

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung
Einführung in die Mathematikdidaktik, Teil 5

5 Mathematik als „Welt eigener Art“: Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik im Unterricht anhand linearer Gleichungssysteme und magischer Quadrate

5.1 Wodurch kennzeichnet sich „Mathematik als Welt eigener Art“?

Wodurch zeichnet sich die Mathematik „als Welt eigener Art“ aus, d. h. also über ihre unmittelbaren Anwendungen hinaus? Sicherlich ist „*Rechnen*“ ein Bestandteil der Mathematik, wobei damit die Beherrschung sinnvoller Rechenverfahren bzw. *Lösungskalküle*, aber auch das Verständnis ihrer „Funktionsweise“ gemeint sind. Mindestens ebenso wie durch „Rechnen“ zeichnet sich die Mathematik durch das Ziehen *deduktiver Schlüsse* aus. Ihr „Gebäude“ lässt sich auf relativ wenigen Grundbegriffen und Grundaussagen aufbauen; alle weiteren Begriffe, Aussagen, Verfahren lassen sich dann exakt definieren bzw. beweisen oder herleiten. Dabei dringt die Mathematik in immer allgemeinere und auch abstraktere Strukturen vor: von den natürlichen zu den komplexen oder zu den hyperreellen Zahlen, von der Ebene oder dem dreidimensionalen Raum zu n - oder sogar unendlich-dimensionalen Räumen und Mannigfaltigkeiten. Die Mathematik schafft und verallgemeinert also *Strukturen*. Zusammenfassend seien – sicherlich etwas gewagt hinsichtlich der Reduktion eines derart komplexen Gebildes wie der Mathematik auf wenige Stichworte¹ – drei Bereiche der Mathematik als „Welt eigener Art“ genannt:

- Kalküle / Algorithmen,
- Deduktion,
- Strukturen.

Diese Bereiche stehen natürlich in vielfältigen Beziehungen zueinander und lassen sich kaum voneinander trennen. Dennoch wird in den folgenden Überlegungen vor allem auf die Aspekte *Kalküle* und *Strukturen* eingegangen und das Ziehen deduktiver Schlüsse lediglich am Rande betrachtet.² Gerade im Mathematikunterricht und in der Erkenntnisgeschichte der Mathematik sind zudem auch „induktive“ Vorgehensweisen (vom Speziellen zum Allgemeinen, vom Konkreten zum Abstrakten) von Bedeutung – eine Vorgehensweise, die sich im Folgenden widerspiegeln wird.

Neben den Bereichen *Kalküle* und *Strukturen* und ihren Beziehungen zueinander wird in den folgenden Überlegungen der Bezug zu *Veranschaulichungen* eine zentrale Bedeutung einnehmen. Zwar lassen sich gerade abstraktere mathematische Strukturen oft nicht mehr unmittelbar „verbildlichen“, jedoch haben (teilweise nur gedanklich entstehende) Visualisierungen eine hohe Bedeutung beim Lernen von Mathematik und auch bei der Herausbildung neuer mathematischer Erkenntnisse bzw. beim Lösen mathematischer Probleme.³ Gerade bei der Herausbildung eines grundlegenden Verständnisses mathematischer Strukturen sind anschauliche Vorstellungen bedeutsam.

Algebraische Kalküle wie das Umformen von Gleichungen und das Lösen linearer Gleichungssysteme sind feste Bestandteile des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen I und II. Allzu häufig wird der Unterricht durch ein recht schematisches Abarbeiten derartiger Kalküle dominiert.

¹ Auch *Modelle*, wie z. B. Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die keine unmittelbaren Anwendungsbezüge aufweisen müssen, kennzeichnen die Mathematik. Im weiten Sinne lassen sich derartige Modelle aber auch unter „Strukturen“ subsumieren. Des Weiteren ist die Mathematik als „Welt eigener Art“ auch durch die ihr eigene *Sprache und Symbolik* gekennzeichnet; dieser Aspekt zieht sich durch alle hier genannten Bereiche und liegt gewissermaßen „quer“ dazu.

² Siehe hierzu das Kapitel „Beweisen und Argumentieren“ der Vorlesung „Didaktik der Elementargeometrie“.

³ Siehe hierzu auch das folgende Kapitel der Vorlesung zum Problemlösen.

Visualisierungen und die verstärkte Einbeziehung graphischer Lösungsverfahren können ein anschauliches Verständnis von Lösungskalkülen sowie intuitive strukturelle Vorstellungen von Lösungsmengen unterstützen. Dies soll exemplarisch am Beispiel linearer Gleichungen und vor allem Gleichungssysteme herausgearbeitet werden.⁴

5.2 Algebraische Strukturen in der Schule?

Gegenstände der Algebra und speziell der Linearen Algebra sind Lösungskalküle und (algebraische) Strukturen. Der Zusammenhang von Linearer Algebra und Analytischer Geometrie führt in natürlicher Weise zu Visualisierungsmöglichkeiten gewisser algebraischer Strukturen (insbesondere linearer und affiner Teilräume von Vektor- bzw. affinen Punkträumen niedriger Dimension). Schließlich sind als weiterer Aspekt der (linearen) Algebra in der Schule Anwendungen bzw. Modellbildungen zu nennen. In dem vorliegenden Beitrag wird vorrangig auf den Zusammenhang struktureller Überlegungen mit Visualisierungen eingegangen.

In den Sechziger und Siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts sollten algebraische Strukturen im Zuge der „Neuen Mathematik“ explizit im Mathematikunterricht behandelt werden (siehe Abb. 1). Das Scheitern dieses Vorhabens liegt mittlerweile mehrere Jahrzehnte zurück; dazu dürfte wohl wesentlich ein überfrachtetes „formales Begriffs- und Regelsystem“ (BRÜNING/SPALLEK 1978, S. 236) sowie die Arbeit mit abstrakten Objekten bzw. Strukturen beigetragen haben, für die Schüler nicht genügend viele konkret „fassbare“ Beispiele kannten und von denen sie daher keine Vorstellungen aufbauen konnten.

INHALT

A. Erklärungen	9
I. Mengen	9
II. Relationen	15
III. Der Zahlbegriff	21
IV. Strukturen	30
V. Elemente der Logik	38
B. Aufgaben und Lösungen	44
I. Mengen	45
Aufgaben	45
Lösungen	62
II. Relationen	80
Aufgaben	80
Lösungen	94
III. Zahlen und Zahlensysteme	105
Aufgaben	105
Lösungen	124
IV. Strukturen	162
Aufgaben	162
Lösungen	179
V. Elemente der Logik	224
Aufgaben	224
Lösungen	239
Literatur	257
Symbole	259

32

A. Erklärungen

Erklärung 4.2. Eine Menge G heißt eine *Gruppe*, wenn für ihre Elemente eine Verknüpfung (Zeichen: $\circ$) so definiert ist, daß die folgenden Postulate erfüllt sind:

$\mathfrak{G}_1$: Sind s und t zwei (gleiche oder verschiedene) Elemente von G , so ist auch $s \circ t$ ein Element von G .

$\mathfrak{G}_2$: Die Verknüpfung ist assoziativ: $s \circ (t \circ u) = (s \circ t) \circ u$.

$\mathfrak{G}_3$: Es gibt ein „Einselement“ e , für das $s \circ e = e \circ s = s$ gilt für alle $s \in G$.

$\mathfrak{G}_4$: Zu jedem Element $s \in G$ gibt es ein Element $s^{-1} \in G$, das der Gleichung $s^{-1} \circ s = s \circ s^{-1} = e$ genügt.

Man kann diese Erklärung auch so fassen, daß man mit drei Postulaten auskommt. Wenn man im ersten Satz eine *innere* Verknüpfung fordert, wird $\mathfrak{G}_1$ überflüssig.

Beispiele für Gruppen:

(A) Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der *positiven* rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Das Einselement ist die Zahl 1.

(B) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der *Addition* als Verknüpfung. Hier ist die Zahl 0 das „Einselement“, denn es ist ja $a + 0 = 0 + a = a$.

(C) Für die endliche Menge

$$M = \{e, a, b, c\}$$

wird eine Verknüpfung $\circ$ durch die folgende „Gruppentabelle“ definiert:

(5)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Abb. 1: Inhaltsverzeichnis und Auszug aus einem Duden-Übungsbuch für Schüler:

MESCHKOWSKI, H.; ARENDT, J.; LESSNER, G.; WURL, B.: *Aufgaben zur modernen Schulmathematik mit Lösungen I (bis 10. Schuljahr)*. Bibliographisches Institut / Dudenverlag, Mannheim, 1970.

⁴Anwendungsaspekte werden hier nur am Rande betrachtet; sie waren bereits Gegenstand von Kapitel 3 der Vorlesung. Im Folgenden stehen innermathematische Aspekte der Thematik im Mittelpunkt der Überlegungen.

