlicher Natur, an die Hand geben und zum Vermuten ermuntern
3. Lern-/Entdeckungshilfen genügend weit halten, weniger Ergebnisfindungshilfen als mehr Hilfen zum Selbstfinden des Ergebnisses anbieten.

   Siehe hierzu auch die Fragen, die POLYA empfiehlt („Ausdenken eines Plans").
4. für warmes Lernklima sorgen, insbesondere Zurückhaltung in der Bewertung (falsch / richtig) von Schülerbeiträgen, Abbau von Scheu vor ungewöhnlichen Vorschlägen
5. heuristische Strategien bewusst machen und allgemein über Denken, Ausdrücken, Darstellen, Sichmerken, Erinnern, Vergessen, Fehlermachen, Üben, usw. sprechen
6. inhaltliche oder „formale" Bedeutsamkeit des Themas deutlich werden lassen