Parallelwinkel; parallele und divergierende Geraden

Def.: Als *Grenzwinkel* oder *Parallelwinkel* im Punkt P in Bezug auf die Gerade a wird der Winkel φ mit

$$\varphi = \lim_{|AA_1|\to\infty} \angle(APA_1) = \lim_{|AA_2|\to\infty} \angle(APA_2)$$

bezeichnet, wobei $A \in a$ und $PA \perp a$ gilt sowie A_1, A_2 Punkte von a sind, die auf verschiedenen Halbgeraden von a bezüglich des Punktes A liegen.

Def.: Die Geraden b_1 und b_2, die mit dem Lot PA von einem Punkt P auf eine Gerade a den Grenzwinkel φ (in P in Bezug auf a) einschließen, heißen *Grenzgeraden in der Gesamtheit aller Geraden, die durch P verlaufen und a nicht schneiden*.

Satz: Sind a und b bel. Geraden, P und Q Punkte von b und ist b rechte (linke) Grenzgerade in der Gesamtheit aller Geraden, die durch P verlaufen und a nicht schneiden, so ist b auch re. (li.) Grenzgerade in der Gesamtheit der Geraden, die durch Q verlaufen und a nicht schneiden.

Satz: Ist a parallel zu b und sind B_1, B_2 Punkte der Geraden b, so ist der Parallelwinkel in B_1 in Bezug auf a verschieden vom Parallelwinkel in B_2 in Bezug auf a.

Def.: Eine Gerade b heißt zu einer Geraden *a parallel*, falls die Gerade b für einen ihrer Punkte P Grenzgerade in der Gesamtheit der Geraden ist, die durch P verlaufen und a nicht schneiden. Ist b linke (rechte) Grenzgerade, so heißt b zu *a linksseitig (rechtsseitig) parallel*.

Zwei Geraden heißen *divergierend*, falls sie keinen gemeinsamen Punkt besitzen und keine der beiden Geraden zu der anderen parallel ist.

Satz: **Symmetrie:** Sind a und b Geraden und ist a zu b parallel, so ist auch b zu a parallel (und zwar auf derselben Seite, auf der a zu b parallel ist.)

Transitivität: Gilt $a||b$ und $b||c$ und sind a und c zu b auf derselben Seite parallel, so sind auch a und c zueinander parallel (und zwar auf der Seite der Parallelität von a und b sowie c und b).