Nach dem Scheitern der „Neuen Mathematik“ und dem Zurückdrängen der recht abstrakten Behandlung mathematischer Strukturen aus dem Unterricht blieben algebraische Kalküle – von den Äquivalenzumformungen für Gleichungen über mehrere Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I bis hin zum Gauß-Algorithmus in der S II – feste und oftmals allzu zentrale Bestandteile des Mathematikunterrichts, für deren sichere Beherrschung viel Unterrichtszeit aufgewendet wird. Es ergibt sich daraus die Frage, inwiefern Schülerinnen und Schüler lediglich die Ausführung von Kalkülen „trainieren“ oder ein inhaltliches Verständnis dafür erwerben. Zugleich stellt sich – sicherlich weniger bei Gleichungsumformungen, aber stärker bei den Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – die Frage nach der Legitimation. Bereits 1973 formulierte FREUDENTHAL: *„Wenn unser Unterricht heute darin besteht, dass wir Kindern Dinge beibringen, die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Maschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf.“* (FREUDENTHAL 1973, Bd. 1, S. 61)

Inzwischen sind mehr als drei Jahrzehnte vergangen und lineare Gleichungssysteme lösen Maschinen seit langem besser als Menschen. Somit kann auch die in jüngerer Zeit verstärkte Betrachtung von Praxisanwendungen algebraischer Verfahren und darauf basierender Modellbildungen keine Rechtfertigung dafür darstellen, viel Unterrichtszeit in das Ausführen von Kalkülen zu investieren. Dass Schüler ein inhaltliches Verständnis von Strukturen der Mathematik erwerben, ist hingegen als Bildungsziel auf hohem Niveau anzusehen, z. B. im Sinne der (zweiten) Grunderfahrung nach WINTER, *„mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“* (WINTER 1995, S. 37). In diesem Sinne kann Lösungsverfahren durchaus eine Bedeutung für die mathematische Allgemeinbildung zugesprochen werden, jedoch ergibt sich diese nicht in erster Linie aus ihrem „Werkzeugcharakter“, sondern mehr aus ihrem Wesen als „geistige Schöpfungen“, das sich erst erschließen kann, wenn Schüler verstehen, wie und warum derartige Verfahren zu Lösungen z. B. linearer Gleichungssysteme führen.

Ein Verständnis für Lösungsverfahren ist eng mit dem Erfassen der Strukturen von Lösungsmengen verknüpft. Da Gleichungssysteme aus mehreren Gleichungen bestehen, ist es schon hinsichtlich des Verständnisses dafür, dass Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen in den meisten Fällen eindeutig lösbar sind, notwendig, Vorstellungen von Lösungsmengen einzelner Gleichungen mit zwei Variablen zu entwickeln. In der gymnasialen Oberstufe erfolgt dann eine Erweiterung auf Gleichungen und Gleichungssysteme mit drei und ggf. mehr Variablen. In Anfängervorlesungen zur Linearen Algebra kommen weitere Verallgemeinerungen vor allem durch die Hauptsätze für homogene und inhomogene Gleichungssysteme zum Ausdruck:

- Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen vom Rang r ist ein $n - r$ -dimensionaler linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$.
- Da sich jede Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems als Summe einer (festen) speziellen Lösung sowie einer Lösung des zugehörigen homogenen Systems ergibt, ist die Lösungsmenge eines lösbaren⁵ inhomogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen vom Rang r ein $n - r$ -dimensionaler affiner Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

Natürlich kann es nach den Erfahrungen der „Neuen Mathematik“ kein Ziel sein, diese zentralen Struktureigenschaften und die zugehörigen Begriffe explizit im Unterricht zu behandeln,⁶ und auch eine prinzipielle Unterscheidung zwischen homogenen und inhomogenen Gleichungssystemen wird in der Schule nicht vorgenommen. Eine „qualitative“ Zusammenfassung der beiden genannten Sätze ließe sich daher wie folgt formulieren.

- Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in n Variablen mit r unabhängigen Gleichungen (von denen also keine „überflüssig“ ist) hat, falls das Gleichungssystem überhaupt lösbar ist, die Dimension $n - r$.

⁵ Für die Lösbarkeit eines inhomogenen Gleichungssystems enthält der Hauptsatz das Kriterium, dass diese genau dann gegeben ist, wenn die Ränge der einfachen und der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmen.

⁶ Lediglich in Spezialklassen mit mathematisch besonders talentierten Schülern ist dies denkbar; bereits für die Mehrzahl der Schüler in Mathematik-Leistungskursen haben sich allgemeine Strukturbegriffe der linearen Algebra als zu abstrakt erwiesen und wurden in den vergangenen Jahrzehnten aus den Lehrplänen entfernt.

Eine inhaltliche Vorstellung (ausgehend von einem intuitiven Dimensionsbegriff und ggf. begrenzt auf kleine Dimensionen) von den dadurch beschriebenen Strukturen der Lösungsmengen linearer Gleichungen und Gleichungssysteme erscheint essenziell, wenn deren Behandlung nicht lediglich auf das Ausführen von Lösungskalkülen beschränkt bleiben soll. Die Einbeziehung geometrischer Interpretationen und entsprechender Visualisierungen kann wesentlich dazu beitragen, dass Schüler ein intuitiv-anschauliches Verständnis algebraischer Struktureigenschaften aufbauen. Dies soll im Folgenden anhand von Beispielen aus beiden Sekundarstufen aufgezeigt werden.

5.3 Anfänge der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie in der Sekundarstufe I

Wenngleich die Fachgebiete Lineare Algebra und Analytische Geometrie explizit erst in der gymnasialen Oberstufe behandelt werden, so treten Elemente dieser Gebiete bereits im Mathematikunterricht der S I auf. Ihrer Vernetzung kommt eine wesentliche Bedeutung hinsichtlich der Ausprägung eines inhaltlichen Verständnisses für Funktionen und ihre Graphen sowie für Lösungen von Gleichungen und Gleichungssystemen zu.

Analytische Geometrie betreiben Schüler in elementarer Weise ab etwa der 5. Jahrgangsstufe. Sie lernen das Koordinatensystem kennen und konstruieren geometrische Figuren anhand vorgegebener Koordinaten von Punkten. Algebraische Aspekte sind dabei im Allgemeinen noch nicht von Bedeutung; durch die arithmetische Beschreibung von Punkten und dadurch von ganzen geometrischen Figuren wird jedoch der Grundstein für das Koordinatisieren und somit für eine wertvolle Methode zur Veranschaulichung algebraischer Sachverhalte gelegt. Eine systematische *Behandlung der Algebra* beginnt – nachdem Schüler bereits in früheren Schuljahren im Sinne einer algebraischen Propädeutik Gleichungen mit Platzhaltern gelöst haben – oft mit einem Stoffgebiet zu Variablen und Termen in der Klassenstufe 6. Meist in der Klassenstufe 7 werden dann (lineare) Gleichungen einschließlich der Äquivalenzumformungen behandelt. Teilweise in Klasse 7, häufiger in Klasse 8 erfolgen die Einführung des Funktionsbegriffs und die Behandlung linearer Funktionen.

Vorschläge, die Gleichungslehre von vornherein unter Zuhilfenahme von Funktionen und (darauf basierend) graphischen Veranschaulichungen aufzubauen, wurden u. a. von BRÜNING/SPALLEK (1978) unterbreitet. Derartige Vorschläge lassen sich nicht konsequent umsetzen, falls – wie allgemein üblich – lineare Gleichungen vor den linearen Funktionen behandelt werden. Jedoch können graphische Darstellungen (die noch nicht als Funktionsgraphen bezeichnet werden müssen) auch vor der Behandlung des Funktionsbegriffs und der linearen Funktionen für die Veranschaulichung und das graphische Lösen von Gleichungen herangezogen werden. Graphische Darstellungen proportionaler Zuordnungen fertigen Schüler oftmals bereits vor der expliziten Behandlung von Funktionen an; eine Erweiterung auf weitere Zuordnungen ist auch ohne theoretische Überlegungen zum Funktionsbegriff möglich – eine gelungene Umsetzung stellt das Kapitel 4 „Graphen lesen und darstellen“ des Schulbuches Mathematik Neue Wege 7 (LERGENMÜLLER/SCHMIDT 2006) dar. Hier werden Graphen unterschiedlicher (u. a. linearer und quadratischer) Zuordnungen behandelt, ohne bereits den Funktionsbegriff zu thematisieren. Bei der im Anschluss daran erfolgenden Behandlung der Gleichungslehre werden Gleichungen auch graphisch veranschaulicht und gelöst. Die folgenden beiden Beispiele (siehe dazu auch Abb. 2 und 3) für die Gleichungen $30 + 8 \cdot t = 150$ sowie $20 + 0,3 \cdot x = 0,5 \cdot x$ sind diesem Schulbuch entnommen.

Ein Schwimmbecken soll auf 1,50 m Wassertiefe aufgefüllt werden. Die gegenwärtige Wassertiefe beträgt 30 cm. Wenn die Zuleitung voll aufgedreht ist, hebt sich der Wasserspiegel um 8 cm in der Stunde. Wie lange dauert das Auffüllen?

