Winkelgröße

Def. 20: Als *Größe* $\alpha = g(<(p,q))$ eines *Winkels* $<(p,q)$ wird die Menge aller zu $<(p,q)$ kongruenten Winkel bezeichnet (also die Kongruenzklasse des Winkels $<(p,q)$):
$\alpha = g(<(p,q)) := \{<(x,y) \mid <(x,y) \cong <(p,q)\}$.
Gehört ein Winkel $<(p,q)$ einer Winkelgröße α an, so heißt $<(p,q)$ Repräsentant dieser Winkelgröße.

Def. 21: Sind α und β Winkelgrößen, $<(p,q)$ und $<(p,q)$ Repräsentanten von α bzw. β mit einem gemeinsamen Scheitel und einem gemeinsamen Schenkel p und liegt p im Innern des Winkels $<(q,r)$, so heißt die Winkelgröße $\gamma = g(<(q,r))$ *Summe der Winkelgrößen* α und β ($\gamma = \alpha + \beta$).

Def. 22: Eine Winkelgröße α heißt *kleiner* als eine Winkelgröße β ($\alpha < \beta$), falls eine Winkelgröße γ mit $\alpha + \gamma = \beta$ existiert, wobei γ nicht die Klasse der Nullwinkel ist.

Bem.: Die "$<$" - Relation auf der Menge der Winkelgrößen ist eine *irreflexive totale Ordnung* (d.h. irreflexiv, transitiv und konnex).

Satz 32: (Beziehung "größere Seite - größerer Winkel"):
Ist $\overline{ABC}$ ein beliebiges Dreieck, so gilt $AC < BC$ genau dann, wenn $g(<(ABC)) < g(<(BAC))$ ist.

Winkelmaß

Das Winkelmaß ordnet jedem Winkel $<(p,q)$ eine reelle Zahl (Maßzahl $m(<(p,q))$ aus dem Intervall $[0,\pi]$ zu mit folgenden Eigenschaften:

(0) Die Maßzahl eines „Nullwinkels“ ist 0, die eines gestreckten Winkels π.

(1) Kongruente Winkel (und nur diese) haben die gleiche Maßzahl:
$m(<(p,q)) = m(<(r,s))$ gdw. $<(p,q) \cong <(r,s)$.

(2) Additivität des Winkelmaßes:
$g(<(p,q)) + g(<(r,s)) = g(<(u,v))$ gdw. $m(<(p,q)) + m(<(r,s)) = m(<(u,v))$.

(3) $g(<(p,q)) < g(<(r,s))$ gdw. $m(<(p,q)) < m(<(r,s))$.