In der Graphik sind zwei verschiedene Tarifunterfunktionen $T_1(x)$ und $T_2(x)$ dargestellt. Beide Tarife setzen sich zusammen aus einer Grundgebühr (in €), die einmal im Monat zu zahlen ist, und einer Gesprächsgebühr, die für jede Minute berechnet wird. ... Bei wie vielen Gesprächsminuten bezahlt man bei beiden Tarifen gleich viel.

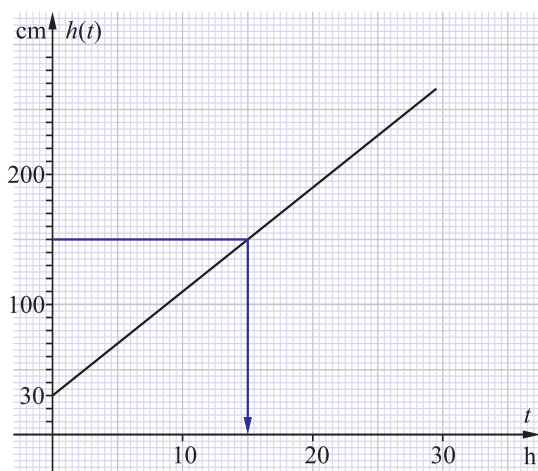


Abb. 2

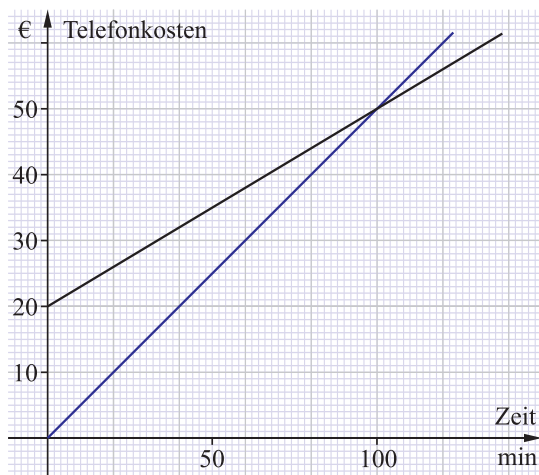


Abb. 3

Die Beispiele zeigen, wie graphische Repräsentationen bereits in einem frühen Stadium das Lösen von Gleichungen veranschaulichen können. Zudem lernen die Schüler damit ein Lösungsverfahren kennen, das sehr universell einsetzbar ist und es auch erlaubt, Gleichungen näherungsweise zu lösen, für die im gesamten Schulunterricht keine exakten Lösungsverfahren behandelt werden. Es erscheint daher durchaus sinnvoll, bereits recht frühzeitig lineare Gleichungen auch graphisch zu veranschaulichen und zu lösen. Weiterhin sollte dies dann bei der Behandlung der linearen Funktionen wiederholt und gefestigt werden, wobei auch der Zusammenhang zwischen Nullstellen linearer Funktionen und den Lösungen entsprechender linearer Gleichungen von Bedeutung ist.

5.4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen und 2 Gleichungen

Lineare Gleichungssysteme werden in der Sekundarstufe I meist in der 8. oder 9., mitunter auch bereits in der 7. Jahrgangsstufe behandelt. Dieser recht frühe Zeitpunkt erscheint durchaus problematisch, da Schüler für eine erfolgreiche und inhaltliches Verständnis hervorrufende Behandlung über eine Reihe von Voraussetzungen verfügen müssen:

- sichere Beherrschung des Rechnens mit rationalen Zahlen,
- gefestigte Fähigkeiten hinsichtlich der Äquivalenzumformungen von Gleichungen,
- Verständnis der linearen Funktionen und ihrer Graphen.

Dass diese Voraussetzungen keinesfalls selbstverständlich sind, zeigen u. a. Erfahrungen in einer recht leistungsschwachen 8. Klasse einer Heidelberger Realschule. Bei einer Reihe von Schülern traten hier massive Defizite hinsichtlich der Bruchrechnung und des Rechnens mit negativen Zahlen auf; eine sichere Beherrschung der Äquivalenzumformungen war lediglich bei einer Minderheit zu konstatieren; schließlich hatte eine große Zahl von Schülern Probleme damit, Graphen linearer Funktionen zu zeichnen sowie Wertepaare aus Funktionsgraphen abzulesen. An Stelle der Behandlung der linearen Gleichungssysteme wäre es in derartigen Fällen erheblich sinnvoller, Unterrichtszeit in den Erwerb bzw. die Festigung der oben aufgeführten fundamentalen Fähigkeiten zu investieren. Die Alternative hierzu ist ein verständnisloses „Trainieren“ der Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme, wobei das Hauptaugenmerk dann unweigerlich auf dem „Reparieren“ rein rechnerischer Probleme liegen wird, die sich aus Defiziten hinsichtlich der o. g. Fähigkeiten unweigerlich ergeben.⁷ Besonders fatal ist gerade in einem solchen Falle die Behandlung aller drei vorgesehenen Lösungsverfahren (Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren).

Bereits 1991 beklagte KIRSCH die Überbetonung von Formalismen und Verfahrensregeln bei der Behandlung der linearen Gleichungssysteme (KIRSCH 1991). Gerade dann, wenn die notwendigen Grundlagen für ein inhaltliches Verständnis fehlen, ist die Gefahr einer rein formalen Behandlung im Sinne des „Trainierens“ von Kalkülen besonders hoch. Allein mit dem Verweis auf praktische Anwendungen linearer Gleichungssysteme lässt sich die für das Einüben von Lösungsverfahren

⁷ Dass Lehrer oft gerade diesen Weg wählen, hängt auch mit dem durch zentrale Leistungsüberprüfungen erzeugten Druck zusammen. So sind Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme ein oft auftretender Bestandteil zentraler Vergleichsarbeiten am Ende der Klassenstufe 8 für Realschulen in Baden-Württemberg.

aufgewendete Unterrichtszeit nicht rechtfertigen, zumal mittlerweile bereits recht einfache graphische Taschenrechner lineare Gleichungssysteme lösen. Die Behandlung von Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme kann also nur dann gerechtfertigt werden, wenn die Schüler inhaltliche Vorstellungen von den zugrunde liegenden Strukturen und den verwendeten Kalkülen erwerben. Veranschaulichungen und graphischen Lösungsverfahren kommt hierbei eine hohe Bedeutung zu. Kirsch formulierte dazu: „... muss betont werden, dass das graphische Verfahren zwar Mittel, keineswegs aber ein zweitrangiges ist, das nur vorübergehend zu Veranschaulichungszwecken eingesetzt wird und als Notbehelf anzusehen ist, weil es im allgemeinen keine hinreichend genauen Ergebnisse liefert. Vielmehr ist das (u. U. nur vorgestellte) graphische Verfahren, richtig verstanden, durchaus ein Erkenntnismittel, das wesentliche Einsichten über das vorliegende Gleichungssystem liefern kann, die auch beim weiteren Vorgehen nützlich sind“ (KIRSCH 1991, S. 299).

Wie bereits erwähnt wurde, ist ein sicherer Umgang mit linearen Gleichungen in einer Variablen sowie mit linearen Funktionen als Grundvoraussetzung dafür anzusehen, um lineare Gleichungssysteme in sinnvoller Weise behandeln zu können. Gegenüber den ihnen bisher bekannten Gleichungen in einer Variablen (die i. Allg. genau eine Lösung haben, abgesehen von den Spezialfällen unlösbarer oder für alle Zahlen des Grundbereichs lösbarer Gleichungen) weisen Gleichungen mit 2 Variablen für Schüler die „Neuartigkeit“ auf, dass Sie i. Allg. unendlich viele Lösungen besitzen und es sich bei den Lösungen zudem um Zahlenpaare handelt. Es erscheint sinnvoll, Schülern anhand von Anwendungsbeispielen⁸ die Möglichkeit zu geben, diese Tatsache zu erfassen.

Lea hat auf ihrem Prepaid-Handy ein Guthaben von 20 €. Eine SMS kostet 0,15 €, eine Minute Telefonieren 0,20 €.

1. Wie viele SMS kann sie höchstens verschicken?
2. Wie viele Minuten kann sie höchstens telefonieren?
3. Lea will sowohl telefonieren als auch SMS verschicken. Wie viele SMS kann sie in diesem Fall verschicken und wie viele Minuten telefonieren?

Schüler einer 7. Klasse eines Heilbronner Gymnasiums erkannten bei dem Versuch, die dritte Teilaufgabe zu lösen, selbstständig, dass es dafür „ganz viele Möglichkeiten“ gibt und dass zu einer „Lösung“ immer die Angabe zweier Zahlen gehört, etwa 100 SMS und 25 Gesprächsminuten. Den Schülern wurde – nach dem Zusammentragen gefundener Lösungen – die Aufgabe gestellt, die gefundenen Lösungspaare in ein Koordinatensystem einzutragen (siehe Abb. 4).

Anhand der Betrachtung der dabei eingetragenen Wertepaare erkannten die Schüler, dass offenbar alle Lösungspaare auf einer Geraden liegen. Sie erhielten daraufhin die Aufgabe, eine Gleichung für den gegebenen Sachverhalt aufzustellen:

$$0,15 \cdot x + 0,2 \cdot y = 20$$

Um weitere Wertepaare zu berechnen, gingen einige Schüler „versuchsweise“ vor, während andere die Gleichung nach y umstellten:

$$y = -0,75 \cdot x + 100.$$

Damit konnten sie Wertepaare in derselben Weise ermitteln, in der sie dies zuvor bereits bei der Behandlung linearer Funktionen getan hatten. Es erfolgte hierbei eine gewisse Loslösung von dem Kontext „Telefonguthaben“, indem nicht ganzzahlige Lösungen auftraten, die in dem Sachkontext

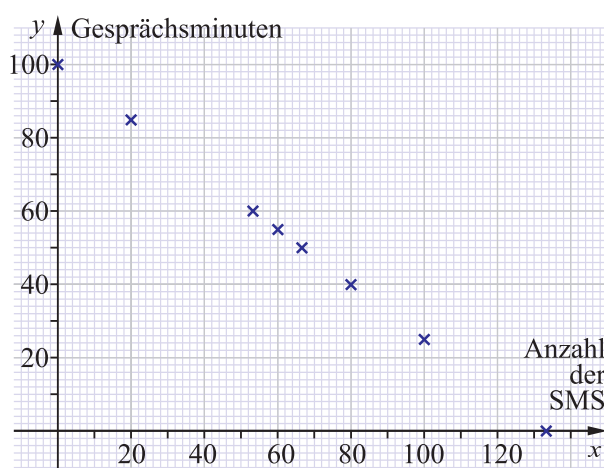


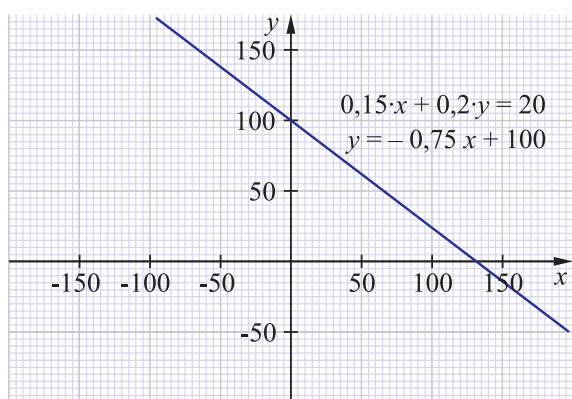
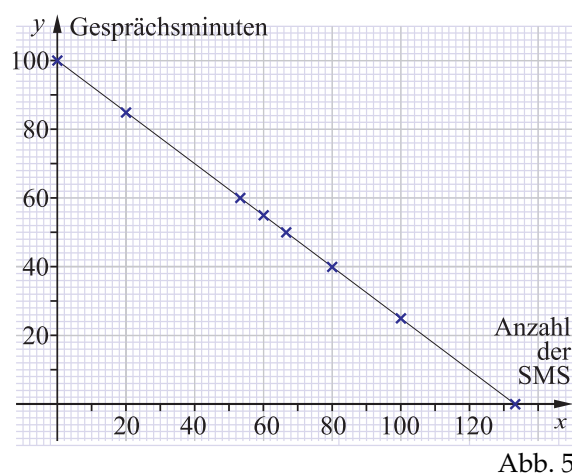
Abb. 4

⁸ Die hier betrachteten Anwendungsbeispiele dienen nicht in erster Linie dem Ziel, anspruchsvolle Anwendungen mathematischer Inhalte aufzuzeigen, sondern eher umgekehrt: die Beispiele sollen mathematische Sachverhalte veranschaulichen und zugänglich machen (sie sind also eher in der Funktion von Pizzen und Torten bei der Behandlung der Bruchrechnung zu sehen, denn im Sinne mathematischer Modellbildungen).

nicht sinnvoll sind. Dies störte die betreffenden Schüler allerdings wenig, da sie bei der Behandlung der linearen Funktionen bereits mit nicht ganzzahligen Funktionswerten gearbeitet hatten.

Allerdings wurden zunächst keine negativen Lösungen betrachtet, was sicherlich damit im Zusammenhang zu sehen ist, dass die ursprünglich angefertigte, auf den Sachkontext bezogene graphische Darstellung nur für den ersten Quadranten angefertigt wurde. Die gefundenen Wertepaare wurden durch eine Strecke verbunden (Abb. 5).

Um zu verdeutlichen, dass Lösungsmengen von Gleichungen auch negative Werte enthalten können und durch die Gleichung $0,15 \cdot x + 0,2 \cdot y = 20$ dieselbe Gerade beschrieben wird, die sich auch als Graph der linearen Funktion $y = -0,75 \cdot x + 100$ ergibt, ist es sinnvoll, eine weitere graphische Darstellung anzufertigen, die alle 4 Quadranten umfasst (Abb. 6). Die Ablösung von dem ursprünglichen Sachkontext wird damit vollständig vollzogen. Sie korrespondiert mit dem Übergang zwischen den graphischen Darstellungen: von der Darstellung einiger, direkt aus dem Kontext entnommener Wertepaare (Abb. 4) über die Darstellung aller Lösungspaare der aus dem Sachkontext hervorgegangenen Gleichung, die nur positive Werte enthalten (Abb. 5), bis hin zur Darstellung der Lösungsmenge der Gleichung, welche dem Graphen der zugehörigen linearen Funktion entspricht (Abb. 6).



Anhand der graphischen Darstellung (siehe Abb. 6) wurde für die Schüler deutlich, dass alle den Lösungen der Gleichung $0,15 \cdot x + 0,2 \cdot y = 20$ zugeordneten Punkte auf einer Geraden liegen. Damit haben sie anhand eines einfachen Beispiels erstmals eine nichttriviale Lösungsmenge kennengelernt, die nicht nur aus einem Element besteht und einen ersten Einblick in die eingangs erwähnten Struktureigenschaften der linearen Algebra – wenngleich über einer eingeschränkten Zahlenmenge⁹ – erhalten. Die Tatsache, dass sich Lösungsmengen linearer Gleichungen mit zwei Variablen durch Geraden darstellen lassen, sollte im Folgenden durch weitere Beispiele (mit und ohne Anwendungsbezüge) gefestigt werden. Im Zusammenhang damit ist auch der Zusammenhang zu den linearen Funktionen und ihren Graphen von Bedeutung. Dieser tritt durch Umstellung der betrachteten Gleichungen nach einer der Variablen (bevorzugt y) und die graphische Darstellung der dadurch beschriebenen Funktionen hervor.

Nachdem Schüler lineare Gleichungen mit zwei Variablen in der beschriebenen Weise bearbeitet und ein anschaulich-inhaltliches Verständnis für ihre Lösungsmengen erworben haben, sind gute Voraussetzungen für die Behandlung linearer Gleichungssysteme gegeben. So gelangten einige Schüler der erwähnten Gymnasialklasse schnell zu der Erkenntnis, dass ein Paar $(x|y)$ gleichzeitig Lösung zweier Gleichungen ist, wenn der zugehörige Punkt Schnittpunkt der durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden ist. Auf diese Weise konnten sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4 \cdot x - 5 \cdot y &= 13 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y &= 3 \end{aligned}$$

näherungsweise lösen (siehe Abb. 7); die genaue Lösung $(\frac{67}{31} | -\frac{27}{31})$ lässt sich derart natürlich nicht ermitteln.

⁹ Die Schüler kennen zu dem Zeitpunkt, zu dem lineare Gleichungssysteme behandelt werden, lediglich rationale Zahlen. Bei dem hier herangezogenen Beispiel kommen weitere Einschränkungen hinzu, die daraus resultieren, dass nur Punkte im ersten Quadranten sinnvolle Lösungen repräsentieren und die Koordinaten im Kontext der Aufgabe zudem ganzzahlig sein sollten. Allerdings fand im Verlauf der Bearbeitung der Aufgabe (nach dem Aufstellen der Gleichung) bereits eine gewisse Loslösung von dem ursprünglichen Kontext „Telefonguthaben“ statt.

Die auf diesem Wege erfolgte graphische Lösung eines linearen Gleichungssystems ist keinesfalls nur als „Notlösung“ zu sehen, auf die dann im Folgenden (nach der Behandlung rechnerischer Lösungsverfahren) verzichtet werden sollte. Sie sollte vielmehr (im Sinne des o. a. Zitats von KIRSCH) angesehen werden als *„ein Erkenntnismittel, das wesentliche Einsichten über das vorliegende Gleichungssystem liefern kann, die auch beim weiteren Vorgehen nützlich sind.“* Derartige Einsichten sind:

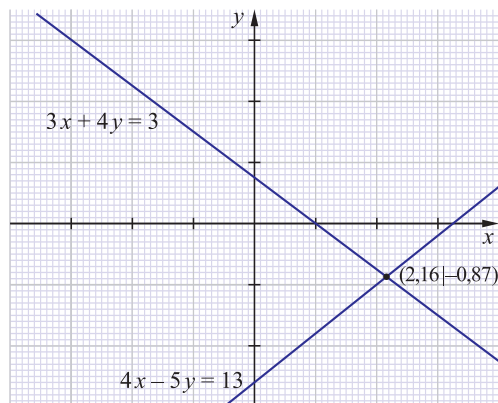


Abb. 7

- Gleichungssysteme, deren Gleichungen durch zueinander parallele Geraden repräsentiert werden, sind nicht lösbar. Werden Gleichungssysteme durch zueinander identische Geraden repräsentiert, so besitzen sie unendlich viele Lösungen; eine der beiden Gleichungen ist „verzichtbar“. (Siehe Abb. 13 und 14 auf S. 11; rechnerisch sollte in diesem Falle noch herausgearbeitet werden, dass die beiden Gleichungen dann durch Äquivalenzumformungen auseinander hervorgehen.)
- Lineare Gleichungen mit 2 Variablen beschreiben Geraden; von den prinzipiell als Lösungen in Frage kommenden Punkten der Ebene „lässt“ eine Gleichung die Punkte einer Geraden „übrig“. Erstmalig können Schüler somit eine intuitive Vorstellung von der „Dimension“ einer Lösungsmenge erhalten, wenngleich dieser Begriff an dieser Stelle natürlich nicht exaktifiziert werden sollte und die Fähigkeit der Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen noch nicht zu erwarten ist.
- Die Lösung eines Gleichungssystems ergibt sich als Durchschnitt der Lösungsmengen der Einzelgleichungen.

Die Schüler machen anhand des graphischen Lösungsverfahrens also erstmals „Bekanntschaft“ mit zentralen Strukturaussagen der linearen Algebra. Wenngleich sich diese Erfahrungen auf sehr einfache Fälle beziehen und eine Verallgemeinerung in der 7. oder 8. oder auch 9. Jahrgangsstufe kaum möglich sein dürfte, besitzen sie (auch hinsichtlich des „Anbahnens“ späterer Verallgemeinerungen) einen höheren Wert als das oftmals mechanische Ausführen von Lösungskalkülen. Auch in diesem Sinne sind *„graphische Verfahren ... keineswegs [als] zweitrangig“* anzusehen.

Ausgehend vom graphischen Lösen linearer Gleichungssysteme bietet sich als rechnerisches Lösungsverfahren primär das Gleichsetzungsverfahren an, welches durch die graphische Darstellung ja bereits recht unmittelbar illustriert ist. Haben Schüler die Geraden als Funktionsgraphen gezeichnet, indem sie die Gleichungen nach y (bzw. in Spezialfällen nach x) umstellten, so kann von hier aus unmittelbar mit dem Gleichsetzungsverfahren fortgefahren werden. Wurden die Geraden jeweils durch zwei Lösungen der gegebenen Gleichungen erstellt, ist eine Umstellung der Gleichungen nach einer Variablen noch erforderlich. Dies bereitet nur dann größere Schwierigkeiten, wenn die eingangs dieses Abschnitts genannten Grundvoraussetzungen nicht erfüllt sind, ohne welche die Behandlung der linearen Gleichungssysteme grundsätzlich fragwürdig erscheint.

Neben dem Gleichsetzungsverfahren werden im Unterricht noch das Einsetzungsverfahren und das Additionsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme behandelt;¹⁰ Abb. 8 zeigt eine entsprechende Schulbuchseite. Dabei werden meist Beispiele aufgezeigt, bei denen eines der Verfahren sehr schnell zum Ziel führt; die Behandlung drei verschiedener Verfahren wird mit Rechenerleichterungen durch die Auswahl für bestimmte Gleichungssysteme jeweils besonders gut geeigneter Verfahren motiviert (siehe Abb. 9). Für das vergleichsweise einfache Einsetzungsverfahren mag eine derartige Motivation hinsichtlich bestimmter Gleichungssysteme noch überzeugen können, hinsichtlich des Additionsverfahrens greift sie jedoch deutlich zu kurz.

¹⁰ In den Lehrplänen ist dies oftmals nicht explizit vorgeschrieben. Die meisten Schulbücher des Gymnasiums und der Realschule beinhalten alle drei Verfahren, wobei Gymnasialschulbücher dem Additionsverfahren meist den größten Umfang einräumen.

Rechnerische Lösung eines linearen Gleichungssystems		
Annahme: Das nachfolgende System hat eine Lösung. (I) $3x - 15y = 180$ (II) $2x + 4y = 64$		
Einsetzungsverfahren	Gleichsetzungsverfahren	Additionsverfahren
Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen: $(II') \quad y = -\frac{1}{2}x + 16$ Den Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen: $3x - 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 16\right) = 180$ Gleichung lösen: $3x + \frac{15}{2}x - 240 = 180$ $\frac{21}{2}x = 420$ $x = 40$ Berechnen der anderen Komponente: $y = -\frac{1}{2} \cdot 40 + 16$ $y = -4$	Beide Gleichungen nach derselben Variablen auflösen: $(I') \quad y = \frac{1}{5}x - 12$ $(II') \quad y = -\frac{1}{2}x + 16$ Gleichsetzen: $\frac{1}{5}x - 12 = -\frac{1}{2}x + 16$ Gleichung lösen: $\frac{7}{10}x = 28$ $x = 40$ Berechnen der anderen Komponente: $y = \frac{1}{5} \cdot 40 - 12$ $y = -4$	Gleichungen mit geeigneten Zahlen multiplizieren, so daß nach der Addition eine Variable verschwindet: $(I) \quad 3x - 15y = 180 \quad \cdot 2$ $(II) \quad 2x + 4y = 64 \quad \cdot (-3)$ $(I') \quad 6x - 30y = 360$ $(II') \quad -6x - 12y = -192$ Gleichungen addieren: $-42y = 168$ Gleichung lösen: $y = -4$ Berechnen der anderen Komponente: $(I) \quad 3x - 15 \cdot (-4) = 180$ $3x = 120$ $x = 40$

Abb. 8

Das **Einsetzungsverfahren** bietet sich an, wenn eine der beiden Gleichungen bereits nach einer Variablen aufgelöst ist.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \quad (I) \quad 6x - 5y = 12 \\ \quad \quad (II) \quad x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3} \end{array} \quad \left\{ \quad (II) \text{ in } (I) \quad 6 \cdot \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\right) - 5y = 12 \right.$$

Das **Gleichsetzungsverfahren** bietet sich an, wenn beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst sind.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \quad (I) \quad y = \frac{1}{2}x - 3 \\ \quad \quad (II) \quad y = 3x + 2 \end{array} \quad \left\{ \quad (I) = (II) \quad \frac{1}{2}x - 3 = 3x + 2 \right.$$

Das **Additionsverfahren** bietet sich an, wenn beim Addieren der beiden Gleichungen eine Gleichung mit nur einer Variablen entsteht.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \quad (I) \quad 3x + 2y = 4 \\ \quad \quad (II) \quad 2x - 2y = 11 \end{array} \quad \left\{ \quad (I) + (II) \quad 5x = 15 \right.$$

Abb. 9

Auszüge aus dem Schulbuch: SCHULZ; STOYE (Hrsg.): *Mathematik 9*. Berlin: Volk und Wissen, 1995.

5.5 Das Additionsverfahren

Die Vorgehensweise des Additionsverfahrens unterscheidet sich – dadurch, dass zwei Gleichungen im Blick behalten und so umgeformt werden müssen, dass ihre dann erfolgende Addition zu dem Ziel der Elimination einer Variablen führt – am stärksten von den Term- und Gleichungsumformungen, die Schüler bislang kennen gelernt haben und im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I noch durchführen werden. Dass es dieses Verfahren für bestimmte Gleichungssysteme ermöglicht, recht schnell zu einer Lösung zu gelangen, kann seine Behandlung somit kaum motivieren, zumal bei den dafür herangezogenen Beispielen meist auch das Gleichsetzungs- oder das Einsetzungsverfahren zum Ziel führen. Überzeugendere Gründe für die Behandlung des Additionsverfahrens liegen vielmehr darin, dass dieses Verfahren die Verallgemeinerung auf Gleichungssysteme mit

mehr als zwei Variablen und mehr als zwei Gleichungen ermöglicht und einen Spezialfall des in der Sekundarstufe II behandelten Gauß-Algorithmus darstellt. Die beim Lösen von Gleichungssystemen mit mehr als zwei Variablen und mehr als zwei Gleichungen auszuführenden Rechnungen sind aber recht komplex und daher eher für die Klassenstufen 9/10 als für die Klasse 8 oder gar 7 geeignet. Daher erschien es durchaus sinnvoll, die Behandlung der linearen Gleichungssysteme in der S I auf zwei Schuljahre zu verteilen und das Additionsverfahren erst in der Klassenstufe 9 oder 10 zu behandeln. Dafür spräche auch, dass die Behandlung der linearen Gleichungssysteme oftmals eine „Inselstellung“ einnimmt: Lineare Gleichungssysteme werden meist zu einem recht frühen Zeitpunkt behandelt; danach wird lange Zeit kaum darauf zurückgegriffen.¹¹ Es ist daher zu befürchten, dass Schüler ihre Kenntnisse und Fähigkeiten zu linearen Gleichungssystemen weitgehend vergessen. Dem könnten eine „Zweiteilung“ des Stoffgebietes sowie die Aufnahme von Anwendungsaufgaben unter Nutzung linearer Gleichungssysteme in Stoffgebiete zur mathematischen Modellierung (unter Nutzung verschiedener mathematischer Inhalte und Verfahren) entgegenwirken.

Wird das Additionsverfahren behandelt, so erscheint es sinnvoll, dieses graphisch zu veranschaulichen. In der Sekundarstufe I können Schüler dies zunächst für Gleichungen mit zwei Variablen (deren Lösungsmengen als Geraden in der Ebene aufzufassen sind) tun. Die durch die Umformungsschritte erfolgenden Veränderungen der Gleichungen lassen sich durch die Darstellung der durch sie beschriebenen Geraden sichtbar machen. Die Vereinfachung des Gleichungssystems zeigt sich dabei darin, dass die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden in eine spezielle (besonders „einfache“) Lage, parallel zu den Koordinatenachsen, überführt werden. Die Abbildungen 10-12 zeigen dies für das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcl} 2 \cdot x & + & 3 \cdot y & = & 4 & | \cdot (-3) \\ 3 \cdot x & + & 2 \cdot y & = & 8 & | \cdot 2 \\ \hline 2 \cdot x & + & 3 \cdot y & = & 4 & | \cdot 1 \\ & - & 5 \cdot y & = & 4 & | \cdot \frac{3}{5} \\ \hline 2 \cdot x & & & = & 6,4 \\ & - & 5 \cdot y & = & 4 \end{array}$$

Durch die Darstellungen wird deutlich, dass sich die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen durchaus verändern (im Gegensatz zu Äquivalenzumformungen von Gleichungen); der Schnittpunkt, welcher die Lösung des Gleichungssystems repräsentiert, jedoch unverändert bleibt. In der Sekundarstufe II lassen sich diese Überlegungen dann auf Schnittgeraden und -punkte im Raum erweitern.

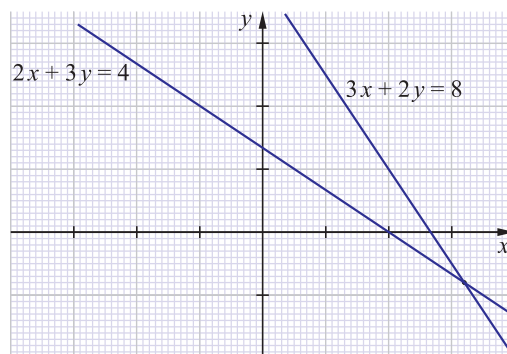


Abb. 10

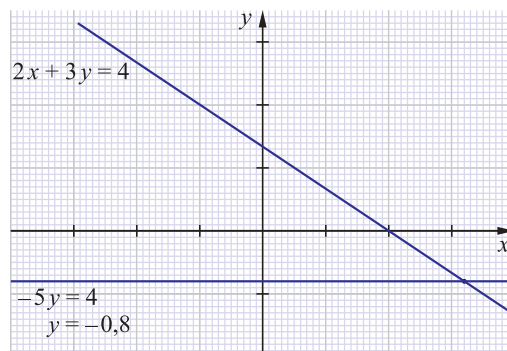


Abb. 11

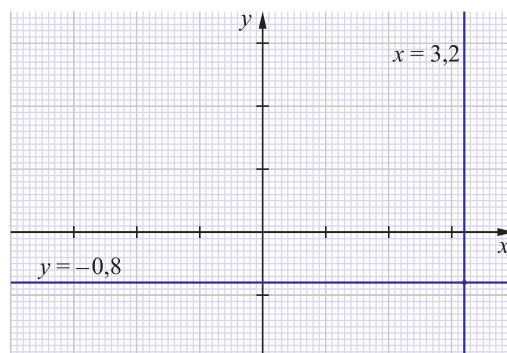


Abb. 12

Bei linearen Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen und 2 Variablen können zwei Spezialfälle auftreten (nicht lösbare sowie für alle Einsetzungen erfüllte Gleichungssysteme), die bei Durchführung des Additionsverfahrens zu folgenden Konsequenzen führen:

¹¹ Ausnahmen bilden in den meisten Schulbüchern lediglich die Bestimmung des Funktionsterms einer linearen Funktion, von der zwei Wertepaare bekannt sind, sowie (seltener) des Funktionsterms einer speziellen quadratischen Funktion, von der zwei Wertepaare bekannt sind, oder (in sehr wenigen Ausnahmefällen) des Funktionsterms einer quadratischen Funktion, von der drei Wertepaare gegeben sind. Dabei handelt es sich jedoch jeweils nur um einzelne Aufgaben „am Rande“ des Unterrichtsstoffs.

- Es entsteht eine Gleichung, die offensichtlich eine falsche Aussage ist. Das gesamte Gleichungssystem ist somit unlösbar, denn jede Lösung des Systems müsste dazu führen, dass *beide* Gleichungen erfüllt sind. Es gibt aber keine Punkte, die auf beiden (zueinander parallelen) Geraden liegen (Abb. 13).

$$\begin{array}{rcll} x & + & y & = & -1 & | \cdot 3 \\ -3x & - & 3y & = & 9 & | \cdot 1 \\ \hline x & + & y & = & -1 \\ 0 & = & 6 \end{array}$$

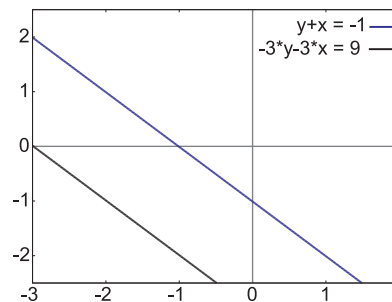


Abb. 13

- Es entsteht eine Gleichung, die immer erfüllt ist; alle Paare $(x|y)$ sind Lösungen dieser Gleichung. Allerdings ist es für Schülerinnen und Schüler schwer nachvollziehbar, dass Paare $(x|y)$ Lösungen einer Gleichung sind, in der x und y nicht auftreten. Eine andere, erfahrungsgemäß leichter verständliche Interpretation besteht darin, dass die zweite Gleichung „verschwunden“ ist und nur eine Bedingung (also nur eine Gerade) übrig bleibt. In der graphischen Darstellung (Abb. 14) ist dies bereits für das Ausgangs-Gleichungssystem sichtbar.

$$\begin{array}{rcll} x & + & y & = & -1 & | \cdot 3 \\ -3x & - & 3y & = & 3 & | \cdot 1 \\ \hline x & + & y & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

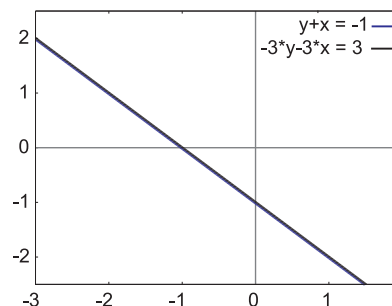


Abb. 14

5.6 Lineare Gleichungssysteme in der Sekundarstufe II

Der Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme und Anwendungen in der räumlichen Geometrie bilden einen Schwerpunkt des Stoffgebietes Analytische Geometrie in der S II. Das eingangs beschriebene „Legitimationsdefizit“, erhebliche Anteile an Unterrichtszeit in das Ausführen von Kalkülen zu investieren, besteht hierbei in besonderer Weise. Nach wie vor treten als Anwendungen linearer Gleichungssysteme hauptsächlich Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen im Raum auf. Bereits 1973 formulierte FREUDENTHAL: „Die Geometrie, die mit linearer Algebra auf der Schule möglich ist, ist ein trübes Abwasser. Der Höhepunkt ist etwa, zu beweisen, dass zwei verschiedene Geraden einen oder keinen Schnittpunkt haben, und dass diese Zahlen für Kreise 0, 1, 2 sind“ (FREUDENTHAL 1973, Bd. 2, S. 411). Ein Blick in Abituraufgaben des Jahres 2009 zeigt, dass das damit zum Ausdruck gebrachte Dilemma nach wie vor besteht. Unzufriedenheit mit dieser Situation wurde häufig zum Ausdruck gebracht, und es wurden vielfältige Vorschläge unterbreitet, die derzeitigen, durch das Ausführen von Kalkülen dominierten Unterrichtsinhalte durch interessantere geometrische Inhalte zu ersetzen (siehe z. B. SCHUPP 2000) oder aber außergeometrische Anwendungen der linearen Algebra in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellen.¹²

Als wesentliches Ergebnis der didaktischen Diskussion der vergangenen Jahrzehnte¹³ ist zu konstatieren, dass geometrische Anwendungen kaum zur Legitimation einer ausführlichen Behandlung des Gauß-Algorithmus im Unterricht dienen können. Auch durch außergeometrische Anwendungen ist dies nicht hinreichend zu begründen, da Gleichungssysteme leicht mithilfe graphischer Taschenrechner oder Computeralgebrasysteme gelöst werden können.

¹² Letztere Tendenz spiegelt sich in den Hamburger Bildungsplänen wieder, die ein Stoffgebiet „Matrizen und Vektoren als Datenspeicher“ enthalten.

¹³ Einen Überblick über Vorschläge zur Umgestaltung des Stoffgebietes Analytische Geometrie bzw. Lineare Algebra in der Sekundarstufe II enthält (FILLER 2007, S. 32-55).

Soll der Gauß-Algorithmus weiterhin an zentraler Stelle behandelt werden, so ist ein inhaltliches Verständnis seiner „Wirkungsweise“ und – damit eng verbunden – ein strukturelles Verständnis der Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme unverzichtbar. Es ergibt sich damit gewissermaßen eine „Umkehr der Rechtfertigung“: Geometrische Anwendungen dienen nicht hauptsächlich der Rechtfertigung dafür, algebraische Verfahren zu behandeln; sie dienen vielmehr als Hilfsmittel für das Verständnis algebraischer Strukturen (speziell Lösungsmengen) und Kalküle.

Analog zu den obigen Ausführungen über lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen ist zunächst herauszuarbeiten, dass die Lösungsmenge einer einzigen Gleichung durch eine Ebene dargestellt wird, eine Gleichung von der dreidimensionalen Grundmenge¹⁴ also eine zweidimensionale Lösungsmenge „übrig lässt“.

Hilfreich hierfür ist es, eine Gleichung mit drei Variablen nach einer der Variablen umzustellen, damit einige Lösungstripel zu berechnen und in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzutragen (Abb. 15).

Eine weitere (von der ersten Gleichung unabhängige) Gleichung verringert die Dimension der Lösungsmenge abermals um Eins, so dass durch lineare Gleichungssysteme mit zwei (voneinander unabhängigen) Gleichungen Geraden beschrieben werden.

Ein lineares Gleichungssystem mit drei unabhängigen Gleichungen hat, falls es lösbar ist, eine 3–3-dimensionale Lösungsmenge, die durch einen Punkt dargestellt wird. Geometrisch lässt sich dieser Punkt als Schnittpunkt der drei den Gleichungen zugeordneten Ebenen bestimmen. Abb. 16 zeigt dies anhand des folgenden Gleichungssystems:

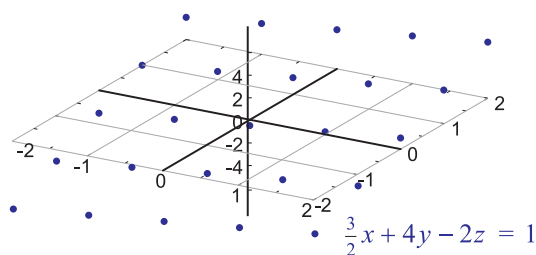


Abb. 15

$$\begin{array}{rclcl} \frac{3}{2}x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & - & \frac{9}{2}z & = & -\frac{1}{2} \\ x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

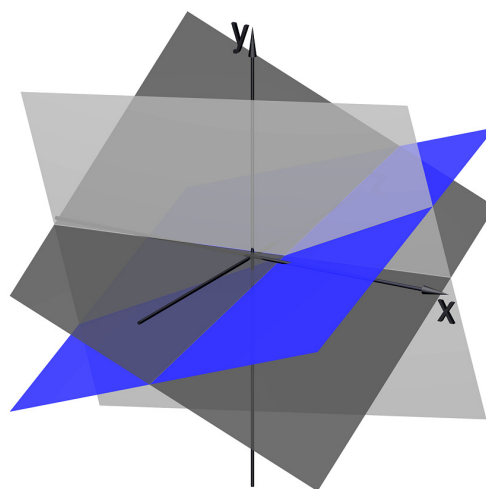


Abb. 16

5.7 Geometrische Interpretationen des Gauß-Algorithmus

Durch die Verfügbarkeit geeigneter Software ist es möglich geworden, die durch Gleichungen beschriebenen Ebenen in einem dreidimensionalen Koordinatensystem graphisch darzustellen; Schüler können dies z. B. mithilfe eines Computeralgebrasystems (CAS) selbst für verschiedene Gleichungssysteme tun.¹⁵

Die am nächsten liegende (und sicherlich wichtigste) Visualisierung des Gauß-Algorithmus für ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen bezieht sich auf die Lage der drei Ebenen, die durch die Gleichungen des Systems gegeben sind. Die Koordinaten des

¹⁴ Es wird etwas unscharf von „Mengen“ gesprochen, obwohl sich der Dimensionsbegriff hier natürlich auf affine Teilräume bezieht. Jedoch werden diese i. Allg. nicht in der Schule behandelt; es ist daher m. E. durchaus sinnvoll (und den mathematischen Inhalt nicht verfälschend), auf der Grundlage eines intuitiven Dimensionsbegriffs von „Dimensionen von Mengen“ (wobei Punktmengen wie Geraden und Ebenen gemeint sind) zu sprechen.

¹⁵ Es eignet sich hierfür z. B. das frei verfügbare CAS Maxima (<http://maxima.sourceforge.net>). Für dieses CAS steht unter <http://www.afiller.de/gauss> eine Datei zur Verfügung, mit der sich der Gauss-Algorithmus auf einfache Weise für verschiedene Gleichungssysteme nachvollziehen lässt.

Schnittpunktes dieser drei Ebenen (falls ein solcher existiert) bilden die Lösung des linearen Gleichungssystems. Da die durch den Gauß-Algorithmus vorgenommenen Umformungen äquivalent¹⁶ sind, können sich die Koordinaten des Schnittpunktes dabei nicht ändern.

Die Umformungen des Gauß-Algorithmus verändern die drei Gleichungen schrittweise so, dass Ebenen entstehen, die zunächst zu Koordinatenachsen (siehe Abb. 17) und schließlich sogar zu Koordinatenebenen parallel sind (siehe Abb. 18-20), so dass sich die Koordinaten des Schnittpunktes unmittelbar aus den Gleichungen der drei Ebenen bzw. geometrisch aus ihren Schnittpunkten mit den Achsen ablesen lassen. Sind alle drei durch das Gleichungssystem gegebenen Ebenen zu jeweils einer Koordinatenebene parallel, so befindet sich das System in Diagonalform (Abb. 20). Anhand des oben angegebenen linearen Gleichungssystems sind die einzelnen Umformungsschritte in den folgenden Abbildungen dargestellt.

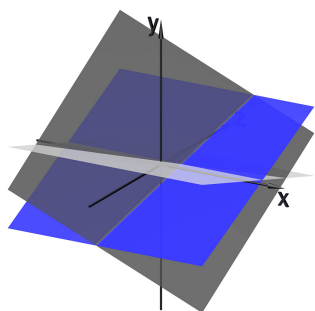


Abb. 17

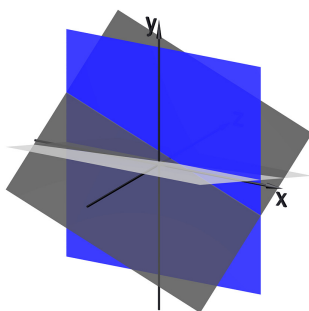


Abb. 18

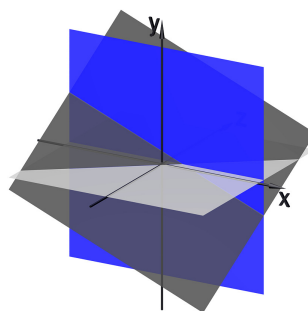


Abb. 19

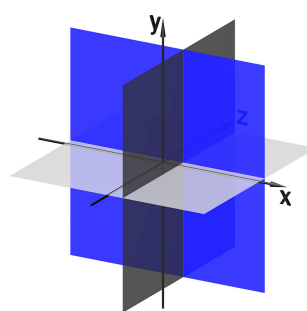


Abb. 20

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4y - 2z &= 1 \\ -\frac{22}{3}y - \frac{11}{6}z &= -\frac{11}{6} \\ -\frac{17}{3}y + \frac{7}{3}z &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4y - 2z &= 1 \\ -\frac{22}{3}y - \frac{11}{6}z &= -\frac{11}{6} \\ \frac{15}{4}z &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4y - 2z &= 1 \\ -\frac{22}{3}y &= -\frac{22}{45} \\ \frac{15}{4}z &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= \frac{11}{5} \\ -\frac{22}{3}y &= -\frac{22}{45} \\ \frac{15}{4}z &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Eine weitere – wenn auch für den Schulunterricht weniger nahe liegende – geometrische Interpretation des Gauß-Algorithmus bezieht sich auf die Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix und den Vektor der absoluten Glieder eines linearen Gleichungssystems. Die Frage nach dessen Lösungen kann bei Betrachtung dieser Vektoren folgendermaßen gestellt werden: Gesucht sind die Koeffizienten, mit denen die Spaltenvektoren eines Gleichungssystems zu multiplizieren sind, so dass der Vektor der absoluten Glieder eine Raumdiagonale des durch die derart multiplizierten Spaltenvektoren aufgespannten Parallelepipeds bildet (Abb. 21). Durch den Gauß-Algorithmus wird das Parallelepiped schrittweise in einen Quader überführt, dessen Seiten auf den Koordinatenachsen liegen bzw. zu diesen parallel sind. Eine Präsentation, welche dies für die einzelnen Umformungsschritte zeigt, steht unter <http://www.afiller.de/gauss> zur Verfügung.

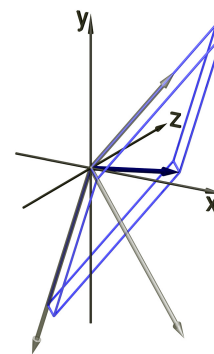


Abb. 21

Zitierte Literatur

- BRÜNING, A., SPALLEK, K. (1978): Eine inhaltliche Gestaltung der Gleichungslehre: Terme oder Abbildungen und Funktionen. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* 25, S. 236-271.
- FILLER, A. (2007): *Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie* (Habilitationsschrift). edoc Dokumenten- und Publikationsserver der Humboldt-Universität zu Berlin: <http://edoc.hu-berlin.de>.
- FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett, Stuttgart.
- KIRSCH, A. (1991): Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. *Didaktik der Mathematik* 19, S. 294-308.
- LERGENMÜLLER, A.; SCHMIDT, G. (2006): *Mathematik Neue Wege 7. Arbeitsbuch für Gymnasien* (Berlin, 7. Schuljahr). Schroedel, Braunschweig.
- SCHUPP, H. (2000): Geometrie in der Sekundarstufe II. *JMD* 21, 1, S. 50-60.
- TIETZE, U.-P. (2000): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra (u. Mitarbeit von Schroth; Wittmann). In: Tietze; Klika; Wolpers (Hrsg.): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*, 2. Vieweg, Braunschweig.
- WINTER, H. (1995): Mathematik und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37-46.

¹⁶ Es sind hiermit Äquivalenzumformungen in Bezug auf das gesamte Gleichungssystem gemeint. Natürlich handelt es sich – wie in dem Abschnitt über das Additionsverfahren bereits ausgeführt wurde – nicht um Äquivalenzumformungen in Bezug auf die einzelnen Gleichungen.

5.8 Magische Quadrate von der Grundschule bis zum Studium

Unter einem *magischen Quadrat* der Kantenlänge n versteht man (im engsten Sinne) eine quadratische Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n^2$, bei der die Summen der Zahlen aller Zeilen, Spalten und der beiden Diagonalen gleich sind. Das älteste bekannte magische Quadrat stammt aus China (3. Jahrtausend v. Chr.); es hat die Kantenlänge 3 und ist durch folgende Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Das wahrscheinlich bekannteste magische Quadrat hat die Kantenlänge 4 und ist in Albrecht Dürers Kupferstich *Melencolia I* (von 1514, man achte auf die beiden mittleren Zahlen in der unteren Reihe) dargestellt:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

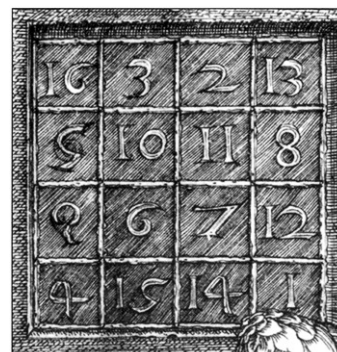


Abb. 22: Albrecht Dürers Kupferstich *Melencolia I* mit vergrößertem Ausschnitt des enthaltenen magischen Quadrats

Magische Quadrate lassen sich bereits in der Grundschule einsetzen, um Zahlenmuster und -gesetzmäßigkeiten zu untersuchen siehe u. a. Koth (2005). Kinder können beispielsweise unvollständige magische Quadrate vervollständigen sowie Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen s (im Folgenden nur noch kurz als Zeilensummen bezeichnet) in magischen Quadraten ermitteln. Lässt man die Bedingung fallen, dass ein magisches Quadrat genau die Zahlen $1, 2, \dots, n^2$ enthalten muss, so können magische Quadrate beliebiger Zeilensummen konstruiert werden. Die folgenden Aufgaben eignen sich gut als „Knobelaufgaben“, z. B. zu Beginn der Sekundarstufe I:

1. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 4 und $s = 38$.
2. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 4 und $s = 35$.

Hierbei können Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es sinnvoll sein kann, magische Quadrate zu „addieren“ (siehe Übung).

Die folgende Aufgabe motiviert zusätzlich die Vervielfachung magischer Quadrate:

3. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 4 und $s = 37$.

Hierfür liegt es nun nahe, ein Quadrat mit $s = 1$ dreifach zu dem Dürer-Quadrat zu addieren.

Schüler gelangen anhand dieser Aufgaben zu zwei Erkenntnissen:

- Die Summe zweier magischer Quadrate ist wiederum ein magisches Quadrat.
- Das Produkt eines magischen Quadrats mit einer (zunächst natürlichen) Zahl ist ebenfalls ein magisches Quadrat.¹⁷

¹⁷Die Anwendung dieser beiden Überlegungen stellte eine wesentliche Grundlage dafür dar, dass der Kandidat Robin

Wesentlich schwieriger als die bisher gestellten ist die folgende Aufgabe:

4. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 3 und $s = 16$.

Hierfür erscheint es naheliegend, z. B. von dem bekannten chinesischen 3×3 -Quadrat (siehe S. 14) mit $s = 15$, auszugehen und ein magisches Quadrat mit $s = 1$ hinzu zu addieren. Um ein magisches 3×3 -Quadrat der Zeilensumme 1 zu erhalten, muss aber die *Bedingung aufgegeben werden, dass nur natürliche Zahlen als Elemente auftreten*. Von einer Lösung der Aufgabe 4 ist es daher nur noch ein recht kleiner Schritt dahin, magische Quadrate zu betrachten, die aus beliebigen reellen Zahlen bestehen. Es lässt sich dann herausarbeiten, dass die Menge aller magischen Quadrate mit einer vorgegebenen Kantenlänge n einen Vektorraum bildet.¹⁸

Magische Quadrate lassen sich auch als Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme betrachten. Die Bedingung, dass die Summen aller Zeilen, aller Spalten und der beiden Diagonalen gleich sein müssen, führt bei magischen Quadraten der Kantenlänge 3, die sich allgemein in der Form $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ schreiben lassen, zu folgendem LGS mit 8 Gleichungen und den Variablen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ und s (der Summe jeder der Zeilen, Spalten und Diagonalen):

$$\begin{array}{rcccccl} a_{11} + a_{12} + a_{13} & & & & & - s = 0 \\ & a_{21} + a_{22} + a_{23} & & & & - s = 0 \\ & & a_{31} + a_{32} + a_{33} & & & - s = 0 \\ a_{11} & & + a_{21} & & + a_{31} & - s = 0 \\ & a_{12} & & + a_{22} & & + a_{32} & - s = 0 \\ & & a_{13} & & + a_{23} & & + a_{33} & - s = 0 \\ a_{11} & & & + a_{22} & & & + a_{33} & - s = 0 \\ & & a_{13} & & + a_{22} & & + a_{31} & - s = 0 \end{array}$$

Man erhält (bevorzugt mithilfe des Computers) als Lösungsmenge dieses LGS

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mithilfe dieser Darstellung lassen sich leicht magische Quadrate mit frei wählbarer Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme s aus den „Basisquadraten“ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ konstruieren.

Zitierte Literatur

- FILLER, A. (2011): *Elementare Lineare Algebra*. Spektrum, Heidelberg.
- GRIEWANK, A.; BOSSE, T.; SCHLAGK, D.; LEHMANN, L. (2012): Die magische Quadratur des Superhirns. In: *Mitteilungen der DMV* 2012 (1), S. 30-37.
- KOTH, M. (2005): *Spielereien mit Zahlen und Ziffern. Denkspielspaß für Kinder von 9 bis 99*. Aulis Verlag Deubner, Köln.

Wersig am 28. Dezember 2011 zu „Deutschlands Superhirn“ gekürt wurde. In der gleichnamigen ZDF-Sendung füllte er „blind“ (aus dem Kopf) ein Schachbrett mit einem magischen Quadrat (der Kantenlänge 8) aus, wobei die Zeilen- und Spaltensumme vom Publikum vorgegeben wurde – die Diagonalenbedingung wurde nicht gestellt, es handelte sich um ein „halbmagisches“ Quadrat. Als zusätzliche Schwierigkeit musste der Kandidat das Quadrat aber im „Rösselsprung“ (mit den Zügen eines Springers auf dem Schachbrett) ausfüllen. Es ist davon auszugehen, dass sich Robin Wersig ein festes magisches Quadrat eingeprägt hatte und durch Addition eines Vielfachen eines (ebenfalls eingeprägten) Quadrats der Zeilensumme 1 das Quadrat mit der vom Publikum gewünschten Zeilensumme im Kopf berechnete. Zu Wersigs Vorgehensweise und alternativen Möglichkeiten, die „Superhirn-Aufgabe“ zu lösen, siehe Griewank et al. (2012).

¹⁸Siehe u. a. Filler (2011).